

新课程

解题方法



CHAOJIBAOJIAN

超级宝典

掌握一种解题方法

比做一百道题更重要



高二年级数学

山西教育出版社



新课程

解题方法

超级宝典



高二年级 数学

主 编 刘康宁 党效文
作 者 刘康宁 党效文 广 隶 雨 晨
张艳萍 向 阳

山西教育出版社



图书在版编目 (C I P) 数据

新课程解题方法超级宝典. 高中二年级数学/李殿起主编. —太原: 山西教育出版社, 2006. 9

ISBN 7-5440-3179-9

I. 新… II. 李… III. 数学课—初中—解题 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 043944 号

新课程解题方法超级宝典·高中二年级数学

责任编辑 康 健

助理编辑 李志伟

复 审 王佩琼

终 审 张金柱

装帧设计 王耀斌

印装监制 贾永胜

出版发行 山西教育出版社 (太原市水西门街庙前小区 8 号楼)

印 装 太原市新华胶印厂

开 本 787×960 1/16

印 张 21.25

字 数 441 千字

版 次 2006 年 9 月第 1 版 2006 年 9 月山西第 1 次印刷

印 数 1—5000 册

书 号 ISBN 7-5440-3179-9/G·2880

定 价 26.00 元

出版宣言

我们的口号：掌握 1 种解
题方法比做 100 道题更重要！

方法是什么？

方法是攀登顶峰时你选择的最佳路径；方法是茫茫大海上引你前行的点点白帆；方法是身陷困境后突然伸出的一只援手；方法是无边沙漠中远处传来的声声驼铃；方法是皓首穷经后的会心一笑；方法是苦思冥想中的恍然大悟；方法是百思千转而获得的关键“巧解”；方法是眉头紧皱涌上心间的锦囊“妙计”……

方法是举一反三，以一当十；方法是以勤补拙，触类旁通；方法是科学高效，事半功倍；方法是以平常的付出，考出能够上北大清华的成绩。方法是你做过三道同类题后的驾轻就熟；方法是你遇到似曾相识时的推己及彼；方法是你拨开杂芜透过现象看到的本质；方法是你题海泛舟得到秘诀和启迪的片刻轻松……

正是基于这样的
认识，我们在

全国范围内约请一批富有经验的知名学科老师，从现有教材尤其是新课标教材所呈现的理念内容、知识体系中，从全国数以百计的各类考试状元、竞赛获奖者的学习经验和总结提炼中，从每位老师各自数十年的教学实践和体会感受中，提纯归纳、总结升华、探索规律、凝炼方法，精心编写了这一套“新课程解题方法超级宝典”系列丛书，意在为广大中小学生提供最优质的材料、最精当的训练、最科学的思路、最实用的方法，意在使你付出一倍的汗水，取得十倍的喜悦，花同样的心血，收获骄人的成绩。

这是我们的一种理想，一种孜孜不倦的追求。究竟能实现多少，还有待广大师生试用检验。**你的建议和意见（书末附有专纸奉候）**，我们将视为珍宝，并将在以后的修订中进一步吸收消化，完善提高。你的关注和参与，将会给我们带来新的希望和动力。在你成长求知的过程中，愿我们的这本书能成为你学习路上的好伙伴，在你实现人生理想的奋斗中，愿我们的这本书能为你留下一段值得回味的美好记忆。

编委会

《新课程解题方法超级宝典》系列图书

读者编者作者交流互动平台

非常感谢您选择和使用《新课程解题方法超级宝典》系列图书,为了使本书更加完善,为了使本书能够成为您学习中更加得力的助手,为了能更加周到地为您服务,请将您阅读本书后的感受、意见、想法,建议尽快寄给我们,我们将在下一版的编写出版工作中做进一步的改进,让本书真正成为您学习中的良师益友。



1. 您是怎样得到本书的 ____:

A. 自己购买 B. 同学介绍 C. 老师推荐 D. 家人代购



2. 您认为本书的优点在哪里?



3. 您认为本书不足之处是什么?



4. 您从本书中学到了哪些有用的方法? 还需要做哪些补充?



5. 在数、理、化的学习中你最需要哪一类的书?

您的反馈是我们的期待,您的建议是我们的宝藏,您的参与对我们很重要!您可以通过以下方式和我们取得联系:

1. 电子邮件: sxjyzjz@yahoo.com

2. 写信: 山西省太原市水西门街庙前小区 8 号楼

收信人:《新课程解题方法超级宝典》编辑室

邮编: 030002

3. 电话: 0351—4729831

解题方法
超级宝典

超级宝典



◎第六章	不等式	1
6.1	不等式的性质	1
6.2	算术平均数与几何平均数	8
6.3	不等式的证明	15
6.4	不等式的解法	23
6.5	含绝对值的不等式	30
6.6	不等式的应用	36
6.7	不等式理论的综合应用	44
◎第七章	直线和圆的方程	53
7.1	直线的倾斜角和斜率	53
7.2	直线的方程	61
7.3	两条直线的位置关系	68
7.4	简单的线性规划	77
7.5	曲线和方程	86
7.6	圆的方程	95
7.7	直线与圆的位置关系	104
◎第八章	圆锥曲线方程	114
8.1	椭圆	114
8.2	双曲线	126
8.3	抛物线	138
8.4	直线与圆锥曲线的位置关系	149
8.5	轨迹问题	162
8.6	向量与圆锥曲线	173
◎第九章	直线、平面、简单的几何体	184
9.1	平面	184
9.2	空间的两条直线	191
9.3	空间直线与平面	197





9.4	空间两个平面	203
9.5	空间的角	210
9.6	空间的距离	217
9.7	空间向量	225
9.8	多面体与球	232
9.9	几何体中的线面关系	240
9.10	几何体的体积	252
◎第十章	排列、组合和概率	261
10.1	加法原理与乘法原理	261
10.2	排列	267
10.3	组合	274
10.4	排列与组合综合问题	280
10.5	二项式定理	286
10.6	二项式系数的性质	294
10.7	随机事件、等可能事件的概率	301
10.8	互斥事件中有一个发生的概率	308
10.9	相互独立事件同时发生的概率	316
10.10	概率的综合应用	324



第六章 不等式

整体感悟



不等式是数学中的主要内容,也是研究数学问题的基本工具.在现实世界中的量,不等是普遍的,绝对的,而相等则是局部的,相对的,这就意味着不等式在各个方面被深入而广泛地应用,它可以联系到很多的数学知识,渗透到中学数学的许多章节之中.

本章在不等式的性质基础上,学习不等式的证明和不等式的解法,以及不等式的应用.通过本章的学习,要领会等价与非等价转化的方法、逻辑划分思想、变量变换思想、数形结合思想,提高逻辑推理能力,自觉地把不等式与函数、方程联系起来,突出不等式知识的辐射作用,在知识的交叉、整合上提升能力.

本章所涉及的思维方法有:观察与试验、分析与综合、特殊与一般;思维形式有:逻辑思维、发散思维、聚合思维、逆向思维和形象思维.

§ 6.1 不等式的性质

典例精析



例 1 判断下列命题的真假,并简述理由.

(1) 若 $a > b, c > d$, 则 $ac > bd$;

(2) 若 $a > b > 0, c > d > 0$, 则 $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$;

(3) 若 $a < b < 0$, 则 $\frac{b}{a} > \frac{a}{b}$;

(4) 若 $a > b$, 则 $a^n > b^n, \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ ($n \in \mathbf{N}$, 且 $n \geq 2$);

(5) 若 $c > a > b > 0$, 则 $\frac{a}{c-a} > \frac{b}{c-a}$.



思维过程

思路 >> 上述不等式都不能直接运用不等式的性质, 要经过严格的推理论证; 要断定命题是假命题, 只要举出恰当的反例即可, 但举反例不是轻而易举的一件事, 这里用“相等法”及取特殊值法来解.

解答 >> (1) 取 $a=3, b=2, c=-2, d=-3$,

即 $3 > 2, -2 > -3$, 此时 $ac = bd = -6$, 因此(1)是假命题.

(2) 由于同向不等式不能相除, 即取 $a=6, b=4, c=3, d=2$, 此时 $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = 2$, 因此(2)是假命题.

(3) 取 $a=-2, b=-1$, 有 $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}, \frac{a}{b} = 2$, 此时 $\frac{b}{a} < \frac{a}{b}$, 因此(3)是假命题.

(4) 因为 $a > b > 0$ 时, 才有 $a^n > b^n, \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} (n \in \mathbf{N}, \text{且 } n \geq 2)$ 成立, 取 $a=-2, b=-3$, 当 n 为偶数时不成立, 所以(4)是假命题.

(5) 因为 $\left. \begin{matrix} a > b \\ c-a > 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow a \cdot \frac{1}{c-a} > b \cdot \frac{1}{c-a}$, 所以(5)是真命题.

思维迁移

取特殊值要有一定的固定性、方向性. 盲目取值, 效果差. 在取特殊值时, 适当调整数值, 可能会产生多种结果(大于、小于、等于).

理解与熟练不等式的性质是判断的关键.

思维体验

判断下列命题的真假, 并说明理由.

(1) 若 $a > b, c = d$, 则 $ac^n > bd^n (n \in \mathbf{N}_+)$; (2) 若 $a > b, \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, 则 $a > 0, b < 0$;

(3) 若 $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$, 则 $a > b (n \in \mathbf{N}, \text{且 } n \geq 2)$; (4) 若 $a > b + 1$, 则 $\lg a > \lg b$.

提示与答案 >> (1) 假; (2) 真; (3) 真; (4) 假.

例 2 设 a, b, c, d 为正数, 且 $m < \frac{a}{b} < n, m < \frac{c}{d} < n$, 比较 $m, n, \frac{a+c}{b+d}$ 的大小.

思维过程

思路 >> 产生 $a+c, b+d$ 是解本题的突破口, 注意到所给量为正数, 可将不等式分母去掉.

解答 >> $\because m < \frac{a}{b} < n \Rightarrow bm < a < bn,$

①

$$m < \frac{c}{d} < n \Rightarrow md < c < dn,$$

②

由①、②相加得 $m(b+d) < a+c < n(b+d)$,

$$\therefore m < \frac{a+c}{b+d} < n.$$

思维迁移

本例还可以用作差比较法来求解, 即 $\frac{a+c}{b+d} - m = \frac{a-mb+c-md}{b+d} > 0$, $\frac{a+c}{b+d} - n = \frac{a-nb+c-nd}{b+d} < 0$. 同时, 作差比较法对多项式、分式、根式的大小比较合适.

从本题的求解过程可看出这类问题可以推广到一般形式, 如设 $a_i, b_i > 0$ ($i=1, 2, \dots, n$), 则有以下命题:

若 $a_i > 0, b_i > 0, m < \frac{a_i}{b_i} < n$, 则 $m < \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{b_1+b_2+\dots+b_n} < n$.

思维体验

$a > b > 0, m > 0, n > 0$, 则 $\frac{b}{a}, \frac{a}{b}, \frac{b+m}{a+m}, \frac{a+n}{b+n}$ 的大小关系是_____.

提示与答案 $>>$ 由不等式性质或作差比较法易知 $\frac{b}{a} < \frac{b+m}{a+m} < \frac{a+n}{b+n} < \frac{a}{b}$.

例 3 设 $m \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}$, 比较 $x^2 - x + 1$ 与 $-2m^2 - 2mx$ 的大小.

思维过程

思路 $>>$ 作两个实数 $x^2 - x + 1$ 与 $-2m^2 - 2mx$ 的差, 考查它们差的符号即可.

解答 $>>$ $\because (x^2 - x + 1) - (-2m^2 - 2mx) = x^2 + (2m-1)x + (2m^2+1),$

设 $f(x) = x^2 + (2m-1)x + (2m^2+1),$

则 $\Delta = (2m-1)^2 - 4(2m^2+1) = -4m^2 - 4m - 3 = -(2m+1)^2 - 2 < 0,$

$\therefore f(x) > 0$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立.

故 $x^2 - x + 1 > -2m^2 - 2mx$.

思维迁移

作差之后, 有许多同学感到无从下手. 此解法以主元思想得到函数 $f(x)$, 即得模型 $f(x) > 0$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 只需考虑 $f(x)$ 的判别式 $\Delta < 0$ 即可.

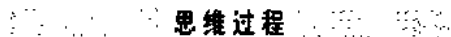
思维体验

已知 a, b, c 是三角形的三边, 比较 $(a+b+c)^2$ 与 $3(ab+bc+ca)$ 的大小.

提示与答案 $>>$ $(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca) = a^2 - (b+c)a + (b^2+c^2-bc) = f(a)$, 只

需 $f(a)$ 的判别式 $\Delta \leq 0$,即得 $f(a) \geq 0$,故 $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$.

例 1 设实数 a, b, c 的绝对值小于1,求证: $ab+bc+ca > -1$.

思维过程 

思路 >> 本题由于变量多,不易入手,直接作差比较太难,如果从函数角度去思考,则可化难为易.

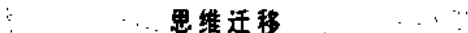
解答 >>

证明:设函数 $f(a) = (b+c)a + bc + 1$,则 $f(a)$ 可以看作是 a 的一次函数($b+c \neq 0$)或常函数($b+c=0$).

$\because -1 < a < 1$,而 $f(1) = (b+1)(c+1) > 0$, $f(-1) = (b-1)(c-1) > 0$,

$\therefore f(a) > 0$ 对 $a \in (-1, 1)$ 恒成立.

故 $ab+bc+ca > -1$.

思维迁移 

上述证法体现数形结合思想和函数思想,在转化过程中首先要注意变量的取值范围,其次要注意转化过程的等价性.

对一些不等式的证明,可以从动态思考,利用函数观点去处理,以抓主元为突破口进行转化.

思维体验 ★ 

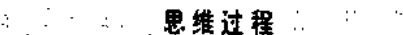
1. 已知 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三边,且 $a^2 + b^2 = c^2$,求证: $c^n > a^n + b^n$ ($n \geq 3$, 且 $n \in \mathbf{N}$).

2. 比较 $a^8 + a^2 + 1$ 与 $a^5 + a$ ($a \in \mathbf{R}$)的大小.

提示与答案 >> 1. 构造函数 $f(n) = \left(\frac{a}{c}\right)^n + \left(\frac{b}{c}\right)^n$,由 $\frac{a}{c}, \frac{b}{c} \in (0, 1)$ 可得 $f(n)$ 是减函数, $f(n) < f(2) = 1$.

2. 设 $f(x) = x^2 - ax + a^2 - a + 1$,由 $f(0) > 0$ 得 $f(a^4) > 0$,即 $a^8 + a^2 + 1 > a^5 + a$.

例 5 设函数 $f(x) = \sqrt{1+x^2}$,当 $x_1 \neq x_2$ 时,比较 $|f(x_1) - f(x_2)|$ 与 $|x_1 - x_2|$ 的大小.

思维过程 

思路 >> $f(x)$ 是一个含二次根式的函数,要比较大小的两个式子又是含绝对值且非负的,我们可以转化——比较它们的平方的值的大小.

解答 >> $\because |f(x_1) - f(x_2)|^2 - |x_1 - x_2|^2 = 2(1 + x_1x_2 - \sqrt{1+x_1^2+x_2^2+x_1^2x_2^2})$,

①当 $1 + x_1x_2 \geq 0$ 时, $(1 + x_1x_2)^2 - (1 + x_1^2 + x_2^2 + x_1^2x_2^2) = -(x_1 - x_2)^2 < 0$;

②当 $1 + x_1x_2 < 0$ 时, $1 + x_1x_2 - \sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2 + x_1^2x_2^2} < 0$.

综合①、②可得 $|f(x_1) - f(x_2)|^2 < |x_1 - x_2|^2$,

$\therefore |f(x_1) - f(x_2)| < |x_1 - x_2|$.

**思维迁移**

此题解法突出了转化意识,在平方后作差比较,显示出变通的思维品质,值得提倡、发扬.此题还可通过对 $f(x)$ “分子有理化”变形,再用不等式性质去放缩比较.同时亦可将 $f(x)$ 看成 $(0,1)$ 点到 $(x,0)$ 点的距离,构造几何模型解决.

思维体验

1. 已知 $a \geq 1$,试比较 $M = \sqrt{a+1} - \sqrt{a}$ 和 $N = \sqrt{a} - \sqrt{a-1}$ 的大小.

2. 设 a, b, m, n 均为正数,且 $m+n=1$, $T = \sqrt{ma+nb}$, $Q = m\sqrt{a} + n\sqrt{b}$,试比较 T, Q 的大小.

提示与答案 >> 1. $M < N$. 2. $T \geq Q$.

例 6 甲、乙两车从A地沿同一路线到达B地,甲车一半时间的速度为 a ,另一半时间的速度为 b ;乙车用速度 a 行走一半路程,用速度 b 行走另一半路程.若 $a \neq b$,试判断哪辆车先到达B地.

思维过程

思路 >> 本题应首先将实际问题转化为数学问题,然后再比较二者到达B地所需时间.

解答 >> 设A、B两地的路程为 $2s$,甲、乙两车所用时间分别为 t_1, t_2 ,则 $t_1 = \frac{2s}{a+b}$, $t_2 = \frac{s}{2a} + \frac{s}{2b}$.

$$\begin{aligned} \therefore t_1 - t_2 &= \frac{2s}{a+b} - \left(\frac{s}{2a} + \frac{s}{2b} \right) \\ &= s \cdot \left(\frac{2}{a+b} - \frac{a+b}{2ab} \right) = s \cdot \frac{4ab - (a+b)^2}{2(a+b)ab} \\ &= -\frac{s(a-b)^2}{2ab(a+b)} < 0. \end{aligned}$$

$$\therefore t_1 < t_2.$$

故甲先到达B地.

思维迁移

本题在对实际问题作出建模后,侧重考查作差比较两实数 t_1, t_2 大小的变形.虽作差比较的形式容易掌握,但变形推理却各不相同,需一定的数学能力作保证.

思维体验

某商品计划两次提价,有甲、乙两种方案($p > q > 0$),如下表:

百分率 方案	第一次提价	第二次提价
甲	$p\%$	$q\%$
乙	$\frac{1}{2}(p+q)\%$	$\frac{1}{2}(p+q)\%$

经过两次提价后,哪种方案提价幅度大?

提示与答案 >> 乙方案提价幅度大.

实战演练



1. 下列命题:①若 $a > b$, 则 $\lg(a-b) > 0$; ②若 $\frac{a}{c^2} > \frac{b}{c^2}$, 则 $a > b$; ③若 $a > b, ab \neq 0$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$; ④若 $a > b$, 则 $(a+c)^2 > (b+c)^2$. 其中正确的命题是().

(A) ①② (B) ② (C) ①③ (D) ②④

2. 若角 α, β 满足 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, 则 $\alpha - \beta$ 的范围是().

(A) $(-\pi, \pi)$ (B) $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (C) $(-\pi, 0)$ (D) $(0, \pi)$

3. 设 x, y, m, n 为互不相等的正数, 且 $x+y=m+n, 0 < \sqrt{x}-\sqrt{y} < \sqrt{m}-\sqrt{n}$, 则下列结论正确的是().

(A) $xy > mn$, 且 $x > m > n > y$
 (B) $xy > mn$, 且 $m > x > y > n$
 (C) $xy < mn$, 且 $x > m > n > y$
 (D) $xy < mn$, 且 $m > x > y > n$

4. 如果 $a > b > 0$, 则下列不等式① $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, ② $a^3 > b^3$, ③ $\lg(a^2+1) > \lg(b^2+1)$, ④ $2^a > 2^b$ 中成立的是_____.

5. 若 $a > b, c > d$, 则 $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$, 欲使命题成立, 应补充的条件为_____.

6. 实数 a, b, c, d 满足下列三个条件: ① $d > c$; ② $a+b=c+d$; ③ $a+d < b+c$, 试将 a, b, c, d 按从小到大的顺序排列, 并证明你的结论.

7. 已知函数 $f(x) = mx^2 + nx$, $-1 \leq f(-1) \leq 1, 2 \leq f(1) \leq 3$, 求 $f(2)$ 的范围.

8. 已知 $a > b, a^2 - 2ab + c^2 = 0$, 求实数 a, b, c 的大小顺序.

9. 船在顺水中由甲地驶向乙地,再由乙地驶回甲地的平均速度和船在静水中的速度是否相等?为什么?

10. 已知 $m \in \mathbf{R}, a > b > 1, f(x) = \frac{mx}{x-1}$, 试比较 $f(a)$ 与 $f(b)$ 的大小.

参考答案

1. B

2. C 提示:由 $\alpha < \beta$ 知 $\alpha - \beta < 0$, 选 C.

3. B 提示:由 $0 < \sqrt{x} - \sqrt{y} < \sqrt{m} - \sqrt{n}$ 得 $x + y - 2\sqrt{xy} < m + n - 2\sqrt{mn} \Rightarrow xy > mn$. 又 $x + y = m + n$, 易知 $m > x > y > n$.

4. ①②③④

5. a, b, c, d 都为正数

6. 由③得 $d - c < b - a$. 又 $d > c$, 则 $b > a$.

又由 $\begin{cases} d - c < b - a \\ c + d < b + a \end{cases} \Rightarrow 2d < 2b \Rightarrow b > d$, 从而由②得 $b - d < c - a < 0 \Rightarrow c > a$, 所以 $b > d > c > a$.

7. 由题意得 $-1 \leq m - n \leq 1, 2 \leq m + n \leq 3$.

$\therefore f(2) = 4m + 2n = (m - n) + 3(m + n)$,

而 $\begin{cases} -1 \leq m - n \leq 1 \\ 6 \leq 3(m + n) \leq 9 \end{cases} \Rightarrow 5 \leq (m - n) + 3(m + n) \leq 10$,

$\therefore f(2)$ 的范围是 $[5, 10]$.

8. 由 $a^2 - 2ab + c^2 = 0$ 得 $(b - a)^2 + c^2 = b^2$,

从而可设 $b - a = b \cos \varphi, c = b \sin \varphi$, 其中 $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

于是有 $c - a = b \sin \varphi - b(1 - \cos \varphi) = b(\cos \varphi + \sin \varphi - 1) = b\left[\sqrt{2} \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) - 1\right] > 0$
 $\Rightarrow c > a$,

故有 $a < c < b$.

9. 设甲、乙两地间距离为 s , 船在静水中的速度为 V , 水流速度为 v .

船在顺水中由甲驶向乙, 再由乙驶回甲所需时间为 $\frac{s}{V+v} + \frac{s}{V-v}$, 则平均速度为

$$V' = \frac{2s}{\frac{s}{V+v} + \frac{s}{V-v}} = \frac{V^2 - v^2}{V} = V - \frac{v^2}{V} < V,$$

所以船在静水中的速度大于平均速度 V' .

$$10. \because f(x) = m\left(1 + \frac{1}{x-1}\right), \therefore f(a) = m\left(1 + \frac{1}{a-1}\right), f(b) = m\left(1 + \frac{1}{b-1}\right).$$

由 $a > b > 1$ 知 $a-1 > b-1 > 0$, 所以 $1 + \frac{1}{a-1} < 1 + \frac{1}{b-1}$.

当 $m > 0$ 时, $f(a) < f(b)$;

当 $m = 0$ 时, $f(a) = f(b)$;

当 $m < 0$ 时, $f(a) > f(b)$.

§ 6.2 算术平均数与几何平均数

典例精析



例 1 若 $a > b > 1$, $P = \sqrt{\lg a \cdot \lg b}$, $Q = \frac{1}{2}(\lg a + \lg b)$, $R = \lg\left(\frac{a+b}{2}\right)$, 则().

(A) $R < P < Q$

(B) $P < Q < R$

(C) $Q < P < R$

(D) $P < R < Q$

思维过程

思路 >> 由 $a > b > 1$ 知 $\lg a > \lg b > 0$, 视 $\lg a, \lg b$ 为元, 寻找基本不等式的模型解决.

解答 >> $\because a > b > 1, \therefore \lg a > \lg b > 0$.

$$\therefore Q = \frac{1}{2}(\lg a + \lg b) > \sqrt{\lg a \cdot \lg b} = P.$$

$$\text{又 } \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}, \therefore R = \lg\left(\frac{a+b}{2}\right) > \lg \sqrt{ab} = Q.$$

$\therefore P < Q < R$, 选 B.

思维迁移

此题将不等式性质与对数函数性质结合起来考查, 有一定的综合性, 需要学生有较全面的基础知识和模型识别能力.

思维体验

已知 $a > b > 0$, 全集 $U = \mathbf{R}$, $M = \left\{x \mid b < x < \frac{a+b}{2}\right\}$, $N = \{x \mid \sqrt{ab} < x < a\}$, $P = \{x \mid b < x \leq \sqrt{ab}\}$, 则().



(A) $P = M \cap \complement_U N$

(B) $P = \complement_U M \cap N$

(C) $P = M \cap N$

(D) $P = M \cup N$

提示与答案 >> 使用数形结合的方法, 将 M 、 N 、 P 分别表示在数轴上, 选 A.

例 1 已知 $a, b \in (0, +\infty)$, 且 $a + b = 1$, 求证: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq 8$.

思维过程

思路 >> 将 $a + b = 1$ 与 $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}$ 能有机地联系起来, 化归为基本不等式模型即可.

解答 >>

$$\text{证明: } \because \frac{1}{a^2} = \frac{(a+b)^2}{a^2} = 1 + \frac{2b}{a} + \frac{b^2}{a^2}, \frac{1}{b^2} = \frac{(a+b)^2}{b^2} = 1 + \frac{2a}{b} + \frac{a^2}{b^2},$$

$$\therefore \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 2 + \left(\frac{2b}{a} + \frac{2a}{b}\right) + \left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2}\right) \geq 2 + 2\sqrt{\frac{2b}{a} \cdot \frac{2a}{b}} + 2\sqrt{\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a^2}{b^2}} = 8.$$

思维迁移

本例证明的技巧是将 1 化为 $(a+b)^2$, 通过整理组合, 化成基本不等式的形式.

思维体验 ★

1. 若 $a, b \in \mathbf{R}$, 求证: $a^2 + b^2 \geq 2|ab|$.

2. 已知 a, b, c 是不全相等的正数, 求证: $\frac{b+c-a}{a} + \frac{c+a-b}{b} + \frac{a+b-c}{c} > 3$.

提示与答案 >> 1. $a^2 + b^2 = |a|^2 + |b|^2 \geq 2|ab|$.

2. 左边可拆为 $\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) - 3 > 2 + 2 + 2 - 3 = 3$.

例 2 求函数 $y = x + \frac{1}{x}$, $x \in (0, c]$ (c 是正常数) 的最小值.

思维过程

思路 >> 以基本不等式切入, 考虑基本不等式等号成立的条件, 对 c 分类研究.

解答 >> $\because y = x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}}$ (当且仅当 $x = \frac{1}{x}$ 时, 取“=”),

$\therefore$ 当 $c \geq 1$, 且 $x = 1$ 时, $y_{\min} = 2$;

当 $0 < c < 1$ 时, 不妨设 $0 < x_1 < x_2 < c$,

$$\text{则 } y_2 - y_1 = (x_2 - x_1) + \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right) = (x_2 - x_1) \frac{x_2 x_1 - 1}{x_2 x_1} < 0.$$

即函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 在 $(0, c]$ 上递减, 则 $y_{\min} = c + \frac{1}{c}$.