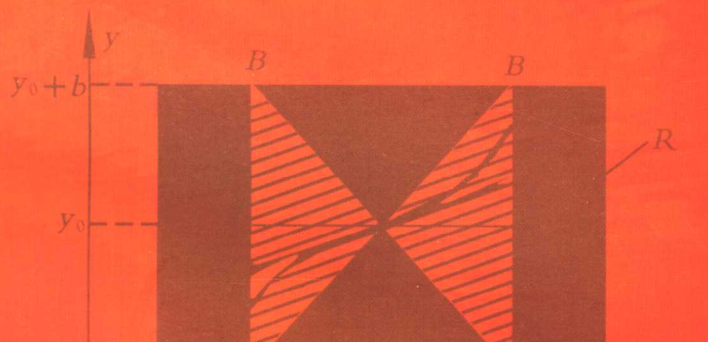
常微分方程

Ordinary Difference Equation

张敬　孙福刚　周立群　编著



哈尔滨地图出版社

常 微 分 方 程

CHANG WEI FEN FANG CHENG

张 敬 孙福刚 周立群 编著

哈尔滨地图出版社
·哈 尔 滨·

图书在版编目（CIP）数据

常微分方程/张敬，孙福刚，周立群编著．—哈尔滨：哈尔滨地图出版社，2005．12

ISBN 7－80717－213－4

Ⅰ．常…　Ⅱ．①张…　②孙…　③周…　Ⅲ．常微分方程－高等学校－教材　Ⅳ．O175．1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 151567 号

哈尔滨地图出版社出版、发行

（地址：哈尔滨市南岗区测绘路 2 号　邮政编码：150086）

哈尔滨铁路局工业总公司齐齐哈尔印刷厂

开本：850 mm×1168 mm　1/32　印张：17.75　字数：226 千字

2005 年 12 月第 1 版　2005 年 12 月第 1 次印刷

印数：1～1 000　定价：20.00 元

前　言

常微分方程是数学各专业重要的基础课程之一。它在变量进入数学之后,成为人们探求各种自然规律的重要工具和“大众数学”观下解决实际问题的主渠道之一。它一方面运用所有数学学科的理论和方法来解决自身问题,同时又为其它数学学科提出了许多新的课题,无疑是数学的一个重要分支。

本书从常微分方程的可积类型入手,系统地介绍了常微分方程可积性理论的基本内容,主要包括:一阶微分方程的可积性;高阶微分方程的可积性;线性微分方程组的可积性和基本定理。参考近期成果,经过加工整理,给出了一些新的可积类型,如二阶变系数线性方程的可积性,在一定程度上丰富了常微分方程的可积性理论和教学内容。

本书在编写过程中体现了以下几点想法:

1)选取的内容比较集中,重点研究各种常微分方程的可积类型。作为研究的基础在最后一章给出了解得存在惟一性定理等基本定理。

2)注重其它学科知识的使用的选择。利用向量、矩阵等工具,使常微分方程组的叙述十分方便。关于常系数线性方程组的基解矩阵的计算,避免使用化矩阵为约当型和关于空间分解等较复杂的代数知识,而且利用哈密顿-凯莱定理,使问题解决更为简捷。

3)遵循“由浅入深,循序渐进”的原则,注意突出难点,既有主

要的传统内容，又对现代理论作了扼要介绍；既有基本解法又有理论概括，便于自学。

4）加强学生分析问题和解决问题能力的培养和训练。书中各部分内容均配有典型例子，每一节后都选配了习题，学生通过做习题这个环节，培养和提高了解题的能力和技巧。

本书第一、二、七章由张敬编写，第三、六章由周立群编写，第四、五章由孙福刚编写，张敬对全书进行了统编。

本书在编写过程中，参考了一些文献，并充分吸取其精华，在此向作者表示诚挚的谢意，并将其附于书末，供有兴趣的读者参考使用。

由于编者水平有限，尽管付诸许多努力，但书中仍难免存在不当和错误之处，恳请同行及读者批评指正。

编　者

2005 年 8 月

目　　录

第一章　绪　　论

数学分析中所研究的函数是反映客观现实世界运动过程中量与量之间的一种关系。但在大量的实际问题中遇到稍微复杂的一些运动过程时，反映运动规律的量与量之间的关系（即函数）往往不能直接写出来，却比较容易地建立这些变量和它们的导数（或微分）的关系式。这种联系着自变量，未知函数及其导数（或微分）的关系式，数学上称之为微分方程，当然这其中未知函数的导数或微分是不可缺少的。本章将通过几个具体的实例，介绍常微分方程的一些背景和方程的建立问题，讲述一些最基本的概念。

第一节　微分方程：某些物理过程的数学模型

常微分方程有着深刻而生动的实际背景，它在生产实践与科学技术中产生，是现代科学技术中分析问题与解决问题的一个强有力的工具，下面介绍几个物理学的例子。

例 1.1.1　在某介质中物体冷却过程的数学模型

将某物体放置于空气中，在时刻 $t=0$ 时，测量得它的温度为 $u_0=150℃$，10 分钟后测得温度为 $u_1=100℃$。求决定此物体的温度 u 和时间 t 的关系，并计算 20 分钟后物体的温度。这里我们假定空气的温度保持为 $u_a=24℃$。

为了解决上述问题，需要了解有关热力学的一些基本规律。在某种介质中的物体的冷却过程服从牛顿（Newton）冷却定律：物体温度的下降速度与该物体的温度和介质的温度之差成正比。

设物体在时刻 t 的温度为 $u=u(t)$，则温度的变化速度以 $\frac{du}{dt}$ 来

表示，由于热量总是从温度高的物体向温度低的物体传导的，因而 $u_0 > u_a$，所以温差 $u - u_a$ 恒正；又因物体将随时间延长而逐渐冷却，故温度变化速度$\frac{du}{dt}$恒负。因此由牛顿冷却定律得到

$$\frac{du}{dt} = -k(u - u_a) \qquad (1.1.1)$$

这里 $k>0$，是比例常数，方程(1.1.1)就是物体冷却过程的数学模型，它含有未知函数及其一阶导数$\frac{du}{dt}$，称其为一阶微分方程。

为了决定物体的温度 u 和时间 t 的关系，要从方程(1.1.1)中"解出"u，由于 u_a 是常数，且 $u - u_a > 0$，可将(1.1.1)改写成

$$\frac{d(u - u_a)}{u - u_a} = -kdt \qquad (1.1.2)$$

这样，变量 u 和 t 被"分离"开来，两边积分，得到

$$\ln(u - u_a) = -kt + \bar{c} \qquad (1.1.3)$$

这里 c 是任意常数。根据对数的定义，得到

$$u - u_a = e^{-kt + \bar{c}}$$

由此，令 $e^{\bar{c}} = c$，即得

$$u = u_a + ce^{-kt} \qquad (1.1.4)$$

根据初始条件：

$$\text{当 } t = 0 \text{ 时}, u = u_0$$

可确定任意常数 c 的数值，即

$$c = u_0 - u_a$$

于是

$$u = u_a + (u_0 - u_a)e^{-kt} \qquad (1.1.5)$$

如果 k 的数值确定了，(1.1.5)就完全决定了温度 u 和时间 t 的关系。

根据 $t = 10$，$u = u_1$ 得到

$$u_1 = u_2 + (u_0 - u_2)e^{-10k}$$

因此

$$k = \frac{1}{10}\ln\frac{u_0 - u_a}{u_1 - u_a}$$

用给定的 $u_0 = 150, u_1 = 100$ 和 $u_a = 24$ 代入,得到

$$k = \frac{1}{10}\ln 1.66 \approx 0.051$$

从而

$$u = 24 + 126e^{-0.051t} \tag{1.1.6}$$

这样,根据(1.1.6),就可计算出任何时刻 t 物体的温度 u 的数值了。例如在 20 分钟后物体的温度就是 $u_2 = 70$℃。

从例1.1.1可以大体总结出用微分方程解决实际问题的基本步骤:

①建立起实际问题的数学模型,也就是建立反映这个实际问题的微分方程;

②求解这个微分方程;

③用所得的数学结果解释实际问题,预测特定性质。

建立起实际问题的数学模型一般是比较困难的,因为这不仅需要对与问题有关的自然规律有一个清晰的了解,而且同时也需要有一定的数学知识。微分方程往往可以看做是各种不同物理现象的数学模型。在建立微分方程的时候,只能考虑影响这个物理现象的一些主要因素,而把一些次要因素忽略掉,以便建立起来的数学模型更为有用、合理。

下面再举几个例子说明如何建立微分方程的问题。至于如何求解这些微分方程,则可在以后各章再讨论。

例1.1.2　受空气阻力的自由落体

设质量为 m 的物体,在时间 $t = 0$ 时自由下落,在空气中受到的阻力与物体的下落速度成正比,求物体下落距离与时间的关系。

设物体下落的距离为 x,于是物体下落的速度为 $v = \frac{dx}{dt}$,加速度

为 $a=\frac{d^2x}{dt^2}$,根据牛顿第二定律 $F=ma$,可以列出方程

$$m\frac{d^2m}{dt^2}=-k\frac{dx}{dt}+mg$$

其中 k 为一正比例常数;右端第一项的负号表示阻力与 $\frac{dx}{dt}$ 方向相反。

例1.1.3　$R-L$ 电路

$R-L$ 电路包含电感 L,电阻 R 和电源 E。设 $t=0$ 时,电路中没有电流。建立当开关 k 合上后,电流 I 所满足的微分方程。这里假设 R,L,E 都是常数(如图1.1.1)。

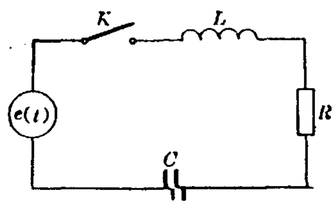


图 1.1.1

为了建立电路的微分方程,应熟知关于电路的基尔霍夫(Kirchhoff)第二定律:在闭合回路中,所有支路上的电压的代数和等于零。

因经过电阻 R 的电压降是 RI,经过电感 L 的电压降是 $L\frac{dI}{dt}$,由基尔霍夫第二定律得到

$$E-L\frac{dI}{dt}-RI=0$$

即

$$\frac{dI}{dt}+\frac{R}{L}I=\frac{E}{L}$$

求出的 $I=I(t)$ 应满足条件：

$$\text{当 } t=0 \text{ 时}, I=0$$

例 1.1.4　数学摆

数学摆是系于一根长度为 l 的线上，而质量为 m 的质点 M，在重力作用下，它在垂直于地面的平面上沿圆周运动，确定摆的运动方程（如图1.1.2）。

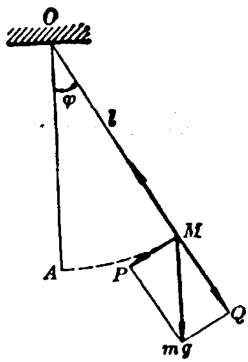


图 1.1.2

设取逆时针运动的方向。作为计算摆与铅垂线所成的角 φ 的正方向，质点 M 沿圆周的切向速度 v 可以表为 $v=l\dfrac{d\varphi}{dt}$，作用于质点 M 的重力 mg 将摆拉回平衡位置 A。把重力 mg 分解成为两个分量 $\overrightarrow{MQ}$ 和 $\overrightarrow{MP}$，第一个分量 $\overrightarrow{MQ}$ 沿着半径 OM 的方向，与线的拉力相抵消，它不会引起质点 M 的速度 v 的数值改变。第二个分量 $\overrightarrow{MP}$ 沿着圆周的切线方向，它引起质点 M 的速度的数值改变。因为 $\overrightarrow{MP}$ 总是使质点 M 向着平衡位置 A 的方向运动，即当 φ 角为正时，向减小 φ 的方向运动；当 φ 角为负时，向增大 φ 的方向运动，所以 $\overrightarrow{MP}$ 的数值等于 $-mg\sin\varphi$。因此摆的运动方程是

$$m\frac{dv}{dt}=-mg\sin\varphi$$

即

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi$$

以上列举出了微分方程的一些物理背景。在自然科学和技术科学的其它领域中,例如化学、生物学、电子技术等等,都提出了大量的微分方程问题。生产实践是微分方程理论取之不尽的源泉。此外,常微分方程与数学的其它分支的联系也非常密切。我们在学习的过程中既要注意它的实际背景与应用,又要重点应用数学方法研究微分方程本身的问题。要弄清微分方程的一些基本理论,掌握各种类型方程的求法,这是本课程的重点,也是解决实际问题的必要工具。

第二节 基 本 概 念

我们已经知道微分方程就是联系着自变量、未知函数及其导数的关系式。

下面是一些微分方程的例子：

$$\frac{dy}{dx} = 5x + 3 \tag{1.2.1}$$

$$e^{y}\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 \tag{1.2.2}$$

$$4\frac{d^3y}{dx^3} + (\sin x)\frac{d^2y}{dx^2} + 5xy = 0 \tag{1.2.3}$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 3y\left(\frac{dy}{dx}\right)^7 + y^3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 5x \tag{1.2.4}$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \tag{1.2.5}$$

若微分方程中自变量的个数只有一个，则称之为**常微分方程**；自变量的个数为两个或两个以上，则称之为**偏微分方程**。

方程(1.2.1)至(1.2.4)是常微分方程，而方程(1.2.5)是偏微分方程。

微分方程中出现的未知函数最高阶导数的阶数称为微分方程的阶数。

方程(1.2.1)是一阶微分方程，方程(1.2.2)、(1.2.4)、(1.2.5)是二阶微分方程，方程(1.2.3)是三阶微分方程。

一般的 n 阶常微分方程具有形式

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \tag{1.2.6}$$

这里 $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^ny}{dx^n}\right)$ 是 $x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^ny}{dx^n}$ 的已知函数，而且一定含

有$\frac{d^n y}{dx^n}$;y是未知函数,x是自变量。

我们在本书中仅讨论常微分方程,有时简称为方程。

如果方程(1.2.6)的左端为y及$\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^n y}{dx^n}$的一次有理整式,则称(1.2.6)为**$n$阶线性微分方程**。

方程(1.2.1)和(1.2.3)是线性方程,阶数分别为一阶、二阶。

一般n阶线性微分方程具有形式

$$\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=f(x) \quad (1.2.7)$$

这里$a_1(x),\cdots,a_{n-1}(x),a_n(x)$,$f(x)$是$x$的已知函数。

不是线性方程的方程称为非线性方程。方程(1.2.1)和(1.2.2)都是二阶非线性方程。

微分方程的主要问题之一就是求方程的解。一般地说,微分方程的解就是满足方程的函数,可定义如下:如果函数$y=\varphi(x)$代入方程(1.2.6)后,能使它变为恒等式,则称函数$y=\varphi(x)$为方程(1.2.6)的解。

例如,函数$y=e^x+c_1x+c_2$(其中c_1,c_2为任意常数)为微分方程$y''=e^x$的解。

如果关系式$\Phi(x,y)=0$所决定的隐函数$y=\varphi(x)$是方程(1.2.6)的解,则称$\Phi(x,y)=0$为方程(1.2.6)的隐式解。例如,一阶微分方程$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$有解$y=\sqrt{1-x^2}$和$y=-\sqrt{1-x^2}$,而关系式$x^2+y^2=1$就是此方程的隐式解。

为了简单起见,不把解和隐式解加以区分,统称为方程的解。

把含有n个独立的任意常数$c_1,c_2,\cdots,c_n$的解称为n阶方程(1.2.6)的**通解**。同样,也可以定义n阶方程的**隐式通解**。以后对它们不加区分,统称为方程的通解。

为了确定微分方程一个特定的解,通常给出这个解所必需满

足的条件,称为定解条件。常见的定解条件是初始条件。

方程(1.2.6)的初始条件是指如下的 n 个条件:

$$\text{当 } x=x_0 \text{ 时 } y=y_0,\frac{dy}{dx}=y_0^{(1)},\cdots,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=y_0^{(n-1)} \tag{1.2.8}$$

这里 $x_0,y_0,y_0^{(1)},\cdots,y_0^{(n-1)}$ 是给定的 $n+1$ 个常数。

初始条件(1.2.8)有时也写为

$$y(x_0)=y_0,\frac{dy(x_0)}{dx}=y_0^{(1)},\cdots,\frac{d^{n-1}y(x_0)}{dx}=y_0^{(n-1)}$$

求微分方程满足定解条件的解,称为定解问题。当定解条件为初始条件时,相应的定解问题,就成为**初值问题**。初值问题也常称为柯西(Cauchy)问题。

满足初始条件的解称为方程的**特解**。初始条件不同,对应的特解也不同。一般来说,特解可以通过初始条件的限制,从通解中确定任意常数而得到。

例如在第一节的例 1.1.1 中,含有一个任意常数 c 的解

$$u=u_a+ce^{-kt} \tag{1.1.4}$$

就是方程(1.1.1)的通解,而

$$u=u_a+(u_0-u_a)e^{-kt} \tag{1.1.5}$$

就是满足初始条件

$$\text{当 } t=0 \text{ 时}, u=u_0$$

的特解。特解(1.1.5)可以在通解中令 $c=u_0-u_a$ 而得到。

容易验证,二阶微分方程

$$y''+y=0$$

的通解为

$$y=c_1\sin x+c_2\cos x$$

这里 c_1,c_2 是任意常数;满足初始条件

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1,y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$$

的特解为

$$y = \sqrt{2}\cos x$$

可以在通解中令 $c_1 = 3, c_2 = -1$ 得到。

这一节主要是介绍常微分方程的一些最基本的概念，在以后将要讨论某些具体类型的常微分方程的初等解法。初等解法也称为初等积分法，是因为这些解法最后都把求解的问题化成求积分的问题。其实，常微分方程求解问题就是对求原函数或不定积分的推广。不定积分是已知未知函数的导数去求原函数，常微分方程则是已知未知函数的导数所满足的方程，求未知函数。初等解法就是将常微分方程的求解问题化成积分问题，并将方程的通解用初等函数或它的积分表达出来，凡是能做到这一点的常微分方程，称为可积的方程。

习　题

1. 指出下面微分方程的阶数，并回答方程是否是线性的。

(1) $\dfrac{dy}{dx} = 4x^2 - y$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 12xy = 0$

(3) $\dfrac{dy}{dx} - 4y^2 = 0$

(4) $\dfrac{d^4y}{dx^4} - 2\dfrac{d^3y}{dx^3} + \dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$

(5) $\sin\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right) + e^y = x$

2. 验证给出的函数是否为相应微分方程的解。

(1) $5\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 + 5x, y = \dfrac{x^3}{5} + \dfrac{x^2}{2} + c$

(2) $\dfrac{dy}{dx} = P(x)y, y = ce^{\int P(x)dx}$