蘇俄教育科學院

初等數學全書

函數和極限

分析基礎

第一册

В. Л. 崗恰羅夫著
何旭初 唐述釗譯

商務印書館

序

呈獻給讀者的"初等數學全書"的第三卷,是這套書中最大的一卷,這套書系統地研究了數學科學中的一些基本內容,中學中的算術、代數學和部分的三角學教程就是以這些內容爲基礎而建立的。頭兩卷的材料主要是限於就字面的本意來講的算術與代數的問題,如研究數、數的推廣、對於數的運算(所指的是代數運算:加法、減法、乘法和除法)以及代數方程式,而第三卷則是致力於分析的問題,即,函數和極限的問題除了研究初等函數與詳細地敍述極限理論之外,在這裏也講了微積分學和級數理論的最基本知識以及關於複變函數的知識。

在普通中學裏早已觸及到導數和積分的概念;不論對於把這兩概念實際上包含到中學教學大綱中的問題怎樣看待,在近代的科學水準下,要對數學科學的初等基礎作任何稍滿人意的完備敍述,沒有這些概念是不行的。

至於說到複變函數,在中學教學大綱中不可能也不必要系統地去引進它,甚至在最近的將來也是如此。但是初等函數是確定於整個複平面內(可能有某些定點要除外)的解析函數——因而只有在把它們當複變函數來考慮時才能完全了解這些函數的全部性質和它們之間的關係——這一基本事實就已說明在本書中包含了解析函數的一個短章是適宜的。

編者。

目　　錄

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbo

第一章　初等函數與方程式圖形的一般知識

§1. 初等函數

數學中所研究的直接對象便是數和施於它們的運算。而數的概念和運算的概念都可以無限制地擴大和推廣。在這本書裏，如果沒有預先聲明的話，所說到的只是實數，而在前三章中所說到的主要是在初等數學中所學的，因而叫做是初等的那些運算。這裏首先要談到的便是代數運算：加法，減法，乘法和除法。其次是任意次的乘方和任意次的開方，以任意正數爲底的對數，以及最後，由所給的斜度去構成六個三角函數（正弦、餘弦、正切、餘切、正割和餘割），以及所謂反函數（反正弦、反餘弦等）。

所舉運算，視情況而定，都可以按這種或那種預先指出的順序施之於所給的數或表數的文字（變量）。我們將假定，至少在一、二兩章中所施運算的次數都是有限的。計算的結果可以用某一個新的字母來表示；同時，參與計算的那些字母依確定的次序用逗點分開而置於括號中。例如：

$$v=u^{\operatorname{tg} u}, \tag{1}$$

或

$$f(t)=\frac{2t}{t^2+1}, \tag{2}$$

或

$$F(x,y)=x^2+y^2-25. \tag{3}$$

如此所得的算式或公式，凡能够依賴於所含（即參與計算的）諸量的數值而取某些數值者，就稱爲這些量的**初等函數**。

包含在所給公式中的"變"量叫做自變量，函數本身叫做因變量。

函數的記號如像 $f(t)$ 或 $F(x,y)$ 尤其適宜於下面的情况：不論量 c,a,b 自身表示什麼——數或者新的文字式——都用 $f(c)$ 或 $F(a,b)$ 來表示以 c 代 t 或以 a 代 x 而以 b 代 y 所得的結果。於是，由關係式(2)和(3)得：

$$f(3)=\frac{2\times 3}{3^2+1}=\frac{3}{5}, \qquad f(1)=\frac{2\times 1}{1^2+1}=1;$$

$$F(6,7)=6^2+7^2-25=60,\ F(4,3)=4^2+3^2-25=0,$$

完全一樣，

$$f\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{2\times\frac{m}{n}}{\left(\frac{m}{n}\right)^2+1}=\frac{2mn}{m^2+n^2}, \quad f(-t)=\frac{2(-t)}{(-t)^2+1}=-\frac{2t}{t^2+1},$$

$$F(px,qy)=(px)^2+(qy)^2-25=p^2x^2+q^2y^2-25.$$

如果自變量不在括號內寫出來(這有它簡便的優點)，那末在置換時書寫必然就複雜了；例如，關係式(1)給出：

$$[v]_{u=\pi}=\pi^{\operatorname{tg}\pi}=1,$$

或者用話來說："當 $u=\pi$ 時，量 v 具有值 1"。

讀者對於作爲自變量的數值與因變量的數值之間的對應關係的(一個自變量的)函數定義無疑是熟悉的。

如果對於變量 x (在某一個區間之內) 的每一個值，都有變量 y 的一個確定的值與之對應的話，便稱 y 是 x 的函數。

函數定義的這種普遍的形式，爲 H. И. 羅伯切夫斯基在 1834 年用下面的話所給出[1]：

"這個一般的概念(函數——編者)要求，把對於每個 x 所給出並同時隨之逐漸改變的量叫做 x 的函數。函數的值可以或者用解析表達式給出，或者用某一條件給出，這條件能給我們以考察所有的數而從其中選取一個的方法；或是，末了，這種依賴關係祇是存在而尚未知道"。

說到"對應"(或"對照"，有時也說成"相應")，我們並不想深究藉以確立對應關係的那個

[1] H. И. 羅伯切夫斯基全集卷 V，43 頁，蘇聯國家技術圖書出版局。

規則的性質，重要的僅是要指出這樣一種規則。

特別，對應規則可能具有"經驗的"性質；例如，假使說溫度是時間的函數，那末，這規則便是在指定的時刻去確定溫度計的度數。

在講授初等數學時，帶有"運算"或"解析"性質的那些函數具有特別重要的（即使不是非常的）意義：它表明，按照規定的順序把哪些數學運算施之於 x 的值以求得 y 的值。

沒有根據把單值解析表達式的概念和作爲對應關係的函數概念對立起來：前者是後者的特殊情形[1]。

當作解析表達式的函數概念在十八世紀的前半紀就已經形成。伯努利(1718 年)和歐拉(1748 年)就曾那樣來定義函數。後者提出了下面的定義：

"變量的函數就是由這變量和數或者常量用任何方法所構成的解析表達式"。

然而，對歐拉的定義應當指出：

1）"所允許的"運算的界限不很明顯；

2）沒有除去包含有無限多個運算的公式。

初等函數的精確定義（依近代的意義）係依賴於作爲對應關係的函數概念，現在把它敍述出來：

如果一個函數的值可以藉助於有限次的初等運算由常數和自變數的值來求得的話，這函數便叫做一個初等函數。

在第四章中便舉有非初等函數的具體的例子。在那裏也指出了求得它們的最自然的方法(參看 § 49)。

前述作爲對應關係的函數概念在這本書裏我們要經常使用。但是暫時我們却要求讀者，如果講到函數，所指的就是在教學過程當中必定會遇到的那些初等函數。

以後(在第一到第四章)所考慮的變量的個數只限於兩個：爲了劃一起見，用字母 x 和 y 來表示它們。

設給定了一個形式如

$$F(x,y)=0 \tag{4}$$

---

[1] 這兩種函數概念（狹義的和廣義的）用下列二法之一便可以使它們接近或者甚至於統一起來；

a）去確定非常廣泛的各類函數關係都具有解析表達式（參看，例如第四章 §49 維爾斯特拉斯定理）；

б）把從自變量的數值到對應的（藉助於函數對應關係）因變量的數值的過程當作是一種數學運算。

的方程式，這裏 $F(x,y)$ 是變量 x 和 y 的任何一個初等函數[1]。我們假定 x_0 和 y_0 是任意二數。如果用 x_0 代 x，用 y_0 代 y 時[2]這方程便被滿足了，卽，它的左端變成等於零了，

$$F(x_0,y_0)=0,$$

那末，數偶 (x_0,y_0) 便是所給方程的解(解中的一個)。函數 $F(x,y)$ 可能是這樣的，方程式 $F(x,y)=0$ 根本就沒有解［例如，當 $F(x,y)=\frac{1}{x+y}$ 或 $F(x,y)=2^{x-y}$ 時］；或者可能是這樣的：只有一個解。或者一般地講，有有限幾個解［例如，當 $F(x,y)=x^2+y^2$ 時便只有唯一的解：$x=0$，$y=0$］；還有極端相反的情形，在 $F(x,y)$ 恆等於零的時候，x 和 y 的任何一組值都是解。

更重要的並且常常遇到的是另外一種情形：方程式 $F(x,y)=0$ 有無限多個解。情況正是這樣：給定了某一變量的值後，便可以求得另外一個變量的值(一個或幾個值)使得方程式被滿足。於是就說所給的方程建立了變量 x 和 y 之間的函數的依賴關係。

例如，設

$$F(x,y)=2x-5y+10. \tag{5}$$

方程式

$$2x-5y+10=0 \tag{6}$$

便是這樣的，在完全任意地給定了 x 的值以後，如果根據公式，

$$y=\frac{2x+10}{5} \tag{7}$$

來取作 y 的值，就可以得到解。於是，對應於每一個 x 的值，就有一個滿足我們的方程的 y 的值：它是由前述公式所給出的。如果設

$$f(x)=\frac{2x+10}{5},$$

那末便可以說方程式 $F(x,y)=0$ 和方程式 $y=f(x)$ 是沒有區別的。

[1] 如果方程式的右端不是零，總可以把它們全都移到左端去。

[2] 假定這種置換是"有意義的"，卽，由符號 F 所表明的全部運算在 $x=x_0$ 和 $y=y_0$ 時是可以完成的。

我們來考慮函數 $F(x,y)=x^2+y^2-1$ 作爲第二個例．方程式

$$x^2+y^2-1=0 \tag{8}$$

的性質是另外一個樣子：在這裏只能在區間 $-1\leqslant x\leqslant+1$ 裏任意地取 x 的值，並且得到了兩個不同的 y 的值：

$$y=\pm\sqrt{1-x^2}.$$

置 $$f_1(x)=+\sqrt{1-x^2},\quad f_2(x)=-\sqrt{1-x^2}$$

以後，很容易理解由方程式

$$y=f_1(x),\quad y=f_2(x) \tag{9}$$

中的每一個都可以推出方程式(8)，其實，根據方程式(8)，對於在所考慮的區間上的任何一個 x 值，必得(9)中的一個或另一個方程[1]。

在這個例中，變量 x 和 y 的位置可以互相交換。

從特例轉到一般的情形上來，應當說明，以聯繫變量 x 和 y 的方程式的形式來研究 x 和 y 之間的函數的依賴關係，主要的優點便是 x 和 y 都保留有權利，如果願意的話，可以把 x 當作自變量而把 y 當作因變量，或者反過來。

我們假定，例如，取 x 這個量作爲自變量．如果是從某一個區間(例如，從 $a<x<b$ 內)中無論選取的 x 值如何，方程式 $F(x,y)=0$ 對 y 而言恆有一個根，並且這個根可以表成簡單公式的形式(自然是要依賴於 x)，那末，滿足所給方程的這個量 y 便是在所考慮的區間裏的 x 這個量的單值函數：

$$y=f(x).$$

在這時，最後這個方程和所給的方程式 $F(x,y)=0$ 便是同等的(在所考慮的區間內)。但是可能發生這樣一種情形：對應於某一個區間的每一個 x 值，依同樣的方式，所給方程有幾個(例如是 k 個)根(關於 y)。如果這 k 個根中的每一個都由個別的簡單公式

---

[1] 在 § 46 我們還要回來討論方程式(8)，(參看 § 46 例 6)。

$$y=f_1(x),\ y=f_2(x),\ \cdots,\ y=f_k(x)$$

來規定，這時我們便有 k 個不同的單值函數，有時候或者就說是在所考慮的區間內的一個多值（k 個值）函數。在這種情形，所給方程 $F(x,y)=0$"可分解成" k 個方程。

以上所舉諸例的第一個中，方程式(6)對 x 的任意值（$-\infty<x<+\infty$）確定 y 是 x 的單值函數；在第二例中，方程式(8)在區間 $-1\leqslant x\leqslant+1$ 上確定 y 是 x 的一個雙值函數。

要相信有多少種可能性在這裏發生，我們再研究第三個例[1]。設

$$F(x,y)=x^4+y^4-x^2-y^2. \qquad (10)$$

方程式
$$x^4+y^4=x^2+y^2 \qquad (11)$$

（它和 $x^4+y^4-x^2-y^2=0$ 是同等的）對 y 而言是一個四次方程式，它的解係由公式

$$y=\pm\sqrt{\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+x^2-x^4}}$$

所給出。

容易相信，於

$$1<|x|<\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}$$

時（即在區間

$$-\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}<x<-1 \text{ 和 } 1<x<\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}$$

內）。裏面開方號下的式子是正的，並且這個方根小於 $\frac{1}{2}$，所以，無論這個方根的符號如何選擇，外面那個開方號下的式子也將是正的；於是在所指出的區間內方程式(11)導出了四個單值的初等函數

$$y=f_i(x) \qquad (i=1,2,3,4),$$

並且規定為

[1] 參看第2章§18例14。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbo

$$f_1(x)=-\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+x^2-x^4}},$$

$$f_2(x)=-\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+x^2-x^4}},$$

$$f_3(x)=+\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+x^2-x^4}},$$

$$f_4(x)=+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+x^2-x^4}}.$$

在區間 $-1<x<+1$ 內，裏面的開方號下的式子是正的，但是裏面那個方根却大於 $\frac{1}{2}$，因此在這個區間內只有兩個值：

$$y=f_1(x) \text{ 和 } y=f_4(x).$$

末了，在條件

$$|x|>\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}$$

成立時（即在區間 $-\infty<x<-\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}$ 和 $\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}<x<+\infty$ 內）方程式(11)根本就沒有根。

§ 2. 圖形表示法・描點法

我們已經看到形式如

$$F(x,y)=0 \tag{12}$$

的方程式可以有任意多的解。

爲了要使解的全體更容易討論，取平面 Oxy，把具有橫坐標 x 和縱坐標 y 的點和每一解 (x,y) 成對應。所有這樣得到的那些點，把它們當作一個整體來看，便構成方程式的圖形。用比較精確和簡單的話來說便是：平面上坐標滿足一個方程式的所有點的總體（集合）[1] 便稱之爲這方程的圖形。

[1] 也可以說成："點的幾何軌跡"……。

求給定方程式的所有的解和繪出它的圖形在本質上是同樣的問題，但是說成方程式的圖形而不說是它的解的總體，不僅使得我們所注意的問題明顯，而且也大大地簡化了措詞。

如果所給的方程式"解出了"因變量 y，使得在某一個區間 $a<x<b$ 內這個變量 y 可以表示成變量 x 的單值函數

$$y=f(x)$$

的形式，那末，這時我們便不加區別地說"方程式 $y=f(x)$ 的圖形"或者"函數 $f(x)$ 的圖形"。

在這種情形，圖形的特徵是：平行於 Oy 軸的每一條直線（在這個區間的範圍以內）和這個圖形恰有一個公共點。

所講的情形無論在實際上或者在理論上都是非常重要的；今後要對它特別注意。

爲了構成所給方程式的圖形，一般說來，應當在平面 Oxy 上繪出所有屬於它的點。實際上這樣作自然是不可能的（如果講的不是特殊情形），理由很簡單：圖形上的點是無限地多。在通常是依下法來作出近似的圖形：在平面上標出足够多的點，同時盡量使得依次標出的點彼此充分地靠近；然後用"光滑的線"依次連接所標出的點便得到這方程式的圖形。這種步驟叫做描點法。這時，由於所作計算及幾何上的手續的特性，圖形上所標出的點當然有一定的準確性；但是在標出的兩點之"間"的一段圖形究竟準確到什麼樣的程度，這就一方面依賴於所給方程式的性質，而另一方面又依賴於繪圖的知識和經驗。

普通所知函數繪圖的計算法是：對於自變量 x 的許多值[1]去計算函數 $y=f(x)$ 的值，並把所得結果記載於一個便於察看的表裏，隨後（或者和計算並行）標出圖形上對應的點，並用一條"光滑的曲線"連接起來。

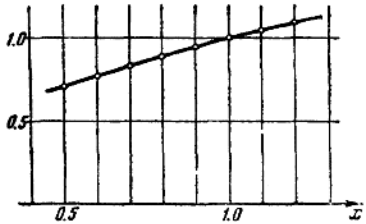
---

[1] 常常取這些值爲"等距的"，卽，它們構成一個等差級數。例如，取表示成一位小數的值，爲簡便計，就說"通過一個小數"取值。

我們舉對於函數

$$y=\sqrt{x} \tag{13}$$

在區間 $0.5 \leqslant x \leqslant 1.2$ 裏所構成的表和第 1 圖爲例，其中 x 的值是隔 0.1 取的。



第 1 圖

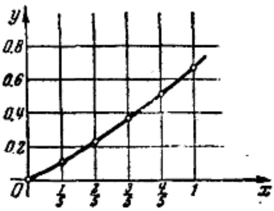
x	y	x	y
0.5	0.71	0.9	0.95
0.6	0.77	1.0	1.00
0.7	0.84	1.1	1.05
0.8	0.89	1.2	1.10

下例(第 2 圖)中關於由函數

$$y=\frac{x(x+1)}{x+2} \tag{14}$$

構成的表，x 的值是在區間 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 裏相隔 $\frac{1}{5}$ 而取的。

x	y	x	y
0	0 或 0.00	$\frac{3}{5}$	$\frac{24}{65}$ 或 0.37
$\frac{1}{5}$	$\frac{6}{55}$ 或 0.11	$\frac{4}{5}$	$\frac{18}{35}$ 或 0.51
$\frac{2}{5}$	$\frac{7}{30}$ 或 0.23	1	$\frac{2}{3}$ 或 0.67



第 2 圖

在表中時常隨意插入中間的縱行，逐漸填滿它們。這一點可以由對於函數

$$y=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1} \tag{15}$$

構成的表看出來。

x	x^2	x^2+1	$\sqrt{x^2+1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$
0.0	0.00	1.00	1.00	0.50
0.5	0.25	1.25	1.12	0.56
1.0	1.00	2.00	1.41	0.70
1.5	2.25	3.25	1.80	0.90
2.0	4.00	5.00	2.24	1.12
2.5	6.25	7.25	2.69	1.34

除了構圖的計算方法以外，還需要在幾何方面加以注意。假定方程式

$$y=f(x)$$

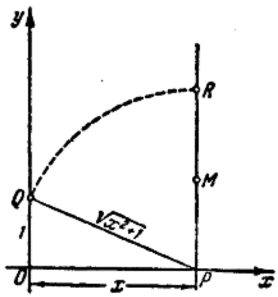
的右端除了算術四則和開方以外不包含別的運算，那末，當把 x 的值看成是以一個線段的形式來給出的時候，便可用圓規和直尺劃出線段 y。

假如要作一些置換

$$x=x_1,\ x=x_2,\ \cdots,\ x=x_n$$

的話，那末當然宜於使工作系統化，同時作出 n 個點，在這 n 個點中相繼地完成同樣的一個步驟。

譬如說，假定所給的是(15)這個函數。爲了作出個別的點，我們在水平[1]軸上取橫坐標爲 x 的點 P，在鉛直軸上取縱坐標爲 1 的點 Q(第 3 圖)；過 P 點引鉛直線並向上取線段 PR 等於 PQ；然後，如果平分線段 PR，那末分點 M 便正好具有橫坐標 x 和縱坐標 y。



第 3 圖

設要繪出(15)的圖形上和橫坐標 x_1, $x_2, \cdots, x_n$ 的點，則：1)我們在水平軸上標

[1] 以後爲了便於措詞起見，我們稱 Ox 軸爲水平軸，稱 Oy 軸爲鉛直軸，平行於它們的直線，稱之爲水平線和鉛直線。

出橫坐標爲 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的點 $P_1, P_2, \cdots, P_n$，並在鉛直軸上標出縱坐標爲 1 的點 Q； 2)過 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 諸點引鉛直線； 3)在通過 P_1 點的直線上用圓規截線段 P_1R_1 等於 P_1Q；然後在通過 P_2 點的直線上截線段 P_2R_2 等於 P_2Q，餘類推； 4)求出線段 P_1R_1 的中點 M_1，線段 P_2R_2 的中點 M_2 等等。

點 $M_1, M_2, \cdots$ 等顯然便是所求的點。

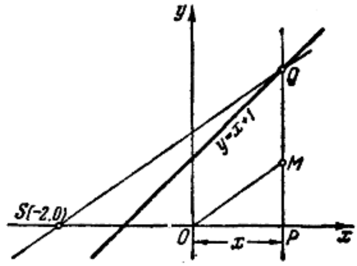
在另一個例

$$y=\frac{x(x+1)}{x+2} \tag{16}$$

中可以用下法來完成作圖。

在平面 Oxy 上標出坐標爲 $(-2, 0)$ 的點 S 並作出直線 $y=x+1$，它在軸 Ox 和 Oy 上分別線段 -1 和 1（第 4 圖）。在水平軸上取橫坐標爲 x 的點 P，過這一點引鉛直線並標出它和直線 $y=x+1$ 的交點 Q。

三角形 PQS 的夾直角的二邊 PQ 和 PS（於 $x>-1$ 時）分別等於 $x+1$ 和 $x+2$。因此，要作出和 PQS 相似的三角形 PMO，只需通過原點 O 引平行於 SQ 的直線到它和 PQ 的交點 M；根據相似性就得到：



第 4 圖

$$\frac{PM}{OP}=\frac{PQ}{SP},$$

即

$$PM=\frac{OP\cdot PQ}{SP}=\frac{x(x+1)}{x+2},$$

因而點 M 便恰好就是屬於圖形的一個點。

要求出圖形上橫坐標爲 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的這些點 $M_1, M_2, \cdots, M_n$，只需： 1)在水平軸上標出具有這些橫坐標的點 $P_1, P_2, \cdots, P_n$； 2)通過

它們引鉛直線到它們和直線 $y=x+1$ 的交點 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$；3)通過點 S 引直線 $SQ_1, SQ_2, \cdots, SQ_n$；4)通過原點 O 引分別平行於 $SQ_1, SQ_2, \cdots, SQ_n$ 的直線到它們和直線 $P_1Q_1, P_2Q_2, \cdots, P_nQ_n$ 的交點。這些交點 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 便是所求的點。

末了,我們來研究例

$$y=\sqrt{x}。\tag{17}$$

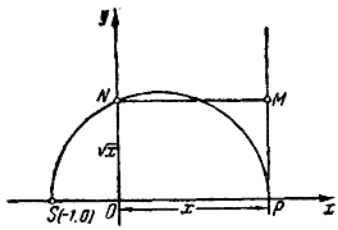
依照 y 這個量可以當作 x 和 1 這兩個量的等比中項，在水平軸上標出横坐標為 -1 的點 S 和横坐標為 x 的點 P。以線段 SP 為直徑作圓，並由它和鉛直軸的交點 N 引直線垂直於通過 P 點的鉛直線。用 M 表垂足,我們便看出點 M 便具有横坐標 x 和縱坐標

$$PM=ON=\sqrt{x}$$

因而屬於這個圖形(第 5 圖)。

於是描點法便歸結為：以水平軸上的點為中心繪圓通過 S 點，並把它和鉛直軸的交點向通過這直徑的另一端的切線投影。

這種類型的例可以使之多樣化以培養幾何繪圖的能力。



第 5 圖

我們研究下面的一種極其自然的推廣。作為繪圖的輔助工具，設已知函數

$$y=u(x), \qquad y=v(x), \cdots\cdots$$

等的圖形。

在這種情形下,只要函數

$$y=f(x, u(x), v(x), \cdots)\tag{18}$$

的右端是由所含各元 $x, u, v, \cdots$ 用前述五種運算組成的,則它的圖形便可以用描點法繪出來。因為，對於每一個所給的線段 x，依假定，線段 $u(x), v(x), \cdots$ 都是已知的，而根據它們便可以用圓規和直尺繪出線段

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbo