继续教育（函授）专科公共课系列教材

微积分基础

下

张希荣　彭武安　编

Wei jifen Jichu

中国电力出版社
www.cepp.com.cn

继续教育（函授）专科公共课系列教材

微积分基础 下

张希荣　彭武安 编

内 容 提 要

本书根据继续教育（函授）专科学生的特点，本着由浅入深、循序渐进、通俗易懂、重点突出、难点分散、范例较多的原则，各个章节配有一定数量的习题，为了检验学生的学习效果还配备了自测题。有些经典范例具有一定的难度，对于那些有志深造的成人学员也有一定的参考价值。

本书分上、下册出版。下册内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分及曲线积分、级数、常微分方程等五章，书末附有习题参考答案与提示。

本书力求用通俗的语言和实际背景使学生理解其真正意义，是继续教育（函授）专科学生的教材，也可作为各成人教育和自考学生的自学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

微积分基础. 下/张希荣主编. —北京：中国电力出版社，2005

（继续教育（函授）专科公共课系列教材）

ISBN 7-5083-3336-5

Ⅰ. 微… Ⅱ. 张… Ⅲ. 微积分-函授大学-教材 Ⅳ. 0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 028710 号

中国电力出版社出版、发行

（北京三里河路6号 100044 http://www.cepp.com.cn）

北京同江印刷厂印刷

各地新华书店经售

*

2005年5月第一版 2005年5月北京第一次印刷

787毫米×1092毫米 16开本 10印张 219千字

印数 0001—4000册 定价 **15.00** 元

目 录

第八章
向量代数与空间解析几何

解析几何是用代数的方法研究几何规律的学科，其本质是建立几何图形上的点与实数之间的关系，由此把代数方程与曲线、曲面联系起来，用代数关系式反映几何量之间的规律。

借助于解析几何知识，几何的概念可以用代数形式来表示，几何规律可以通过代数关系式来反映。反之，解析几何可以给代数关系式以几何解释，使人们能直观地理解代数关系式的几何意义，并启发人们找出新的规律。这两方面构成了解析几何的基本问题。

在这一章将引进向量的概念，介绍向量的一些基本运算，然后以向量为工具讨论空间的平面和直线，最后介绍二次曲面和空间曲线的一些知识。

第一节 空间直角坐标系

一、空间直角坐标系

所谓空间直角坐标系是指：给定一点 O，经过 O 点引三条以该点为原点且互相垂直的数轴 Ox、Oy、Oz（它们具有相同的长度单位）。通常称 O 为坐标原点；称 Ox、Oy、Oz 三个轴分别为 x 轴（或横轴）、y 轴（或纵轴）、z 轴（或竖轴）。通常记这个坐标系为 $Oxyz$。

如果使右手的大拇指、食指和中指处于两两垂直的状态，且使它们分别指向 Ox、Oy、Oz 轴，称这样的坐标系 $Oxyz$ 为右手系，如图 8-1 (a) 所示。如果用左手按同样的方式确定的坐标系，则称为左手系，如图 8-1 (b) 所示。建立空间直角坐标系时，习惯上取右手系，今后若无特别说明，所用坐标系皆为右手坐标系。

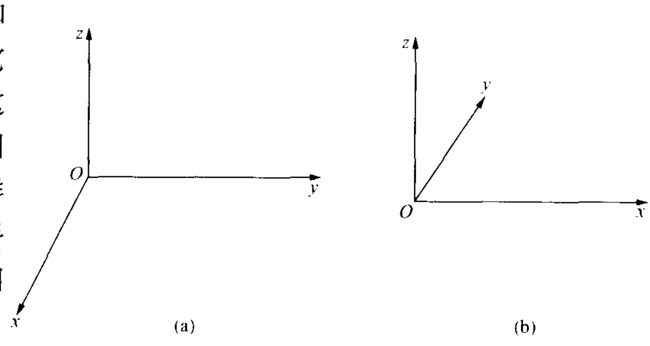

图 8-1

三个坐标轴 Ox、Oy、Oz 两两确定的三个互相垂直的平面，统称为坐标平面，分别称为平面 xOy、平面 yOz、平面 zOx。

设 M 为空间一点，过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴、z 轴，并与 x 轴、y 轴、z 轴的交点依次为 A、B、C。设 $OA=x$，$OB=y$，$OC=z$，则点 M 确定了一个三

元有序数组。反之，在三个坐标轴上依次给定三个点 A、B、C，并且 $OA=x$，$OB=y$，$OC=z$，分别过点 A、B、C 作三个平面依次垂直于 Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴，则这三个平面交于一点 M，即一个三元有序数组（x，y，z）惟一地确定了空间一点。从而空间一点 M 与一个三元有序数组（x，y，z）建立了一一对应关系。通常称这个三元有序数组（x，y，z）为点 M 的坐标，并称 x 为 M 的横坐标，y 为 M 的纵坐标，z 为 M 的竖坐标，记作 M（x，y，z），如图 8－2 所示。

三个坐标平面将空间分为八个部分，称每个部分为一个卦限。这八个卦限用下述方法规定其顺序，如图 8－3 所示。

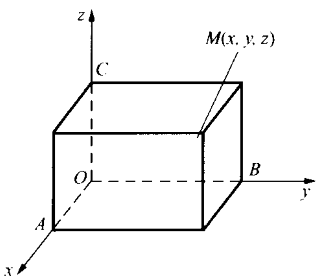

图 8－2

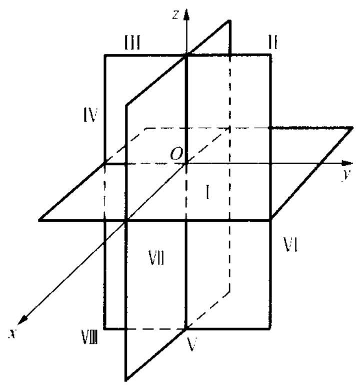

图 8－3

第 Ⅰ 卦限	$x>0, y>0, z>0$;	第 Ⅱ 卦限	$x<0, y>0, z>0$
第 Ⅲ 卦限	$x<0, y<0, z>0$;	第 Ⅳ 卦限	$x>0, y<0, z>0$
第 Ⅴ 卦限	$x>0, y>0, z<0$;	第 Ⅵ 卦限	$x<0, y>0, z<0$
第 Ⅶ 卦限	$x<0, y<0, z<0$;	第 Ⅷ 卦限	$x>0, y<0, z<0$

在这里有必要指出，位于坐标平面或坐标轴上的点的坐标具有以下特性：

原点的三个坐标都是 0，其坐标为（0，0，0）；

在 x 轴上的点的坐标为（x，0，0）；

在 y 轴上的点的坐标为（0，y，0）；

在 z 轴上的点的坐标为（0，0，z）；

在 xOy 平面上的点的坐标为（x，y，0）；

在 yOz 平面上的点的坐标为（0，y，z）；

在 zOx 平面上的点的坐标为（x，0，z）。

二、两点间的距离

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间两点。过点 M_1、M_2 各作三条分别垂直于三条坐标轴的平面，这六个平面围成一个以 M_1、M_2 为对角线的长方体，如图 8－4 所示。

由勾股定理容易得到

$$|M_1M_2| = |M_1N|^2 + |NM_2|^2$$
$$= |M_1P|^2 + |M_1Q|^2 + |M_1R|^2$$

由图 8-4 可看出

$$|M_1P| = |P_1P_2| = |x_2 - x_1|$$

$$|M_1Q| = |Q_1Q_2| = |y_2 - y_1|$$

$$|M_1R| = |R_1R_2| = |z_2 - z_1|$$

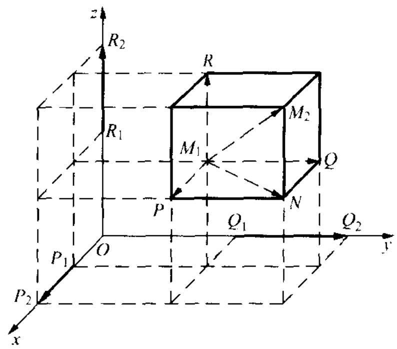

图 8-4

从而

$$|M_1M_2|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

所以

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (8-1)$$

式（8-1）称为空间两点间的距离公式。

例 8-1 已知两点 $M_1(-1,0,1)$，$M_2(0,3,-1)$，求此两点间的距离。

解 由两点间的距离公式（8-1）有

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$
$$= \sqrt{[0-(-1)]^2 + (3-0)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{14}$$

例 8-2 在 y 轴上求一点 M，使其到点 $M_1(2,1,-1)$ 与 $M_2(1,-1,3)$ 的距离相等。

解 由于点 M 在 y 轴上，故可设其坐标为（0，y，0），由题意知

$$|MM_1| = |MM_2|$$

即

$$\sqrt{(0-2)^2 + (y-1)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{(0-1)^2 + (y+1)^2 + (0-3)^2}$$

解此方程得 $y = -\frac{5}{4}$，故所求点的坐标为 $M\left(0,\ -\frac{5}{4},\ 0\right)$。

例 8-3 试判断以 $A(4,1,3)$，$B(10,-1,6)$，$C(2,4,9)$ 为顶点的 $\triangle ABC$ 的几何特征。

解 由空间两点间的距离公式有

$$|AB|^2 = (10-4)^2 + (-1-1)^2 + (6-9)^2 = 49$$
$$|BC|^2 = (2-10)^2 + [4-(-1)]^2 + (3-5)^2 = 98$$
$$|AC|^2 = (2-4)^2 + (4-1)^2 + (3-9)^2 = 49$$

由于 $|AB|^2 = |AC|^2$，可知 $AB = AC$，因而 $\triangle ABC$ 为等腰三角形。又由于 $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$，所以 $\triangle ABC$ 为直角三角形。

综上可知 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形。

习题 8-1

1. 当 P 点处于以下位置时，请指出它的坐标所具有的特点：

(1) P 点在 zOx 平面上；

(2) P 点在 Ox 轴上；

(3) P 点在与 yOz 平面平行且相互距离为 2 的平面上；

(4) P 点在与 Oz 轴垂直且与原点相距为 5 的平面上。

2. 指出 P (1, -2, -1) 在下列对称点的坐标：

(1) 与三个坐标平面分别对称；

(2) 与三坐标轴分别对称；

(3) 与坐标原点对称。

3. 设一立方体的一个顶点在原点，三条棱分别在三条正坐标轴上，如果棱长为 a，求八个顶点坐标。

4. 证明 P_1 (1, 2, 3)，P_2 (2, 3, 1)，P_3 (3, 1, 2) 三点的连线构成一个正三角形。

第二节 向量及其线性运算

一、向量的概念

向量是用代数方法认识几何规律的基本工具。平常所遇到的量，可以分为两类：一类量在选定了某个单位以后完全可以用数值来表示，比如质量、时间、面积、体积等，通常称这种量为数量（或标量）。另一类量不仅有大小，而且有方向，比如力、速度等，通常称这种量为向量（或矢量）。

向量通常用具有一定长度和方向的有向线段来表示。称这个确定的长度为向量的大小或向量的模；这个确定的方向称为向量的方向。

特别地，模为 1 的向量称为单位向量。模为 0 的向量为零向量，记为 $\mathbf{0}$。零向量的方向可以看作是任意的。

若 A 为向量的起点，B 为终点，通常记为$\overrightarrow{AB}$，或用小写的黑斜体字符 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 等来表示。

若向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的模相等，且它们的方向也相同，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$。

与向量 $\boldsymbol{a}$ 的模相等，而方向相反的向量，称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记作 $-\boldsymbol{a}$。由定义可以看出，向量相等有两个条件：两个向量的模相等，方向相同（与向量的起点和终点无关）。通常称与起点和终点无关的向量为自由向量。若无特别说明，下面所讨论的向量均指自由向量。

仿照物理学中力的合成法则，可以定义向量的线性运算。

二、向量的加法

由物理学知识可以知道，如果两个力 F_1 与 F_2 作用在某物体的同一点上，则合力 F 的方向是以 F_1，F_2 为邻边的平行四边形对角线的方向（如图 8-5 所示）。F 的大小为该对角线的长度。

类似地，可以定义向量的加法。向量的加法运算规定如下：

设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为不在同一条直线上的两个向量。将它们的始点移到同一点 O，并记 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$，以$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$为邻边作平行四边形 $OACB$，如图 8－6（a）所示。

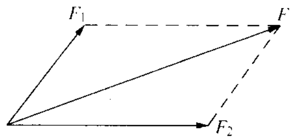

图 8－5

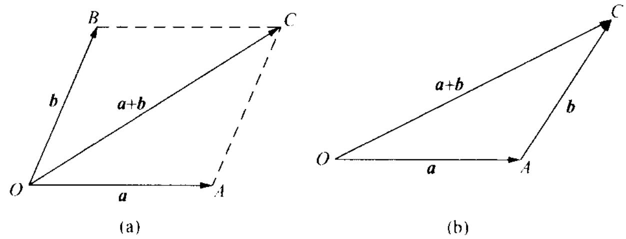

图 8－6

称$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量，记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 。

上述用平行四边形的对角线确定两个向量的求和的方法，称为向量加法的平行四边形法则。

注意到图 8－6（a）中$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，则可简化向量求和：自 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A，做$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，连接 OC，则向量$\overrightarrow{OC}$即为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量，如图 8－6（b）所示。这种向量求和的方法通常称为向量加法的三角形法则。

向量加法的三角形法则可以推广到任意有限多个向量求和的问题中去。如给定了向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、…、$\boldsymbol{d}$、$\boldsymbol{e}$。则从任一点 O 引出向量 $\boldsymbol{a}$，然后再从 $\boldsymbol{a}$ 的终点引出向量 $\boldsymbol{b}$ ……从 $\boldsymbol{d}$ 的终点引出 $\boldsymbol{e}$ 。则以点 O 为始点，以上述向量折线中 $\boldsymbol{e}$ 的终点为终点的向量记为 $\boldsymbol{s}$，则 $\boldsymbol{s}$ 为上述向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、…、$\boldsymbol{d}$、$\boldsymbol{e}$ 之和，记为

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\cdots+\boldsymbol{d}+\boldsymbol{e}$$

如图 8－7 所示。

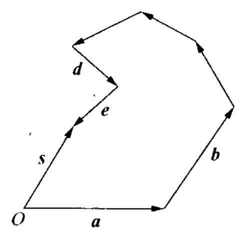

图 8－7

若 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反，则称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，此时，$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 之和可以依照三角形法则确定。即当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同时，其定义的向量与这两个向量的方向相同，其模为这两个向量模的和。当 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 方向相反时，定义其和向量的方向与 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 中模较大的向量方向相同，而和向量的模等于 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 中较大的模与较小的模之差。

容易验证，向量加法运算满足交换律、结合律。

三、向量的减法

规定 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$，利用上面求向量和的平行四边形法则可以求出 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$。如图 8－8 所示，作出以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形 $OAC'B'$，其对角线$\overrightarrow{OC'}$即为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$。

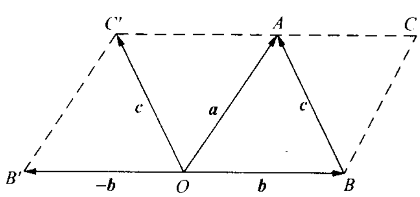

图 8－8

注意到$\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{BA}$，为简化计算，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ 可以定义为：将 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的始点移到点 O，记作 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$，则由$\overrightarrow{OB}$的终点 B 到$\overrightarrow{OA}$的终点 A 的向量$\overrightarrow{BA}$即为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，称之为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之差。

上述简化的求向量之差的方法常称为向量减法的三角形法则。

四、向量与数的乘法

若给定向量 $\boldsymbol{a}$ 和数量λ，则定义 $\lambda\boldsymbol{a}$（或 $\boldsymbol{a}\lambda$）为向量与数的乘法，它仍为一个向量，其模与方向规定如下：

（1）$\lambda\boldsymbol{a}$ 的模等于$\boldsymbol{a}$ 的模的$|\lambda|$倍（$|\lambda|$为 λ 的绝对值）；通常记$|\boldsymbol{a}|$为 $\boldsymbol{a}$ 的模，因此有$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$。注意$|\lambda|$表示数 λ 的绝对值，$|\boldsymbol{a}|$表示向量 $\boldsymbol{a}$ 的模。

（2）当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同。

当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反。

特别地，当 $\lambda=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}$时，$\lambda\boldsymbol{a}=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$ 为与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量，常记为 $\boldsymbol{e}_a=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$。

容易验证

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$$

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$$

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$$

习题8-2

1. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{w}=-\boldsymbol{a}$，求 $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$。

2. 设 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 是一个正六边形，并设 $\boldsymbol{u}=\overrightarrow{A_1A_2}$，$\boldsymbol{v}=\overrightarrow{A_1A_6}$，试用 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$ 表示出$\overrightarrow{A_1A_2}$，$\overrightarrow{A_2A_3}$，$\overrightarrow{A_3A_4}$，…，$\overrightarrow{A_6A_1}$。

3. 根据向量加法的平行四边形法则说明$|a+b|\leqslant|a|+|b|$，并指出何时等号成立。

4. 设 $\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，试用向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示 $2\boldsymbol{a}$。

5. 用向量法证明：梯形两腰中点的连线平行于底边且等于两底边和的一半。

6. 已知$\triangle ABC$ 两边的向量$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{AC}$，D 是BC 边上的中点，试用$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{AC}$表示中线向量$\overrightarrow{AD}$。

第三节 向量的代数表示

一、向量的坐标表示式

为了能够使向量作为研究几何图形的工具，需要把向量运算用代数形式表示。为此先建立空间直角坐标系，若将向量的起点移到坐标系原点 O，则这个向量完全由其终点所确定；反之，对于空间任意一点 M，总可以确定一个向量$\overrightarrow{OM}$，因此可以说空间中的点与起点在原点的向量存在着一一对应关系。通常向量$\overrightarrow{OM}$可以称为点M 对点O 的向径。设点 M 的坐标为（x，y，z），即 $OA=x$，$OB=y$，$OC=z$，如图 8-9 所示。

由向量的加法法则可知

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$

如果在 x 轴、y 轴、z 轴上分别取三个以坐标轴的正向为方向的单位向量，并依次记

为 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$，称其为基本单位向量。由向量与数的乘法运算可知

$$\overrightarrow{OA} = x\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OB} = y\boldsymbol{j}, \overrightarrow{Oz} = z\boldsymbol{k}$$

称它们为向量$\overrightarrow{OM}$在三个坐标轴上的分向量，通常记为

$$\overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \qquad (8-2)$$

称式（8-2）为向量$\overrightarrow{OM}$的坐标表示式或向量在坐标轴上的分解。为了方便，简记为

$$\overrightarrow{OM} = (x, y, z)$$

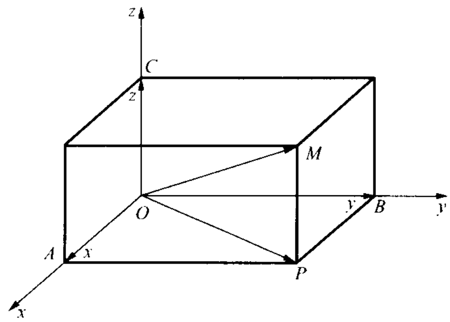

图 8-9

二、向量在轴上的投影

若给定一轴 u 及轴外一点 A，过点 A 引出与轴 u 垂直的平面 π，设轴 u 与平面 π 的交点为 A'，如图 8-10 所示，则称 A'为点 A 在轴 u 上的投影。

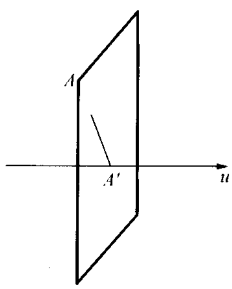

图 8-10

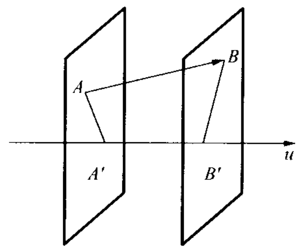

图 8-11

若给定向量$\overrightarrow{AB}$及轴 u，设 A'、B'分别为在点 A、B 在轴 u 上的投影，则称 $A'B'$为向量$\overrightarrow{AB}$在轴 u 上的投影，如图 8-11 所示，通常记为 $\mathrm{Prj}_{u}\overrightarrow{AB} = A'B'$。

若轴 u_1 与 u_2 相交于点 O，将其中任一轴绕点 O，在两轴所定义的平面内旋转，使其正向与另一轴正向重合所确定的角度，定义为两轴的夹角，由于旋转的方向有逆时针和顺时针两种情形，因此夹角可能有两个。通常规定两轴间夹角限定在 O 与 π 之间，且不分轴的顺序。

若轴 u_1 与 u_2 不相交，可在空间任取一点 O，自点 O 引出分别与轴 u_1、u_2 具有相同方向的轴 u'_1、u'_2，定义 u'_1 与 u'_2 之间的夹角为 u_1 与 u_2 之间的夹角。

若给定空间轴 u 与向量 $\boldsymbol{a}$，则任意引出一轴 u'，使其方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同，则定义 u 与 u'之间的夹角为向量 $\boldsymbol{a}$ 与轴 u 间的夹角。

类似地，给定两个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$。任意引两轴 u_1、u_2，使它们的方向分别与向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的方向相同。则定义 u_1 与 u_2 之间的夹角即为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 间的夹角，通常记作（$\widehat{a,b}$）。

向量在轴上的投影有下面的性质：

性质 8-1 $$\mathrm{Prj}_{u}\overrightarrow{AB} = |AB|\cos\varphi$$

其中，φ 为轴 u 与向量$\overrightarrow{AB}$间的夹角。

性质 8-2 有限个向量的和在任意给定轴上的投影等于各向量在该轴上的投影之和，即

$$\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\cdots+\boldsymbol{e})=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b}+\cdots+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{e}$$

三、向量线性运算的代数表示

由上述两段可知，若向量 $\overrightarrow{OM}=(x,y,z)$，则易知向量 $\overrightarrow{OM}$ 在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影依次为 x、y、z。习惯上称向量 $\overrightarrow{OM}$ 在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影 x、y、z 为向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标。

利用向量的坐标及投影的性质，可以将向量的线性运算用代数形式来表示。

设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1),\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，即

$$\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$$

则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2)\boldsymbol{i}+(y_1+y_2)\boldsymbol{j}+(z_1+z_2)\boldsymbol{k} \tag{8-3}$$
$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(x_1-x_2)\boldsymbol{i}+(y_1-y_2)\boldsymbol{j}+(z_1-z_2)\boldsymbol{k} \tag{8-4}$$

例 8-4 已知 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，求 $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$，$2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$。

解 由于 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，可知

$$2\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k},3\boldsymbol{b}=9\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$$
$$2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=(2+9)\boldsymbol{i}+(-4+6)\boldsymbol{j}+(4-3)\boldsymbol{k}=11\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$$
$$2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=(2-9)\boldsymbol{i}+(-4-6)\boldsymbol{j}+(4+3)\boldsymbol{k}=-7\boldsymbol{i}-10\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}$$

四、向量的模与方向余弦的代数表示

由本章第一节知道，若点 M 的坐标为 $(x,\ y,\ z)$，则 $|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。

描述向量的方向，通常用该向量与各坐标轴之间的夹角的余弦来表示，设向量 $\overrightarrow{OM}$ 与 x 轴、y 轴、z 轴的正向的夹角分别为 α、β、γ，如图 8-9 所示，显然

$$OA=|OM|\cos\alpha,\quad OB=|OM|\cos\beta,\quad OC=|OM|\cos\gamma$$

即

$$\cos\alpha=\frac{OA}{|OM|},\quad \cos\beta=\frac{OB}{|OM|},\quad \cos\gamma=\frac{OC}{|OM|}$$

通常称 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 为该向量的方向余弦。

如果用向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标表示，则有

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

从而

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

通常称与方向余弦成比例的一组实数 m，n，p 为该向量的方向数，即若 m，n，p 满足

$$\frac{m}{\cos\alpha}=\frac{n}{\cos\beta}=\frac{p}{\cos\gamma}$$

则称 m，n，p 为该向量的方向数。

另外，由单位向量的定义可知，$(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$ 为与 $\overrightarrow{OM}$ 同向的单位向量。

例 8-5 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴、y 轴间的夹角分别为 $\alpha=60°$，$\beta=120°$，求该向量 $\boldsymbol{a}$ 与 z 轴间的夹角 γ。

解 由方向余弦的关系式

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

及 $\alpha=60°$，$\beta=120°$ 可知，

$$\cos\alpha=\cos60°=\frac{1}{2},\quad \cos^2\alpha=\frac{1}{4};\quad \cos\beta=\cos120°=-\frac{1}{2},\quad \cos^2\beta=\frac{1}{4}$$

故

$$\cos^2\gamma=1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\cos\gamma=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

所以 $\gamma=45°$ 或 $135°$。即向量 $\boldsymbol{a}$ 与 z 轴间的夹角 γ 为 $45°$ 或 $135°$。

例 8-6 已知点 $A(x_1,y_1,z_1)$、$B(x_2,y_2,z_2)$，求线段 AB 的中点 M 的坐标。

解 设线段 AB 连线的中点 M 的坐标为 (x,y,z)，由题设可知 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$。且

$$\overrightarrow{AM}=(x-x_1,y-y_1,z-z_1)$$

$$\overrightarrow{MB}=(x_2-x,y_2-y,z_2-z)$$

因此 $$x-x_1=x_2-x,\quad y-y_1=y_2-y,\quad z-z_1=z_2-z$$

由此可得

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}$$

习惯上称上式为中点公式。

习题 8-3

1. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的模是 5，它与 x 轴的夹角为 $\frac{\pi}{4}$，求向量 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴上的投影。

2. 一向量的中点在点 B (2, −1, 7)，它与 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影依次为 4、−4、7，求该向量的始点 A 的坐标。

3. 已知空间中的三点 A (0, −1, 2)、B (−1, 3, 5)、C (3, −1, −2)，计算 $2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}$。

4. 设 $\boldsymbol{a}=(2,0,-1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-2,-2)$，试求：$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$2\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}$，$3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$。

5. 设 $\boldsymbol{a}=(2,-2,-1)$，试求与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量 $\boldsymbol{e}_a$。

6. 已知 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{u}=4\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$。试求：

(1) $\boldsymbol{u}$ 在 $\boldsymbol{y}$ 轴上的投影；

(2) $\boldsymbol{u}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 轴和 z 轴上的分量。

7. 设 $A(2,-1,1)$、$B(1,2,2)$，试求向量 $\overrightarrow{AB}$ 的方向余弦。

第四节　向量的数量积与向量积

一、两向量的数量积

引例　外力做功问题

由物理学知识可以知道，若质点受外力 $\boldsymbol{F}$ 的作用，沿直线运动，位移为 $\boldsymbol{s}$，设位移方向与力的方向间的夹角为 $(\widehat{F,\boldsymbol{s}})$，则这个力所做的功 $\boldsymbol{W}$ 为

$$W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos(\widehat{F,\boldsymbol{s}})$$

依据上述运算，引入向量的一种运算。

定义 8-1　**若给定向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$**，定义 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ **为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积（或内积），记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$**，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) \tag{8-5}$$

由数量积的定义可以证明下面的结论：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$；

(2) 两个非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 垂直的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$。

数量积满足下列运算律：

交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$。

结合律：$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$。

分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$。

若 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1),\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，则向量的数量积可以用向量的坐标来表示：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\cdot(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})\\&=x_1x_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+x_1y_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+x_1z_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+y_1x_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+y_1y_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}\\&\quad+y_1z_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+z_1x_2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+z_1y_2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+z_1z_2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 是互相垂直的基本单位向量，所以

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=0,\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=0,\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=0$$
$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0,\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=0,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}=0$$
$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=1,\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=1,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$$

于是

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 \tag{8-6}$$

由式（8-6）可知，两个非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 垂直当且仅当 $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$ 时成立。特别地，当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 时，有

$$\boldsymbol{a}^2=a\cdot a=x_1^2+y_1^2+z_1^2=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}})=|\boldsymbol{a}|^2$$

注意到 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都是非零向量时，有

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

仿照向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 $\boldsymbol{a}$ 上投影的定义，可以定义向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影为 $|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，

并记为 $\mathrm{Prj}_a \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a},\hat{}\boldsymbol{b})$。由数量积的定义，当 $\boldsymbol{a}\neq 0$ 时，又可以表示为

$$\mathrm{Prj}_a \boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}$$

例 8-7 证明：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$。

证 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$

例 8-8 已知 $\boldsymbol{a}=(1,0,-1),\boldsymbol{b}=(-2,-1,1)$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$(\boldsymbol{a},\hat{}\boldsymbol{b})$。

解 由

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

可得
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 1\cdot(-2)+0\cdot(-1)+(-1)\cdot 1=-3$$

由于
$$\cos(\boldsymbol{a},\hat{}\boldsymbol{b}) = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}，且$$

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}=\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$$

$$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{6}$$

因此
$$\cos(\boldsymbol{a},\hat{}\boldsymbol{b}) = \frac{-3}{\sqrt{2}\sqrt{6}}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

故
$$(\boldsymbol{a},\hat{}\boldsymbol{b}) = 120^\circ$$

例 8-9 设 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，求 y。

解 由于 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，所以

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$$

即
$$2\cdot 3+y\cdot(-1)+(-1)\cdot 2=0$$

解方程得

$$y=4$$

二、向量的向量积

在研究物体转动问题时，不但要考虑物体所受的力，还要分析这些力所产生的力矩。下面举一个简单的例子来说明表达力矩的方法。

引例 当用扳手拧螺母时，若扳手沿逆时针方向转动，则其螺母朝外移动；若扳手沿顺时针方向转动，则其螺母朝里移动。而其移动的距离，取决于所施外力以及扳手臂的长短。其移动的方向垂直于力与扳手臂所决定的平面。从力学上看，螺母的移动取决于力矩 $\boldsymbol{M}$，而力矩又取决于力臂 $\boldsymbol{L}$ 和力 $\boldsymbol{F}$，且

$$|M|=|L||F|\sin(L,\hat{}F)$$

为此引入向量的向量积（或外积）的定义。

定义 8-2 向量 $\boldsymbol{c}$ 由向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 确定，且满足下列三个条件：

(1) $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a},\hat{}\boldsymbol{b})$；

(2) $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$；