全国名校 TX 校本教材

高考直通车

丛书主编 宋杰

数学

光明日报出版社

全国名校 TX 校本教材

高考直通车

数学

丛书主编 宋　杰

本册主编 范建利

本册副主编 张元华 魏传英

本册编委 徐衍庆 翟丽洁 曹　芳 张　莹
张　超 钱运明 冯成刚 杨新昌
尚随江 王　军 施　勇 顾远军
刘　旭

光明日报出版社

图书在版编目(CIP)数据

高考直通车.数学/宋杰主编.-北京:光明日报出版社,2006.2

ISBN 7 - 80206 - 104 - 0

Ⅰ.高...　Ⅱ.宋...　Ⅲ.数学课-高中-升学参考资料　Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 159514 号

高考直通车

主　　编:宋　杰

责任编辑:温　梦

封面设计:邢　丽　　　　版式设计:邢　丽

责任校对:徐为正　　　　责任印制:胡　骑

出版发行:光明日报出版社

地　　址:北京市崇文区珠市口东大街 5 号,100062

电　　话:010 — 67078945(发行),67078235(邮购)

传　　真:010 — 67078227,67078233,67078255

网　　址:http://book.gmw.cn

E-mail:gmcbs@gmw.cn

法律顾问:北京盈科律师事务所郝惠珍律师

经　　销:全国各地新华书店

印　　刷:山东鸿杰印务有限公司

装　　订:山东鸿杰印务有限公司

本书如有破损、缺页、装订错误,请与本社联系调换

开　　本:890×1240　1/16

字　　数:4628 千字　　　　印　　张:103

版　　次:2006 年 2 月第 1 版　　　　印　　次:2006 年 2 月第 1 次

书　　号:ISBN 7 - 80206 - 104 - 0

总定价:187.00 元(全 9 册)

版权所有　翻印必究

前言 Foreword

始建于1996年的泰西中学，经过九年的跨越式发展，成绩越来越优，规模越来越大，信誉越来越好，知名度越来越高。在全体领导和教师的艰辛努力下，"泰西神话"一年年被延续，现已成为一所全国有名、省内拔尖的高级中学，其成功经验引起了各方面的高度重视。

随着我国教育改革的不断深化，高考改革的步伐明显加快，特别是在考试内容上，进一步突出了对学生能力和综合素质的考查。这些变革的根本目的是为了全面推进以德育为核心，以创新精神和实践能力培养为重点的素质教育，从而减轻学生过重的课业负担，提高教学质量和效果。这就要求我们要对学科能力的研究和认识有新突破，要求我们的高中教学要更新教学资料，改革教学方法，探索科学模式，提高教学质量，以适应基础教育改革和高考改革的方向，突出学生素质和能力的提高。为此，我们根据最新考试大纲，以考点为切入点，组织学校一线教师系统整理编写了这套复习资料。

这套复习资料按我校高三二轮复习进度，分为语文、数学、英语、物理、化学、生物、政治、历史、地理九个分册，它全面总结了我校近几年来一线教师教学方面的智力成果，配以我校广大教师对新高考模式的深入研究，具有极强的针对性、指导性和实战性，较好地注重了学生的知识水平、能力水平和素质水平的提高，让学生自主思考，主动探究，主动参与和实践。

本丛书具有以下特点：

1. 根据最新颁布的考纲新精神，融合全国"3＋X"高考各种形式的新特点，在总结和吸收众多成功指导高考复习的经验基础上编写而成。

Foreword

2. 紧扣高考各学科的能力要求和主干知识，采用训练的形式，根据高考各学科的知识体系命制各个层次的训练。旨在通过训练，让教师和学生找到高三复习中知识掌握的不足之处；通过讲解，进一步完善学科的知识体系和提高学生的解题能力。

3. 按照专题分类归纳了近年来全国高考试题，让学生直接感知高考考试形式、发展趋势、考查重点和近年热点。

4. 严格按照最新的试题命制要求，按专题命制了高考模拟冲刺试卷。试卷的题型设计、命题角度、材料选取、难度控制、思维要求都以近年来的高考试题为蓝本，以帮助学生完成针对高考要求的训练。模拟试卷和高考真卷形神兼备。它能使学生在最后冲刺阶段的训练中少走弯路，不受误导，提高实效。

本丛书是泰西中学九年创业的智慧结晶，是全体参编教师的心血，但这毕竟还是一种新的尝试与探索，需要广大读者的关心与呵护，更需要不断吸取新的素养，书中不足之处在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

2006 年 2 月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目录

MU LU

第一部分　知识热点专题

专题一　函数的性质及应用 …… 1

第一课时　函数的性质 …… 1

第二课时　二次函数、指数函数、对数函数 …… 8

第三课时　函数的应用 …… 14

专题二　方程与不等式 …… 19

第一课时　不等式的性质、证明及解法 …… 19

第二课时　不等式的综合应用 …… 26

专题三　数　列 …… 32

第一课时　数列的通项及前 n 项和 …… 32

第二课时　数列的综合应用 …… 38

专题四　三角函数 …… 44

第一课时　三角变换 …… 44

第二课时　三角函数的图象与性质 …… 49

第三课时　三角形中的三角函数问题及三角综合应用 …… 56

专题五　平面向量 …… 61

※专题五　向量及应用 …… 66

专题六　直线、平面、简单几何体 …… 73

第一课时　空间直线和平面 …… 73

第二课时　简单几何体 …… 81

专题七　直线与圆锥曲线 …… 88

第一课时　直线与圆锥曲线的基本概念 …… 88

第二课时　直线与圆锥曲线的位置关系 …… 95

专题八　排列、组合 …… 102

专题九　概　率 …… 109

专题十　概率与统计(理科) …… 115

专题十一　导　数(理科) …… 121

专题十二　极　限 …… 127

专题十三　复　数 …… 133

第二部分　知识交汇与应用专题

专题一　与平面向量的交汇和综合应用 …… 137
专题二　函数、不等式、数列综合应用 …… 142
专题三　排列组合与概率统计综合应用 …… 148
专题四　求最值问题 …… 153
专题五　探索性问题 …… 159

第三部分　数学思想与方法专题

专题一　配方法与待定系数法 …… 165
专题二　数形结合 …… 170
专题三　换元引参 …… 175
专题四　分类讨论 …… 182
专题五　转化思想 …… 187
专题六　选择、填空题的解法 …… 193
　第一课时　选择题的解法 …… 193
　第二课时　填空题的解法 …… 198

第四部分　高考综合模拟专题

高考模拟试题(一) …… 203
高考模拟试题(二) …… 206
专题十　统　计(文科) …… 209
专题十一　导　数(文科) …… 213

注:本书中标注"※"的内容为B版教材专用.

第一部分 知识热点专题

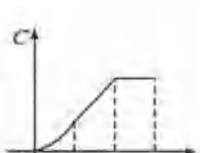
专题一 函数的性质及应用

第一课时 函数的性质

问题导考

1. 日出日落，花果飘香，物换星移，沧桑变化，都是现实世界中变化的事物，而这些变化都包含了事物间的关系，函数就是描述现实世界的一种数学模型. 如果将某地区所有丈夫组成一个集合 A，所有的妻子组成集合 B，建立集合 A 到集合 B 的关系 f 为夫妻关系. 在不少阿拉伯国家，一个男子可以娶多个妻子，而一个女子只能有一个丈夫，请问此时 f 是 A 到 B 的一个映射吗？而在一些原始母系社会里，一个男子只能"娶"一个妻子，而一个女子可以"嫁"给多个男子，请问此时 f 是否是 A 到 B 的映射呢？

2. 这里有一道某公司的面试试题："本公司6年来某种产品的总产量 C 与时间 t（年）的函数关系如图. 请你谈一谈，从图中能得到关于此产品的哪些生产信息？"若你是应聘者，该如何回答呢？



案例探究

【案例 1】（2005 年高考上海卷，文 22）对定义域分别是 D_f、D_g 的函数 $y=f(x)$、$y=g(x)$，规定：函数

$$h(x)=\begin{cases} f(x)\cdot g(x), & x\in D_f \text{ 且 } x\in D_g, \\ f(x), & x\in D_f \text{ 且 } x\notin D_g, \\ g(x), & x\notin D_f \text{ 且 } x\in D_g. \end{cases}$$

(1) 若函数 $f(x)=-2x+3$，$x\geqslant 1$，$g(x)=x-2$，$x\in\mathbf{R}$，写出函数 $h(x)$ 的解析式；

(2) 求问题(1)中函数 $h(x)$ 的最大值；

(3) 若 $g(x)=f(x+\alpha)$，其中 α 是常数，且 $\alpha\in[0,\pi]$，请设计一个定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $y=f(x)$ 及一个 α 的值，使得 $h(x)=\cos 2x$，并予以证明.

分析：(1) 可利用数轴将定义域分为 $x\geqslant 1$ 和 $x<1$ 两部分，分别求出所对应的解析式；(2) 分别求出 $x\geqslant 1$ 和 $x<1$ 时，$h(x)$ 的取值范围，比较得出函数的最大值；(3) 由定义域均为 $\mathbf{R}$，可知 $h(x)=f(x)\cdot f(x+\alpha)=\cos 2\alpha$. 由此可构造 $f(x)$.

解：(1) $h(x)=\begin{cases}(-2x+3)(x-2), & x\in[1,+\infty), \\ x-2, & x\in(-\infty,1),\end{cases}$

即 $h(x)=\begin{cases}-2x^2+7x-6, & x\in[1,+\infty), \\ x-2, & x\in(-\infty,1).\end{cases}$

(2) 当 $x\geqslant 1$ 时，$h(x)=-2x^2+7x-6=-2(x-\frac{7}{4})^2+\frac{1}{8}$，$\therefore h(x)\leqslant\frac{1}{8}$.

当 $x<1$ 时，$h(x)<-1$.

$\therefore$ 当 $x=\frac{7}{4}$ 时，$h(x)$ 取得最大值 $\frac{1}{8}$.

(3) 方法一：令 $f(x)=\sin x+\cos x$，$x\in\mathbf{R}$，$\alpha=\frac{\pi}{2}$，则 $g(x)=f(x+\alpha)=\sin(x+\frac{\pi}{2})+$

$\cos(x+\frac{\pi}{2})=\cos x-\sin x, x\in\mathbf{R}$.

$\therefore h(x)=f(x)\cdot g(x)=f(x)\cdot f(x+\alpha)$
$=(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)=\cos 2x$.

方法二：令 $f(x)=1+\sqrt{2}\sin x, x\in\mathbf{R}, \alpha=\pi$，

则 $g(x)=f(x+\alpha)=1+\sqrt{2}\sin(x+\pi)=1-\sqrt{2}\sin x$.

$\therefore h(x)=f(x)\cdot g(x)=f(x)\cdot f(x+\alpha)=(1+\sqrt{2}\sin x)(1-\sqrt{2}\sin x)=1-2\sin^2 x=\cos 2x$.

探究：求分段函数的解析式，应注意分别求出各区间内的函数关系，再组合在一起，求分段函数的最值，也应先分段求，再合并求出最值.

变式探究

〖变式题〗(2004 年春季上海,21)已知函数 $f(x)=|x-a|$，$g(x)=x^2+2ax+1$（a 为正常数），且函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象在 y 轴上的截距相等.

(1)求 a 的值；

(2)求函数 $f(x)+g(x)$ 的单调递增区间；

(3)若 n 为正整数，证明 $10^{f(n)}\cdot(\frac{4}{5})^{g(n)}<4$.

【案例 2】设定义在$[-2,2]$上的偶函数在区间$[0,2]$上单调递减，若 $f(1-m)<f(m)$，求实数 m 的取值范围.

分析：本题综合考查对函数奇偶性和单调性的理解.

由函数的定义域知$(1-m)\in[-2,2]$，$m\in[-2,2]$，但是$(1-m)$和 m 到底是在$[-2,0]$、$[0,2]$的哪个区域内不十分清楚，若就此讨论，将十分复杂. 如果注意到性质"如果是偶函数，那么 $f(-x)=f(x)=f(|x|)$"，问题解法就可明了.

解：$\because f(x)$是偶函数，

$\therefore f(-x)=f(x)=f(|x|)$，

$f(1-m)<f(m)\Leftrightarrow f(|1-m|)<f(|m|)$.

又当 $x\in[0,2]$时，$f(x)$单调递减，

$$\therefore\begin{cases}|1-m|>|m|,\\-2\leqslant 1-m\leqslant 2,\\-2\leqslant m\leqslant 2.\end{cases}\text{解得}-1\leqslant m<\frac{1}{2}.$$

探究：本题应用了偶函数的一个简单的性质"开口向上时，距离对称轴越近，函数值越小；距离对称轴越远，函数值越大"，从而避免了一场"大规模"的讨论，值得深思.

变式探究

〖变式题〗已知函数 $f(x)$ 是偶函数，其定义域为$(-1,1)$，且在$(0,1)$上为增函数，若 $f(a-2)-f(4-a^2)<0$，试求 a 的取值范围.

【案例 3】设 $a\in\mathbf{R}$，$f(x)=\frac{a\cdot 2^x+a-2}{2^x+1}(x\in\mathbf{R})$是奇函数.

(1)求 a 的值；

(2)判断 $f(x)$的单调性，并证明你的结论；

(3)当 $k>0$ 时，解关于 x 的不等式 $f^{-1}(x)>\log_2\frac{1+x}{k}$；

(4)当 $n\geqslant 3$ 时，比较 $f(n)$与 $g(n)=\frac{n-1}{n+1}$的大小.

分析：(1)若 $f(x)$是奇函数且在 $x=0$ 处有定义，则必有$f(0)=0$，由此可求 a；

(2)可利用定义法或利用导数法证明函数单调性；

(3)先求出 $f^{-1}(x)$，再由函数的单调性解不等式；

(4)可用作差法比较大小.

解：(1)$\because x\in\mathbf{R}$ 且 $f(x)$是奇函数，

$\therefore f(0)=0$，即 $0=\frac{2a-2}{2}$. $\therefore a=1$.

而当 $a=1$ 时，$f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$，有 $f(-x)=\frac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=\frac{1-2^x}{1+2^x}=-f(x)$.

$\therefore f(x)$为奇函数. 故 $a=1$ 为所求.

(2)$f(x)$为 $\mathbf{R}$ 上的增函数.

证法一：任取 x_1、$x_2\in\mathbf{R}$ 且 $x_1<x_2$.

$f(x_1)-f(x_2)=\frac{2^{x_1}-1}{2^{x_1}+1}-\frac{2^{x_2}-1}{2^{x_2}+1}=\frac{2(2^{x_1}-2^{x_2})}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}$,

$\because x_1<x_2$，$\therefore 0<2^{x_1}<2^{x_2}$.

$\therefore 2^{x_1}-2^{x_2}<0$，$2^{x_1}+1>0$，$2^{x_2}+1>0$.

$\therefore f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$.

$\therefore f(x)$为 $\mathbf{R}$ 上的增函数.

证法二：$f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$在 $x\in\mathbf{R}$ 上可导，

$f'(x)=\frac{(2^x-1)'(2^x+1)-(2^x-1)(2^x+1)'}{(2^x+1)^2}$

$=\frac{2^x(\ln2)(2^x+1)-2^x(\ln2)(2^x-1)}{(2^x+1)^2}$

$=\frac{2^x\cdot(\ln2)\times2}{(2^x+1)^2}>0$.

$\therefore f(x)$为$\mathbf{R}$上的增函数.

(3)由$y=\frac{2^x-1}{2^x+1}$,得

$f^{-1}(x)=\log_2\frac{1+x}{1-x}(-1<x<1)$.

$\therefore f^{-1}(x)>\log_2\frac{1+x}{k}$,

即$\log_2\frac{1+x}{1-x}>\log_2\frac{1+x}{k}$.

$\therefore\begin{cases}-1<x<1,\\ \frac{1+x}{1-x}>\frac{1+x}{k}.\end{cases}$解之,得$\begin{cases}-1<x<1,\\ x>1-k.\end{cases}$

$\therefore$当$0<k<2$时,不等式的解集为$\{x|1-k<x<1\}$;

当$k\geqslant2$时,不等式的解集为$\{x|-1<x<1\}$.

(4) $f(n)-g(n)=\frac{2^n-1}{2^n+1}-\frac{n-1}{n+1}=\frac{2(2^n-n)}{(2^n+1)(n+1)}$.

$\because 2^n=(1+1)^n=1+n+\frac{1}{2}n(n-1)+\cdots>n$,

$\therefore f(n)>g(n)$.

探究:本题属于函数性质的综合应用问题,应注意性质的区别与联系.另外,利用导数判断函数的单调性,是近年来高考的热门问题.

变式探究

【变式题】设函数$f(x)=-\frac{x}{1+|x|}(x\in\mathbf{R})$,区间$M=[a,b](a<b)$,集合$N=\{y|y=f(x),x\in M\}$,则使$M=N$成立的实数对$(a,b)$有…( )

A.0个 B.1个 C.2个 D.无穷多个

【案例4】设函数$f(x)$定义在$\mathbf{R}$上,对于任意实数m、n,总有$f(m+n)=f(m)f(n)$,且当$x>0$时,$0<f(x)<1$.

(1)证明$f(0)=1$,且$x<0$时,$f(x)>1$;

(2)证明函数在$\mathbf{R}$上单调递减;

(3)设$A=\{(x,y)|f(x^2)f(y^2)>f(1)\}$,$B=\{(x,y)|f(ax-y+2)=1,a\in\mathbf{R}\}$,若$A\cap B=\varnothing$,确定$a$的取值范围.

分析:本题综合考查灵活运用函数的奇偶性、单调性解题的能力.

(1)用特殊值法;

(2)利用已知等式变形分析;

(3)联系函数的单调性.

证明:(1)令$n=0$,则$f(m+0)=f(m)f(0)$,对于任意实数m恒成立,$\therefore f(0)=1$.

设$x<0$,则$-x>0$,由$f[x+(-x)]=f(x)\cdot f(-x)=1$,得$f(x)=\frac{1}{f(-x)}$.

$\because$当$x>0$时,$0<f(x)<1$,$\frac{1}{f(x)}>1$,

$\therefore x<0$时,$-x>0$,$f(x)=\frac{1}{f(-x)}>1$.

(2)证法一:设$x_1<x_2$,则$x_2-x_1>0$,

$f(x_2)=f[(x_2-x_1)+x_1]=f(x_2-x_1)f(x_1)$.

$\because x_2-x_1>0$,

$\therefore 0<f(x_2-x_1)<1$.

$\therefore f(x_2-x_1)f(x_1)<f(x_1)$.

$\therefore f(x_1)>f(x_2)$,函数为减函数.

证法二:设$x_1<x_2$,则

$f(x_1)-f(x_2)=f(x_1)-f[(x_2-x_1)+x_1]$

$=f(x_1)-f(x_2-x_1)f(x_1)$

$=f(x_1)[1-f(x_2-x_1)]$.

$\because x_2-x_1>0$,

$\therefore 0<f(x_2-x_1)<1$.

$\therefore[1-f(x_2-x_1)]>0$,$f(x_1)>0$.

$\therefore f(x_1)-f(x_2)=f(x_1)[1-f(x_2-x_1)]>0$.

$\therefore f(x_1)>f(x_2)$,函数为减函数.

解:(3) $\because f(x^2)f(y^2)=f(x^2+y^2)>f(1)$,$f(ax-y+2)=1=f(0)$,

$\therefore x^2+y^2<1$,$ax-y+2=0$.

若$A\cap B=\varnothing$,则圆心$(0,0)$到直线的距离应满足$d=\frac{2}{\sqrt{a^2+1}}\geqslant1$,解之得$a^2\leqslant3$.

$\therefore -\sqrt{3}\leqslant a\leqslant\sqrt{3}$.

探究:对于函数单调性的证明是中学数学证明中的基本问题,必须按定义的方法来证,本题第(2)问的应用及变换技巧值得同学们思考.

变式探究

【变式题1】$f(x)$是定义在$(0,+\infty)$上的增函数,且$f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$.

(1)求$f(1)$的值;

(2)若$f(6)=1$,解不等式$f(x+3)-f(\frac{1}{x})<2$.

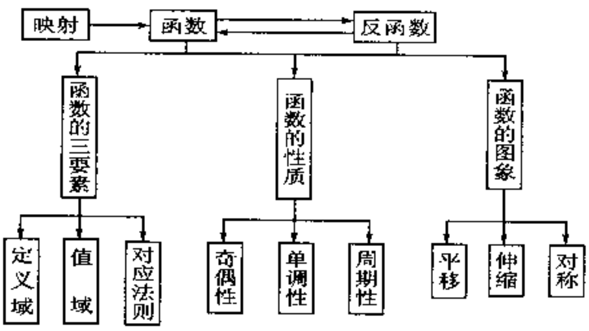
〖变式题 2〗已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的不恒为零的函数，且对任意 $a、b\in\mathbf{R}$ 都满足 $f(a\cdot b)=af(b)+bf(a)$.

(1)求 $f(0)、f(1)$ 的值；

(2)判断 $f(x)$ 的奇偶性，并证明你的结论.

知识归纳

一、知识网络



二、知识归纳

(一)函数的基本概念

1. 函数是一种特殊的映射 $f:A\to B$，必须满足：

(1)$A、B$ 都是非空数集；

(2)集合 A 中的每一个元素都有象(其象的集合是 B 的子集).

2. 构成函数的三要素——定义域、值域、对应法则(解析式)中，最重要的是两大独立要素定义域和对应法则，值域是由定义域和对应法则确定的. 两个函数当且仅当定义域和对应法则都相同时，才是相同的函数，因此，判断两个函数是否为同一个函数，不仅要看函数的表达式化简后是否相同，还要注意定义域、值域是否相同，也可用图象来判断.

3. 掌握函数的三种表示法——列表法、解析法和图象法.

若函数在其定义域的不同子集上，对应法则分别不同或用几个不同式子来表示，这种形式的函数叫做分段函数.

4. 若 y 是 u 的函数，u 又是 x 的函数，即 $y=f(u)$，$u=g(x)$，$u\in(m,n)$，$x\in(a,b)$，那么 y 关于 x 的函数 $y=f[g(x)]$ 叫做 f 和 g 的复合函数，u 叫做中间变量，u 的取值范围是 $g(x)$ 的值域.

5. 定义域是函数的灵魂，基本上可分为自然定义域与限定定义域两类：

(1)如果只给函数的解析式(不注明定义域)，其定义域应为使解析式有意义的自变量的取值范围，称为自然定义域；

(2)如果函数受应用条件或附加条件所制约，其定义域称为限定定义域.

定义域经常作为基本条件(或工具)出现在高考试题中，通过函数性质或函数应用来考查，具有隐蔽性，不为人们所注意，即主要求限定定义域. 所以在解决函数问题时，必须树立起“定义域优先”的观点，以先分析定义域来帮助解决问题. 求函数的定义域，主要涉及以下几种：

①分式的分母不得为零.

②偶次方根的被开方式，其值非负.

③对数函数的底数 $a>0$ 且 $a\neq1$，真数必须大于零.

④函数 $y=x^0$ 中，$x\neq0$.

⑤$y=\tan x$，$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$；$y=\cot x$，$x\neq k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$.

⑥对于复合函数求定义域问题，其一般步骤是：若已知 $f(x)$ 的定义域为 $[a,b]$，其复合函数 $f[g(x)]$ 的定义域应由不等式 $a\leqslant g(x)\leqslant b$ 解出即得.

6. 求函数的值域是一个较复杂的问题，也是很重要的问题(因为它和求函数的最值紧密相连)，在历届高考试题中经常出现，应引起重视. 首先要明确其定义域，由定义域通过对应法则求其值域. 常用的求法有：

(1)配方法：是求二次函数值域的最基本的方法，如 $F(x)=af^2(x)+bf(x)+c(a\neq0)$ 的函数的值域问题，均可用配方法.

(2)反函数法：利用函数和它的反函数的定义域和值域的关系，通过求反函数的定义域而得到原函数的值域.

形如求函数 $y=\frac{cx+d}{ax+b}(a\neq0)$ 的值域.

(3)判别式法：把函数转化成关于 x 的二次方程 $F(x,y)=0$，通过方程有实根，判别式大于等于 0，从而求得原函数的值域.

形如求函数 $y=\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}(a、d$ 不同时为零$)$ 的值域.

(4)换元法：运用代数或三角代换，将所给函数

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

转化成值域容易确定的另一函数，从而求得原函数的值域.

形如求函数 $y=ax+b+\sqrt{cx+d}$(a、b、c、d 均为常数)的值域.

(5)不等式法：利用基本不等式 $a+b\geqslant 2ab$、$a+b+c\geqslant 3abc$ 求函数值域时，要注意条件"一正，二定，三相等".

(6)函数的单调性法：确定函数在定义域(或某个定义域的子集上)的单调性质求出函数的值域，形如：求函数 $y=x+\frac{k}{x}(k>0)$ 的值域($0<|x|<\sqrt{k}$ 时为减函数；$|x|>\sqrt{k}$ 时为增函数).

(7)数形结合法：利用函数所表示的几何意义，借助于几何方法来求函数的值域.

7. 求函数的解析式，有三种情况：

(1)已知函数类型(如一次函数、二次函数等)，一般用待定系数法设出函数的解析式，然后根据条件求解.

(2)已知函数满足某种关系(对定义域内的自变量总成立)，用代换法求解函数的解析式.

(3)根据实际意义(如面积、距离等)总结函数的解析式，注意定义域的特殊值.

另外，在求函数的解析式时要注意：

①对于分段函数应分别求出各区间内的函数关系，再组合在一起，注意各区间的点既不重复，也不遗漏.

②关于复合函数的表达式问题，要特别注意内层函数的值域落在外层函数定义域的哪一段内，进而选择相应的表达式计算.

(二)反函数的概念

1. $y=f(x)$ 的定义域为 A，它有反函数必须满足：A 中的每一个 x 与其函数值的对应是"一一对应"的，不允许两个(或多个) x 有同一个函数值. 如函数 $y=x^2$ 没有反函数.

2. 求一个函数 $y=f(x)(x\in A)$ 的反函数的一般步骤：

(1)求函数 $y=f(x)$ 的值域；

(2)由 $y=f(x)$ 求出 $x=f^{-1}(y)$；

(3)x、y 位置互换得到 $y=f^{-1}(x)$；

(4)确定反函数的定义域(即原函数的值域)，并注明.

3. 反函数的定义域是原函数的值域，必须通过求原函数的值域得到.

4. $f^{-1}(a)=b\Leftrightarrow f(b)=a$ 要善于利用之.

5. 分段函数的反函数求法是先分段求解，再合并.

(三)函数的奇偶性

1. 判断函数的奇偶性，必须严格依照函数的奇偶性定义进行，为了便于判断，常应用定义的等价形式 $f(-x)=\pm f(x)\Leftrightarrow f(-x)\pm f(x)=0\Leftrightarrow\frac{f(-x)}{f(x)}=\pm 1$ $(f(x)\neq 0)$，即定义的互逆性进行判断.

2. 奇函数的图象关于原点对称，偶函数的图象关于 y 轴对称，反之亦真，因此也可利用函数图象的对称性去判断函数的奇偶性.

3. 奇函数、偶函数的定义域关于原点对称，即函数的奇偶性与区间密切相关. 如 $y=x^2$ 在 $\mathbf{R}$ 上是偶函数，但在区间 $[-1,2]$ 上却无奇偶性可言，可见函数奇偶性是函数的整体性质，一点不满足都不能判断是奇函数或偶函数，定义在数轴上所对应的区间关于原点对称，只是函数为奇函数或偶函数的必要条件而已.

4. 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-a,a](a>0)$，则"$f(0)=0$"是 $f(x)$ 为奇函数的必要而不充分条件；若函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-a,0)\cup(0,a](a>0)$，则"$f(x)=0$"既不是 $f(x)$ 为奇函数的充分条件，也不是必要条件.

5. 奇函数的图象关于原点对称，偶函数的图象关于 y 轴对称，反之亦真，因此也可利用函数图象的对称性去判断函数的奇偶性.

6. 在公共定义域上，两个奇函数(或偶函数)的和、差仍为奇函数(偶函数)，两个奇函数(偶函数)的积、商为偶函数.

7. 函数 $f(x)$ 与函数 $af(x)$、$\frac{1}{f(x)}$ 有相同的奇偶性.

8. 非零常数函数 $f(x)=a(a\neq 0)$ 是偶函数；常数函数 $f(x)=0$ 既是奇函数又是偶函数.

(四)函数的单调性

1. 函数单调性的定义：对给定区间 D 上的任意 x_1、x_2，如果 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)<f(x_2)$ $[f(x_1)>f(x_2)]$，则函数 $f(x)$ 为这个区间 D 上的递增(减)函数.

这个定义有如下两种等价形式：

设 x_1、$x_2\in[a,b]$，那么

(1)$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0(<0)\Leftrightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是增(减)函数；

(2) $(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0(<0)\Leftrightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是增(减)函数.

几何意义:增(减)函数图象上任意两点 $(x_1,f(x_1))$、$(x_2,f(x_2))$ 连线的斜率都大于(小于)0.

2. 在利用定义证明函数的单调性时,一般采用如下步骤:

(1)在给定的区间内任取两值 x_1、x_2;

(2)取差 $f(x_1)-f(x_2)$,因式分解或配方;

(3)判断每个因式的符号,确定差的符号;

(4)说明函数的单调性.

3. 掌握并熟记一次函数、二次函数、反比例函数、指数函数、对数函数等函数的单调性,将大大缩短判断函数单调性的过程.

(五)函数的周期性

1. 设 a 是非零常数,对于函数定义域内的一切 x,如果总有 $f(x+a)=f(x)$ 成立,则函数 $f(x)$ 是周期函数,且其一个周期为 $T=a$.

2. 周期函数的性质:

(1)如果总有 $f(x+a)=f(x)$ 成立,则函数是周期函数,且它的一个周期为 $T=a$;

(2)如果总有 $f(x+a)=f(x-a)$ 成立,则函数是周期函数,且 $T=2a$ 是它的一个周期.

思维拓展

1. 在理解函数单调性时,应注意以下几个问题:

(1)单调性是函数的一个局部性质,一个函数在不同的区间上可以有不同的单调性.

(2)函数的单调区间是定义域的子集,定义中的 x_1、x_2 相对于单调区间具有任意性,不能用特殊值代替.

(3)函数的单调性使得自变量的不等关系和函数之间的不等关系可以"正逆互推".

(4) $f(x)$ 在区间 D_1、D_2 上是增函数,但不一定在区间 $D_1\cup D_2$ 上是增函数;同样在区间 D_1、D_2 上是减函数,但不一定在区间 $D_1\cup D_2$ 上是减函数.例如函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 上是减函数,在 $(0,+\infty)$ 上也是减函数,但在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上不是减函数.

2. 判断函数单调性的常用方法:

(1)定义法.

(2)利用导数研究函数单调性.

设函数 $y=f(x)$ 在某个区间内可导,若 $f'(x)>0$,则 $f(x)$ 为增函数;若 $f'(x)<0$,则 $f(x)$ 为减函数.

求可导函数单调区间的一般步骤和方法:

①确定函数 $f(x)$ 的定义区间.

②求 $f'(x)$,令 $f'(x)=0$,解此方程,求出它在定义区间内的一切实根.

③把函数 $f(x)$ 的间断点〔即 $f(x)$ 的无定义点〕的横坐标和上面的各实根按由小到大的顺序排列起来,然后用这些点把函数 $f(x)$ 的定义区间分成若干个小区间.

④确定 $f'(x)$ 在各小开区间内的符号,根据 $f'(x)$ 的符号判定函数 $f(x)$ 在每个相应小开区间内的增减性.

(3)两个增(减)函数的和仍为增(减)函数;一个增(减)函数与一个减(增)函数的差是增(减)函数.

(4)奇函数在对称的区间上有相同的单调性;偶函数在对称的区间上有相反的单调性.

(5)互为反函数的两个函数有相同的单调性.

(6)如果函数在区间上是增(减)函数,那么函数在区间的任意一个子集上也是增(减)函数.

(7)如果 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的单调性相同,那么 $y=f[g(x)]$ 是增函数;

如果 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的单调性相反,那么 $y=f[g(x)]$ 是减函数.

(8)图象法.

3. 反函数有以下性质:

(1)奇偶性:定义域为非单元素集的偶函数不存在反函数,是奇函数且在其定义域上单调的函数,必有反函数,且反函数也是奇函数.

(2)单调性:若函数 $y=f(x)$ 是增(减)函数,则其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 也是增(减)函数.

(3)对称性:函数 $y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 的图象,在同一坐标系中关于 $y=x$ 对称.

(4)还原性: $f^{-1}[f(x)]=x(x\in A)$,

$f[f^{-1}(y)]=y\ (y\in B)$.

(5)周期函数不存在反函数.

创新训练

一、基础过关

1. (2005年江苏省盐城中学二模)已知函数 $f(x)$ 的值域为 $[-2,3]$,则函数 $f(x-2)$ 的值域是 (　　)

A. $[-4,1]$　　B. $[0,5]$

C. $[-4,1]\cup[0,5]$　　D. $[-2,3]$

2. 设 $f(x)=1+5x-10x^2+10x^3-5x^4+x^5$,则 $f(x)$ 的反函数的解析式是 …………………… (　　)

A. $f^{-1}(x)=1+\sqrt[5]{x}$

B. $f^{-1}(x)=1+\sqrt[5]{x-2}$

C. $f^{-1}(x)=-1+\sqrt[5]{x-2}$

D. $f^{-1}(x)=1-\sqrt[5]{x-2}$

3. 函数 $f(x)=x^2-2ax-3$ 在区间$[1,2]$上单调的充要条件是 …………………………………（　）

A. $a\in(-\infty,-1]$

B. $a\in[2,+\infty)$

C. $a\in[1,2]$

D. $a\in(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$

4.（2005 年高考湖北卷，理 6）在 $y=2^x$，$y=\log_2 x$，$y=x^2$，$y=\cos 2x$ 这四个函数中，当 $0<x_1<x_2<1$ 时，使 $f(\frac{x_1+x_2}{2})>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 恒成立的函数的个数是 ……………………………………（　）

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

5. 设函数 $y=f(x+1)$ 的定义域是$[0,2]$，且 $f(x+1)=|x-1|$，则 $y=f(x)$ 的单调递减区间是 …（　）

A. $[-1,1]$　　B. $[1,2]$

C. $[0,2]$　　D. $[-1,2]$

6. 函数 $y=f(x)$ 在 $(0,2)$ 上是增函数，函数 $y=f(x+2)$ 是偶函数，则有 ……………………（　）

A. $f(1)<f(2.5)<f(3.5)$

B. $f(3.5)<f(1)<f(2.5)$

C. $f(3.5)<f(2.5)<f(1)$

D. $f(2.5)<f(1)<f(3.5)$

7.（2005 年高考湖南卷，14）设函数 $f(x)$ 的图象关于点$(1,2)$对称，且存在反函数 $f^{-1}(x)$，$f(4)=0$，则 $f^{-1}(4)=$______.

8. 设函数 $y=f(x+1)$ 为偶函数，若 $x\leqslant 1$ 时，$y=x^2+1$，则当 $x>1$ 时，$y=$______.

二、能力提高

9.（2005 年高考浙江卷，文 20）已知函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象关于原点对称，且 $f(x)=x^2+2x$.

(1)求函数 $g(x)$ 的解析式；

(2)解不等式 $g(x)\geqslant f(x)-|x-1|$；

(3)若 $h(x)=g(x)-\lambda f(x)+1$ 在$[-1,1]$上是增函数，求实数 λ 的取值范围.

10. 定义在$(-1,1)$上的函数 $f(x)$，①对任意 x、$y\in(-1,1)$都有 $f(x)+f(y)=f(\frac{x+y}{1+xy})$；②当 $x\in(-1,0)$时，$f(x)>0$.

(1)判断 $f(x)$ 在$(-1,1)$上的奇偶性，并说明理由；

(2)判断函数 $f(x)$ 在$(0,1)$上的单调性，并说明理由；

(3)若 $f(\frac{1}{5})=\frac{1}{2}$，试求 $f(\frac{1}{2})-f(\frac{1}{11})-f(\frac{1}{19})$ 的值.

三、探索创新

11. 已知函数 $f(x)$ 对任意的整数 x、y 均有 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$，且 $f(1)=1$.

(1)当 $t\in\mathbf{Z}$，用 t 的代数式表示 $f(t+1)-f(t)$；

(2)当 $t\in\mathbf{Z}$，求 $f(t)$ 的解析式；

(3)如果 $x\in[-1,1]$，$a\in\mathbf{R}$，且 $[f(1)]^{\frac{x}{2}}+[f(2)]^{\frac{x}{2}}+\cdots+[f(2005)]^{\frac{x}{2}}>[f(2006)]^{\frac{x}{2}}\cdot a$ 恒成立，求 a 的取值范围.

12. 已知函数 $f(x)=\frac{2a+1}{a}-\frac{1}{a^2x}$，常数 $a>0$.

(1)设 $mn>0$，证明函数 $f(x)$ 在$[m,n]$上单调递增；

(2)设 $0<m<n$ 且 $f(x)$ 的定义域和值域都是$[m,n]$，求 $n-m$ 的最大值.

第二课时　二次函数、指数函数、对数函数

问题导考

1. 联合国发布的全球人口预测报告指出，人口出生率的细微变化都将对全球人口产生极大的影响，预测人口的变化趋势有多种方法，最常用的是"直接推算法"，使用的公式是 $P_n=P_0(1+k)^n$（k 为常数，$k>-1$），其中 P_n 为预测期内 n 年后人口数，P_0 为初期人口数，k 为预测期内年增长率，如果 $-1<k<0$，请你预测一下，这期间，人口数的变化趋势如何？

2. 若 $f(x)$ 表示 x 的父亲，$g(x)$ 表示 x 的母亲，$h(x)$ 表示 x 的姐姐，$t(x)$ 表示 x 的哥哥.

(1)要想用以上的关系表示李强同学的外公，能做到吗？

(2)你认为 $f[g$(张军)$]$ 与 $g[f$(张军)$]$ 表示的是张军的同一位亲人吗？

(3)能用以上关系表示你家庭里的成员吗？不妨试一试.

案例探究

【案例 1】设二次函数 $f(x)$ 满足 $f(x-2)=f(-x-2)$，且图象在 y 轴上的截距为 1，被 x 轴截得的线段长为 $2\sqrt{2}$，求 $f(x)$ 的解析式.

分析：设出二次函数的一般形式 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$，然后根据条件求出待定的系数 a、b、c.

解：方法一：设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$，

由 $f(x-2)=f(-x-2)$，得 $4a-b=0$.　①

又 $|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=2\sqrt{2}$，

$\therefore b^2-4ac=8a^2$.　②

由已知 $c=1$.　③

由①②③解得 $b=2, a=\frac{1}{2}, c=1$，

$f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+1$.

方法二：$f(x-2)=f(-x-2)$，即 $f(-2+x)=f(-2-x)$，故 $y=f(x)$ 的图象有对称轴 $x=-2$，可设 $y=a(x+2)^2+k$.

$\because$ 图象在 y 轴上的截距为 1，则 $4a+k=1$.　①

$\because$ 被 x 轴截得的线段长为 $2\sqrt{2}$，

则 $|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=2\sqrt{2}$，

整理得 $2a+k=0$.　②

联立①②解之，得 $a=\frac{1}{2}, k=-1$，

$f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+1$.

方法三：$\because y=f(x)$ 的图象有对称轴 $x=-2$，

又 $|x_1-x_2|=2\sqrt{2}$，

$\therefore y=f(x)$ 与 x 轴的交点为 $(-2-\sqrt{2},0)$，$(-2+\sqrt{2},0)$.

$\therefore$ 故可设 $y=a(x+2+\sqrt{2})\cdot(x+2-\sqrt{2})$.

$f(0)=1, a=\frac{1}{2}$，

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+1$.

探究：本题用待定系数法求函数解析式，适用于已知函数类型求函数解析式的题目，一般情况是由题设条件设出方程，再待定系数. 从本题可以看出：

(1)若函数满足 $f(a+x)=f(a-x)$，则其图象关于直线 $x=a$ 对称；

(2)二次函数与 x 轴的交点一定关于直线 $x=a$ 对称；

(3)若二次函数 $ax^2+bx+c=0$ 有两根 x_1、x_2，则方程一定可分解为 $a(x-x_1)(x-x_2)=0$.

同样，若二次函数在 x 轴上的截距为 x_1、x_2，则函数一定可设为 $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$，这由曲线的方程可以理解. 比较本题的三种方法，方法三较为简洁.

变式探究

【变式题】已知函数 $f(x)=x^2$，$g(x)$ 为一次函数，且一次项系数大于零，若 $f[g(x)]=4x^2-20x+25$，求 $g(x)$ 的表达式．

【案例 2】已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 满足 $f(1)=0$．

(1)若 $a>b>c$，证明 $f(x)$ 的图象与 x 轴有两个交点，且这两个交点间的距离 d 满足不等式 $\frac{3}{2}<d<3$；

(2)设 $f(x)$ 在 $x=\frac{t+1}{2}$（$t>0$ 且 $t\neq1$）处取得最小值，且对任意实数 x，等式 $f(x)g(x)+a_nx+b_n=x^{n+1}$〔其中 $n\in\mathbf{N}^*$，$g(x)$ 为关于 x 的多项式〕都成立，试用 t 表示 a_n 和 b_n．

分析：(1)$x=1$ 为方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根，另一个根为 $\frac{c}{a}$，则 $d=|1-\frac{c}{a}|$，利用 a、b、c 的关系可得 d 的取值范围．

(2)建立 a_n 和 b_n 的关系式．

证明：(1)$f(1)=0$，$\therefore a+b+c=0$．

$\because a>b>c$，$\therefore a>0$，$c<0$，$ac<0$．

$\therefore b^2-4ac>0$，即 $f(x)$ 的图象与 x 轴有两个交点．

令 $f(x)=0$，即 $ax^2+bx+c=0$．　①

显然 $x=1$ 为方程①的一个根，由根与系数的关系知，方程①的另一个根为 $\frac{c}{a}$，$\therefore d=|1-\frac{c}{a}|$．

$\because \frac{c}{a}<0$，$\therefore d=1-\frac{c}{a}$．

$\because a>b>c$，$b=-a-c$，$\therefore a>-a-c>c$．

$\therefore \frac{c}{a}<-1-\frac{c}{a}<1$．解得 $-2<\frac{c}{a}<-\frac{1}{2}$．

$\therefore \frac{3}{2}<1-\frac{c}{a}<3$，即 $\frac{3}{2}<d<3$．

解：(2)$\because f(x)$ 在 $x=\frac{t+1}{2}$（$t>0$ 且 $t\neq1$）处取最小值，

$\therefore x=\frac{t+1}{2}$ 是二次函数 $f(x)$ 的对称轴方程．

由 $f(x)$ 图象的对称性及 $f(1)=0$ 可知 $f(t)=0$．

令 $x=1$，得 $a_n+b_n=1$．　②

令 $x=t$，得 $ta_n+b_n=t^{n+1}$．　③

联立②③，得 $a_n=\frac{t^{n+1}-1}{t-1}$，$b_n=\frac{t-t^{n+1}}{t-1}$．

探究：(1)本题考查二次函数的图象及对称轴以及不等式等有关知识．

(2)在解决有关二次函数问题时，应充分利用图象．

变式探究

【变式题】已知函数 $f(x)=x^2-1(x\leqslant0)$，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=f^{-1}(a_{n-1}^2)(n\geqslant2)$，且 $a_1=-1$．

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)若数列 $\{b_n\}$ 的通项 $b_n=\frac{1}{a_{n+1}+a_n}$，$\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，试比较 S_n 和 $\frac{2}{3}a_n$ 的大小．

【案例 3】已知函数 $f(x)=\log_a(a^x-1)$（$a>0$ 且 $a\neq1$）．

(1)证明函数 $f(x)$ 的图象在 y 轴的一侧；

(2)设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$（$x_1<x_2$）是 $f(x)$ 图象上的两点，证明直线 AB 的斜率大于 0；

(3)求函数 $y=f(2x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图象的交点坐标．

分析：(1)分 $a>1$ 和 $0<a<1$ 两类去证；

(2)要证 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}>0$，可结合函数单调性去证；

(3)求两函数图象交点坐标可转化为解方程 $f(2x)=f^{-1}(x)$．

证明：(1)$\because a^x-1>0$，$\therefore a^x>1$．

当 $a>1$ 时，$x>0$；

当 $0<a<1$ 时，$x<0$．

故 $a>1$ 时，$f(x)$ 的图象在 y 轴右侧；

当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 的图象在 y 轴左侧．

(2)当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 是增函数，设 $0<x_1<x_2$，则 $1<a^{x_1}<a^{x_2}$．

$\therefore 0<a^{x_1}-1<a^{x_2}-1$．

故 $\log_a(a^{x_1}-1)<\log_a(a^{x_2}-1)$，即 $y_1<y_2$．

当 $0<a<1$ 时，$y=a^x$ 是减函数．

设 $x_1<x_2<0$，则 $a^{x_1}>a^{x_2}>1$．

$\therefore a^{x_1}-1>a^{x_2}-1>0$．

故 $\log_a(a^{x_1}-1)<\log_a(a^{x_2}-1)$．即 $y_1<y_2$．

$\therefore$ 无论 $a>1$ 还是 $0<a<1$，当 $x_1<x_2$ 时，总

有 $y_1<y_2$.

故直线 AB 的斜率 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}>0$.

解:(3) ∵ $f^{-1}(x)=\log_a(a^x+1)$，求函数 $y=f(2x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图象交点坐标，即解方程 $f(2x)=f^{-1}(x)$，即 $\log_a(a^{2x}-1)=\log_a(a^x+1)$.

方程等价于 $\begin{cases}a^{2x}-1=a^x+1,\\ a^{2x}-1>0.\end{cases}$ 解得 $a^x=2$.

∴ $x=\log_a 2$.

∴ 函数 $y=f(2x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图象的交点坐标为 $(\log_a 2,\log_a 3)$.

探究:本题是一道综合性较强的题目，对于含参数的指数、对数问题，在应用单调性时，要注意对底数进行讨论. 解决对数问题时，首先要考虑定义域.

变式探究

【变式题】已知函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图象上有两点 $A_1(m_1,y_1)$、$A_2(m_2,y_2)$ 满足 $a^2+(y_1+y_2)a+y_1y_2=0$.

求证:(1)存在 $i\in\{1,2\}$，使 $y_i=-a$;

(2)抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴总有两个不同的交点;

(3)若使图象与 x 轴交点为 $(x_1,0)$、$(x_2,0)(x_1<x_2)$，则存在 $i\in\{1,2\}$，使 $x_1<m_i<x_2$.

【案例4】已知函数 $f(x)$ 满足 $f(\log_a x)=\frac{a}{a^2-1}(x-x^{-1})$，其中 $a>0$，且 $a\neq 1$.

(1) 对于函数 $f(x)$，当 $x\in(-1,1)$ 时，$f(1-m)+f(1-m^2)<0$，求实数 m 值的集合;

(2)当 $x\in(-\infty,2)$ 时，$f(x)-4$ 的值恒为负数，求 a 的取值范围.

分析:本题综合考查对数函数性质和函数性质的关系.

先求出函数的解析式，再转化为可比较的函数，利用函数单调性来解.

解:令 $\log_a x=t(t\in\mathbf{R})$，则 $x=a^t$.

∵ $f(t)=\frac{a}{a^2-1}(a^t-a^{-t})$,

∴ $f(x)=\frac{a}{a^2-1}(a^x-a^{-x})(x\in\mathbf{R})$,

即易证 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是递增的奇函数.

(1)由 $f(1-m)+f(1-m^2)<0$，及 $f(x)$ 为奇函数，得 $f(1-m)<f(m^2-1)$.

再由 $f(x)$ 的单调性及定义域，

得 $-1<1-m<m^2-1<1$，解得 $1<m<\sqrt{2}$.

(2)∵ $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，

∴ $f(x)-4$ 在 $\mathbf{R}$ 上也是增函数.

由 $x<2$，得 $f(x)<f(2)$.

要使 $f(x)-4$ 在 $(-\infty,2)$ 上恒为负数，只需 $f(2)-4\leqslant 0$，即 $\frac{a}{a^2-1}(a^2-a^{-2})-4\leqslant 0$，解得 $2-\sqrt{3}\leqslant a\leqslant 2+\sqrt{3}$.

探究:本题是在得到 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是递增的奇函数的前提下，利用函数的性质分析求解;在 $\mathbf{R}$ 上是递增的奇函数这一结论，应该能轻松得到.

当 $a>1$ 时，$\frac{a}{a^2-1}>0$，a^x 为增函数，$-a^{-x}$ 为增函数，则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是递增的奇函数;

当 $0<a<1$ 时，$\frac{a}{a^2-1}<0$，a^x 为减函数，$-a^{-x}$ 为减函数，则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是递增的奇函数.

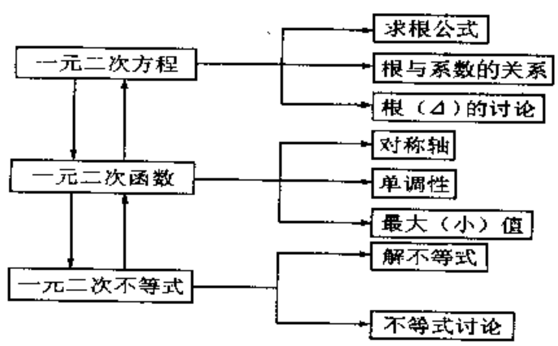
变式探究

【变式题】已知函数 $f(x)=x^2+bx+c$ 为偶函数，如果点 (x,y) 在函数 $f(x)$ 的图象上，且点 (x,y^2+1) 在函数 $g(x)=f[f(x)]$ 的图象上，设 $F(x)=g(x)-\lambda f(x)$，问:是否存在实数 λ，使 $F(x)$ 在 $(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$ 上为减函数，且在 $[-\frac{\sqrt{2}}{2},0]$ 上为增函数? 并说明理由.

知识归纳

一、知识网络

1. 二次函数



此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com