

● 网络课程配套教材

配有教学软件

概率论与数理统计 三十三讲 (第二版)

——学习指导与习题解答

魏振军 刘璐 编著



中国统计出版社
China Statistics Press

● 网络课程配套教材

配有教学软件

概率论与数理统计 三十三讲 (第二版)

——学习指导与习题解答

魏振军 刘璐 编著



中国统计出版社
China Statistics Press

(京)新登字 041 号

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计三十三讲(第二版):学习指导与习题解答/魏振军、刘璐编.

—北京:中国统计出版社,2006.7

ISBN 7-5037-5041-3

I. 概…

II. ①魏… ②刘…

III. ①概率论—自学参考资料 ②数理统计—自学参考资料

IV. 021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 073154 号

概率论与数理统计三十三讲(第二版):学习指导与习题解答

作 者/魏振军 刘 璐

责任编辑/吕 军

装帧设计/艺编广告

出版发行/中国统计出版社

通信地址/北京市西城区月坛南街 57 号 邮政编码/100826

办公地址/北京市丰台区西三环南路甲 6 号

电 话/邮购(010)63376907 书店(010)68783172

印 刷/河北天普润印刷厂

经 销/新华书店

开 本/787×1092mm 1/18

字 数/270 千字

印 张/15.75

印 数/1—5000 册

版 别/2006 年 10 月第 1 版

版 次/2006 年 10 月第 1 次印刷

书 号/ISBN 7-5037-5041-3/O·58

定 价/27.00 元

中国统计版图书,版权所有。侵权必究。

中国统计版图书,如有印装错误,本社发行部负责调换。

前 言

2000 年以来,中国统计出版社两版发行魏振军编著的教材《概率论与数理统计三十三讲》及配套电子教材。教材在继承同类著作经典体系的基础上,融入了作者对本课程教学内容的研究和思考,尝试将计算机技术应用于概率统计教学,强化理论联系实际,着意引导学生自主学习。

为了方便这门课程的教与学,在中国统计出版社的支持下,我们编写了这本与教材配套的《学习指导与习题解答》,可以说是对教材的补充。其目的是帮助通过各种方式学习本课程的读者正确理解教学内容,在没有教师指导的情况下检查学习效果,学以致用。对于使用《概率论与数理统计三十三讲》(第二版)教材的教师,也具有参考价值。

《概率论与数理统计三十三讲》(第二版)教材中每章都有内容提要、教学基本要求、重点与难点等纲目,这些在本书不再重复。本书主要包括下述三部分内容:

1. 各章“知识结构框图”;

给出这些框图的目的是提醒学生,在学习一项知识时,应该注意前后知识的联系,从知识点的联系中把握和理解学科的完整结构。这样作不仅有助于记忆和应用,也是发现问题、分析和解决问题的重要基础。

2. 各章“重点难点解析”;

对各章的重点和难点作了进一步的归纳和说明。

3. 各章“思考与练习及解答”;

教材各讲后的思考与练习共 358 道题,加上最后的 50 道总复习题,共计 408 道。涵盖了课程的主要知识点,其中不乏联系实际的应用题。希望学习这门课程的读者能尽可能地独立完成一些练习。由于一些自学者没有教师批改作业的条件,我们给出大多数思考与练习以及总复习题的参考解答,目的决不是要大家走捷径。奉劝读者在未经独立思考之前,不要轻易去看解答。我们更希望读者给出优于本书所给的解题方法,并进行深入的思考。

4. 书中所附光盘提供本了课程全部作业讲评的电子教案及部分供学生自我检查的自测题。

读者完成作业后很想知道自己的解答思路和方法是否正确,配套的作业讲评是在教学过程中陆续使用并不断完善的。建议读者在完成作业后再看。教师也可在讲评作业中使用。这里的自测题以选择题的形式出现,供读者复习基本概念使用。

我校张新建教员曾详细审阅本书稿,并提出宝贵意见。在此表示衷心的感谢。

受编者水平所限,书稿及所配光盘内容会有不当及错误之处,恳请同行专家及读者批评指正。

魏振军 刘 璐

2006 年 6 月 18 日

目 录

课程内容总框图

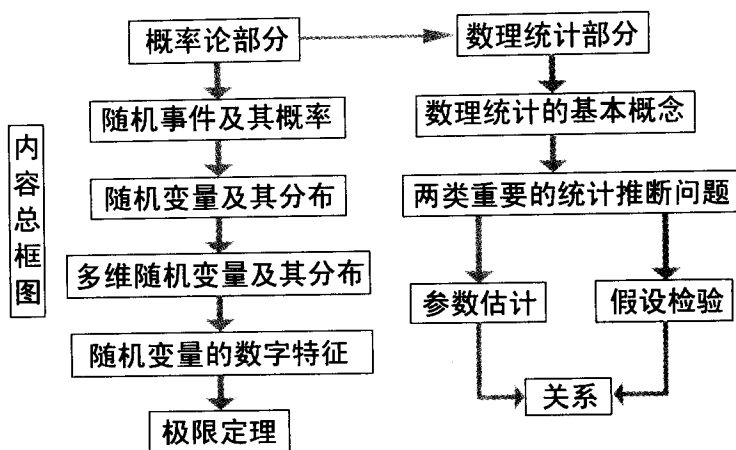
第一章 随机事件及其概率	(1)
1.1 内容框图	(1)
1.2 重点、难点解析	(2)
1.2.1 四个基本概念	(2)
1.2.2 几个重要公式	(8)
1.2.3 古典概型中的概率计算	(10)
1.3 思考与练习	(14)
1.3.1 思考与练习(1)	(14)
1.3.2 思考与练习(2)	(15)
1.3.3 思考与练习(3)	(17)
1.3.4 思考与练习(4)	(19)
1.3.5 思考与练习(5)	(20)
1.3.6 思考与练习(6)	(20)
1.3.7 思考与练习(7)	(21)
1.3.8 思考与练习(8)	(22)
1.3.9 思考与练习(9)	(24)
1.4 思考与练习参考解答	(25)
1.4.1 思考与练习(1)解答	(25)
1.4.2 思考与练习(2)解答	(25)
1.4.3 思考与练习(3)解答	(27)
1.4.4 思考与练习(4)解答	(31)
1.4.5 思考与练习(5)解答	(32)
1.4.6 思考与练习(6)解答	(33)
1.4.7 思考与练习(7)解答	(34)

1.4.8 思考与练习(8)解答	(37)
1.4.9 思考与练习(9)解答	(39)
第二章 随机变量及其分布	(43)
2.1 内容框图	(43)
2.2 重点、难点解析	(43)
2.2.1 四个基本概念	(43)
2.2.2 随机变量函数的分布	(47)
2.2.3 三个重要的分布	(48)
2.2.4 二项分布的泊松近似与二项分布的正态近似	(49)
2.3 思考与练习	(51)
2.3.1 思考与练习(10)	(51)
2.3.2 思考与练习(11)	(51)
2.3.3 思考与练习(12)	(52)
2.3.4 思考与练习(13)	(53)
2.3.5 思考与练习(14)	(54)
2.3.6 思考与练习(15)	(55)
2.3.7 思考与练习(16)	(56)
2.3.8 思考与练习(17)	(57)
2.4 思考与练习参考解答	(58)
2.3.1 思考与练习(10)解答	(58)
2.3.2 思考与练习(11)解答	(58)
2.3.3 思考与练习(12)解答	(60)
2.3.4 思考与练习(13)解答	(62)
2.3.5 思考与练习(14)解答	(65)
2.3.6 思考与练习(15)解答	(67)
2.3.7 思考与练习(16)解答	(71)
2.3.8 思考与练习(17)解答	(73)
第三章 多维随机变量及其分布	(77)
3.1 内容框图	(77)
3.2 重点、难点解析	(77)
3.2.1 联合分布与边缘分布的关系及边缘密度概率的计算 ...	(77)

3.2.2 随机变量的独立性	(80)
3.2.3 条件分布	(80)
3.2.4 随机向量函数的分布	(82)
3.3 思考与练习	(86)
3.3.1 思考与练习(18)	(86)
3.3.2 思考与练习(19)	(87)
3.3.3 思考与练习(20)	(88)
3.3.4 思考与练习(21)	(89)
3.4 思考与练习参考解答	(91)
3.3.1 思考与练习(18)解答	(91)
3.3.2 思考与练习(19)解答	(95)
3.3.3 思考与练习(20)解答	(100)
3.3.4 思考与练习(21)解答	(104)
第四章 随机变量的数字特征	(111)
4.1 内容框图	(111)
4.2 重点、难点解析	(111)
4.2.1 三个基本概念	(111)
4.2.2 期望、方差等的计算	(113)
4.2.3 一个重要的不等式——切比雪夫不等式	(116)
4.3 思考与练习	(117)
4.3.1 思考与练习(22)	(117)
4.3.2 思考与练习(23)	(119)
4.3.3 思考与练习(24)	(120)
4.4 思考与练习参考解答	(121)
4.4.1 思考与练习(22)解答	(121)
4.4.2 思考与练习(23)解答	(127)
4.4.3 思考与练习(24)解答	(130)
第五章 极限定理	(134)
5.1 内容框图	(134)
5.2 重点、难点解析	(134)
5.2.1 大数定律	(135)

5.2.2 中心极限定理	(137)
5.3 思考与练习	(141)
5.3.1 思考与练习(25)	(141)
5.3.2 思考与练习(26)	(142)
5.4 思考与练习参考解答	(143)
5.4.1 思考与练习(25)	(143)
5.4.2 思考与练习(26)	(145)
第六章 数理统计的基本概念	(151)
6.1 内容框图	(151)
6.2 重点、难点解析	(151)
6.2.1 总体和样本	(151)
6.2.2 统计量	(152)
6.2.3 抽样分布	(153)
6.2.4 举例	(154)
6.3 思考与练习	(157)
6.3.1 思考与练习(27)	(157)
6.3.2 思考与练习(28)	(157)
6.4 思考与练习参考解答	(159)
6.4.1 思考与练习(27)	(159)
6.4.2 思考与练习(28)	(159)
第七章 参数估计	(165)
7.1 内容框图	(165)
7.2 重点、难点解析	(165)
7.2.1 参数的点估计	(165)
7.2.2 参数的区间估计	(168)
7.2.3 正态总体均值和方差的置信区间	(170)
7.3 思考与练习	(171)
7.3.1 思考与练习(29)	(171)
7.3.2 思考与练习(30)	(173)
7.4 思考与练习参考解答	(175)
7.4.1 思考与练习(29)解答	(175)

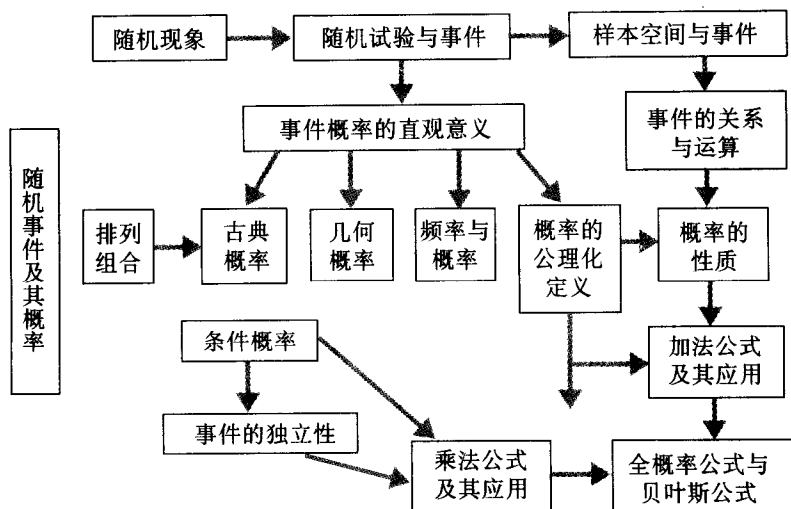
7.4.2 思考与练习(30)解答	(184)
第八章 假设检验	(191)
8.1 内容框图	(191)
8.2 重点、难点解析	(191)
8.2.1 假设检验的基本概念	(191)
8.2.2 假设检验的一般步骤	(195)
8.2.3 单个及两个正态总体均值和方差的假设检验	(196)
8.3 思考与练习	(197)
8.3.1 思考与练习(31)	(197)
8.3.2 思考与练习(32)	(202)
8.4 思考与练习参考解答	(203)
8.4.1 思考与练习(31)解答	(203)
8.4.2 思考与练习(32)解答	(211)
总复习题	(214)
总复习题解答	(220)
参考文献	(239)



课程内容总框图

第一章 随机事件及其概率

1.1 内容框图



第一章内容总框图

1.2 重点、难点解析

1.2.1 四个基本概念

一、随机事件

在随机试验中,可能发生也可能不发生的事件,称为随机事件.

随机事件具有以下特点:

首先,随机事件的发生具有偶然性. 在一次试验中,可能发生,也可能不发生. 例如,抛掷一枚硬币,“出现正面”就是一个随机事件. 某个人“购买彩票中大奖”也是一个随机事件.

其次,在大量重复试验中,随机事件的发生具有某种规律性. 例如,在掷骰子试验中,“掷出1点”是一个随机事件,在大量重复试验中,该事件出现的频率,稳定地在 $1/6$ 附近摆动,并且一般来说,摆动的幅度随着试验次数的增大而变小.

对于事件的运算,要熟悉事件的和、积及对立事件.

对于一个具体事件,要会用数学符号来表示;反之,对于用符号表示的事件,要清楚其具体含义是什么. 也就是说,要正确无误地“互译”.

例 1.1 从一批产品中任取两件,观察合格品的情况. 记 $A = \{\text{两件产品都是合格品}\}$,初学者往往误认为 $\bar{A} = \{\text{两件产品都是不合格品}\}$. 我们知道 $\bar{A}$ 是 A 的对立事件,它表示 A 不出现或者说是 A 的否定. 所以, $\bar{A} = \{\text{两件产品不都是合格品}\}$. 但在概率论里,常常叙述为 $\bar{A} = \{\text{两件产品至少有一件是不合格品}\}$. 而它又可写为两个互不相容事件之和: $\bar{A} = \{\text{两件产品恰有一件是不合格品}\} \cup \{\text{两件产品都是不合格品}\}$. 若记 $B_i = \{\text{取出第 } i \text{ 件是合格品}\}$, $i = 1, 2$. 则 $A = B_1 B_2$, 而

$$\bar{A} = \overline{B_1 B_2} = \bar{B}_1 + \bar{B}_2 = \bar{B}_1 B_2 + B_1 \bar{B}_2 + \bar{B}_1 \bar{B}_2$$

注意互斥与互逆的区别:

两事件 A, B 互斥,是指 A, B 不可能同时发生,即 $AB = \phi$.

两事件 A, B 互逆或互为对立事件,除要求 A, B 互斥外,还要求 $A + B = S$, 即 $A + B$ 是必然事件. 于是有 $\bar{A} = B, \bar{B} = A$

注意 n 个事件互斥与两两互斥的区别:

若 n 个事件中任意两个事件都互斥,则称这 n 个事件互斥. 所以,若 n 个事件互斥,则其中任意两个事件都互斥.

二、概率

概率简单来说就是一个在 0 和 1 之间的数,用来度量在一定条件下事件发生的可能性大小.两个极端情况是,在一定条件下必定发生的事件,其概率为 1.在一定条件下不可能发生的事件,其概率为 0.任一事件的概率在 0 和 1 之间.

我们用 $P(A)$ 表示事件 A 的概率,用 S 表示必然事件,用 ϕ 表示不可能事件,则有:

$$P(S)=1, P(\phi)=0, 0 \leq P(A) \leq 1$$

本章介绍了定义和确定概率的五种方法:

1. 古典方法:

若所涉及的随机试验满足下述两个条件:

- (1) 它的样本空间 S 只有有限多个样本点(或基本事件);
- (2) 每个样本点(或基本事件)出现的可能性相同(简称等可能性).

称这种试验为有穷等可能随机试验或古典概型.

古典概型中事件的概率计算

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{A \text{ 包含的样本点数}}{S \text{ 中样本点的总数}} = \frac{\text{事件 } A \text{ 包含的基本事件数}}{S \text{ 中基本事件的总数}}$$

称此概率为古典概率.这种确定概率的方法称为古典方法.

对于古典概型,只要知道事件 A 所包含的基本事件数和样本空间基本事件总数,就可求得事件 A 的概率.这样就把求概率问题转化为计数问题.排列组合是计算古典概率的重要工具.

2. 几何方法:

把等可能推广到无限个样本点的场合,人们引入了几何概型.由此形成了确定概率的另一方法——几何方法.

向一个有限区域 S 中任意投掷一质点,假定随机点落入该区域的任一小区域 A 的可能性与小区域 A 的测度(可以是长度、面积或体积等)成正比,而与 A 的位置与形状无关,称这种随机试验为几何概型.

几何概型中事件的概率计算:

如果“点落入小区域 A ”这一随机事件仍记作 A ,则

$$P(A) = A \text{ 的测度} / S \text{ 的测度}$$

这样算出的概率称为几何概率.这种确定概率的方法称为几何方法.

3. 频率方法

这种方法是基于大量试验或观察中事件出现的频率,要求所涉及的随机现象允许进行大量重复.

假如在 N 次重复试验中,事件 A 出现 k_N 次,则事件 A 在这 N 次试验中出现的频率为

$$f_N(A) = \frac{k_N}{N} = \frac{\text{事件 } A \text{ 出现次数}}{\text{重复试验次数}}$$

由频率的定义可见,如果事件 A 出现的频率越大,也就是说,它发生的越频繁,那么就意味着它在一次试验中发生的可能性越大。可见,频率和概率有着密切的关系。

(1)随着重复次数 N 的增加,频率 $f_N(A)$ 逐渐稳定在某一常数附近,这个频率的稳定值已与 N 无关,它就是事件 A 发生的概率 $P(A)$ 。所以我们说,概率是频率稳定性的依据,是随机事件规律的一个体现。

(2)现实世界中,无限次重复是不可能的,只要重复次数足够多,可用频率近似概率,实际使用中大多数概率就是用频率近似得到的。而且重复的次数越多,一般来说,估计的准确度越高。

4. 主观方法

一个事件 A 的概率就是人们根据经验对该事件发生可能性所给出的个人信念,这样给出的概率称为主观概率,主观概率主要用于不能大量重复的随机现象场合,它是建立在人类经验基础上的,要与主观臆造区分开来。

5. 公理化方法

设 E 是随机试验, S 是它的样本空间,对于 E 中的每一个事件 A ,赋予一个实数,记为 $P(A)$,称为事件 A 的概率,如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下述三条公理。

公理 1 $0 \leq P(A) \leq 1$

公理 2 $P(S) = 1$

公理 3 若事件 $A_1, A_2, \dots$ 两两互不相容,则有

$$P(A_1 + A_2 + \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$$

这里事件个数可以是有限或无限的。

由前苏联数学家柯尔莫哥洛夫建立的概率的公理,给出了概率这个概念所必须满足的最基本的性质,但它没有也不可能解决在特定场合下如何定出概率的问题。公理的意义在于它为一种普遍而严格的数学化概率理论奠定了基础。

由概率的公理,可以推导出概率的若干性质。这些性质在计算概率时很有用。

下面是几个常用的性质:

性质 1 对任一事件 A ,有

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

性质 2 $P(\phi)=0$

性质 3 设 A, B 是两个事件, 若 $A \subset B$, 则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A)$$

$$P(B) \geq P(A)$$

性质 4 对任意两事件 A, B , 有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

三、条件概率

1. 条件概率 $P(A|B)$ 与概率 $P(A)$ 的区别

每一个随机试验都是在一定条件下进行的. 设 A 是随机试验的一个事件, 则 $P(A)$ 是在一定条件下事件 A 发生的可能性大小. 而条件概率 $P(A|B)$ 是指在原条件下又添加“ B 发生”这个条件时 A 发生的可能性大小, 即 $P(A|B)$ 仍是概率. $P(A|B)$ 与 $P(A)$ 的区别在于两者发生的条件不同. 它们是两个不同的概念, 在数值上一般也不相同.

2. 条件概率 $P(A|B)$ 与概率 $P(A)$ 的数值关系

条件概率 $P(A|B)$ 是在随机试验条件下又添加“ B 发生”这个条件时 A 发生的可能性大小, 既然添加了新的条件, 是否一定有 $P(A|B) \geq P(A)$ 呢? 请看下面几种情形:

(1) A, B 互不相容, 即 $AB=\phi, P(AB)=0$.

$$\text{由于 } P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = 0$$

故有 $P(A|B) \leq P(A)$

(2) $A \subset B$, 此时, $P(AB)=P(A)$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} \geq P(A)$$

(3) $B \subset A$, 此时, $P(AB)=P(B)$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1 \geq P(A)$$

(4) A, B 既不是互不相容又不是有包含关系

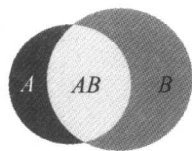
例如, $P(A)=0.4, P(B)=0.5, P(AB)>0$, 对以下三种情况, 我们得到三种不同的结论:

$$(a) P(AB)=0.38, P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0.38}{0.50} = 0.76 > P(A)$$

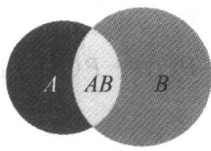
$$(b) P(AB) = 0.20, P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0.20}{0.50} = 0.4 = P(A)$$

$$(c) P(AB) = 0.10, P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0.10}{0.50} = 0.2 < P(A)$$

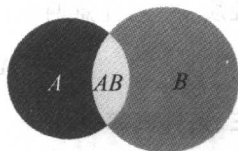
如图 1.1 所示.



(a) $P(A|B) > P(A)$



(b) $P(A|B) = P(A)$



(c) $P(A|B) < P(A)$

图 1.1

在这种情形,若不知 $P(AB)$ 的具体大小,我们不能对 $P(A|B)$ 和 $P(A)$ 的相对大小做出任何结论.

现在,你可以对条件概率 $P(A|B)$ 与概率 $P(A)$ 的数值关系做出回答了.

3. 条件概率 $P(A|B)$ 与概率 $P(AB)$ 的区别

这也是初学者容易混淆的问题之一,尤其在实际问题的计算中,初学者往往分不清求的是 $P(A|B)$ 还是 $P(AB)$.

$P(A|B)$ 是指在 B 发生的条件下 A 发生的概率,而 $P(AB)$ 是指 AB 都发生的概率,因而,“ B 发生”在 $P(A|B)$ 中是作为条件,而在 $P(AB)$ 中是作为结果,所以两者完全不同.

例 1.2 甲、乙两厂共同生产 1000 个零件,其中 300 个是乙厂生产的,而在这 300 个零件中,有 189 个是标准件. 现从这 1000 个零件中任取一件,问这个零件是乙厂生产的标准件的概率是多少?

我们令 $B = \{\text{取一个是乙厂生产的}\}$, $A = \{\text{取一个是标准件}\}$

则所求为

$$P(BA) = \frac{189}{1000} = 0.189$$

即从 1000 个零件中任取一件是乙厂生产的标准件的概率.

若将本例后半部分改为:现从这 1000 个零件中任取一件,发现它是乙厂生产的,问它是标准件的概率是多少? 这里求的就是 $P(A|B)$.

$$P(A|B) = \frac{189}{300} = 0.63$$

它等于在乙厂生产的零件中任取一件是标准件的概率.

四、独立性

独立性的概念在概率理论及应用中都起着重要的作用. 如果事件是独立的, 则许多概率的计算就可以得到简化.

1. 正确理解独立的概念

两事件独立的定义比较简单, 即若两事件 A, B 满足

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

则称事件 A, B 相互独立.

通过对教材上的例子进行讨论, 我们知道所谓事件 A, B 相互独立, 就是一个事件的发生并不影响另一个事件发生的概率. 当 $P(B) \neq 0$ 时, $P(AB) = P(A)P(B)$ 等价于 $P(A|B) = P(A)$, 也常利用这个事实来判断两事件是否独立.

在实际应用中, 我们常常不是根据定义来判断两事件是否独立, 而是根据问题的实际意义来做出判断.

例如, 甲、乙两人同时向一目标射击, 显然可以认为甲命中(乙命中)并不影响乙命中(甲命中)的概率, 即事件“甲命中”与“乙命中”是相互独立的. 同理, 可以认为“甲命中”与“乙未命中”、“甲未命中”与“乙命中”以及“甲未命中”与“乙未命中”也都是相互独立的.

又如, 掷一颗骰子, “出偶数点”与“出 2 点”不是相互独立的. 因为当“出偶数点”发生, “出 2 点”的概率由原来的 $1/6$ 增加到 $1/3$. 而当“出 2 点”发生, “出偶数点”的概率由 $1/2$ 增加到 1. 也就是说, 一个事件的发生影响到另一个事件发生的概率.

而三个事件 A, B, C 相互独立, 则要求 4 个等式同时成立, 即

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

$$P(BC) = P(B)P(C)$$

$$P(AC) = P(A)P(C)$$

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$$

$n(n > 3)$ 个事件相互独立, 则要求 $C_n^2 + C_n^3 + \cdots + C_n^n = 2^n - n - 1$ 个等式同时成立.

2. 独立与互斥的区别

两个事件互斥是指两个事件不可能同时发生, 因而, 当两个事件的概率都大于 0 时, 若它们互斥, 一个事件的发生必导致另一个事件不发生, 即一个事件的发生影响另一个事件发生的概率, 所以两个事件不独立. 反之, 若它们相互独立, 即一个事件是否发生对另一个事件的概率没有影响, 当然推不出: 一个事件