中学数学教学指导之二

Gaodeng shuxuejichu zhishijiaoxue

高等数学基础知识教学

金昭范编著

河南人民出版社

中学数学教学指导之二

高等数学基础知识教学

金昭范　编著

河南人民出版社

中学数学教学指导之二

高等数学基础知识教学

金昭范　编著

责任编辑　温光

河南人民出版社出版

河南省焦作市　印刷厂印刷

河南省新华书店发行

787×1092毫米32开本　9.25印张　196千字

1983年8月第1版　1983年8月第1次印刷

印数：　1－9,300册

统一书号　7105·332　定价0.87元

出 版 说 明

为了帮助广大中学数学教师提高教学质量，根据现行数学教材和教学大纲的内容与精神，我们编辑出版了这一套《中学数学教学指导》丛书。这套书将分三册陆续出版，书目如下：

1.传统教材重点和难点的教学；

2.高等数学基础知识教学；

3.中学数学教学的艺术。

本书的作者金昭范同志，是从事中学数学教学四十余年的一级数学教师。这套丛书紧密联系中学数学教学的实际，有理论、有实践，内容丰富，是作者多年宝贵教学经验的结晶。我们真诚希望这一套丛书的出版，将会对广大中学数学教师的教学工作有所帮助。

前　　言

我从事数学教学四十多年，晚年不幸跌伤致残。在帮助学生复习中学数学时，我将自己多年的教学实践和体会加以回顾整理，遂编写成《中学数学复习》（已由河南人民出版社出版）和《中学数学教学指导》（将分三册由河南人民出版社陆续出版），愿为祖国四化作绵薄贡献。

《中学数学教学指导》丛书是根据中学通用教材和教学大纲的精神和内容，将其中的重点和难点问题，结合个人的体会，提出教法和应注意的事项，供中学数学教师教学时参考。

这套丛书包括三部分内容：

1.重点和难点教学。这部分以精简的传统中学数学教材内容为主，选例说明，力求加强数学各科知识间的联系，并在此基础上，对现行教材内容作适当地拓宽、加深和提高。

2.中学教材中新增加的与高等数学有关的基础知识的教学。这部分编选了丰富的资料，供教学中参考使用。

3.教学经验和体会。这部分除对一般的教法加以探讨外，由于几何是训练学生逻辑思维和空间想象能力的重要一环，故特作专章论述。

以上三部分均配有足够分量的精选例题和习题（附提示或答案），可供教师教学时作补充举例或布置作业时选用。

考虑到读者阅读时的方便，我们将以上三部分内容分三册分别出版。本书是其中的第二册，它着重分析和阐述中学

教材中新增加的与高等数学有关的内容，并将教材中的传统内容与下放的高等数学知识有机地加以联系。本书可为广大中学数学教师进行高等数学基础知识的教学，提供丰富的资料和有效的教学方法。

因限于个人水平，书中对教法的建议和对知识的理解难免有错漏之处，望读者酌情取舍并批评指正。

编　者

1982年7月

目　　录

第一章　极限的教学

一、引　　言

1.极限理论的作用和特殊意义

（1）为进一步学习函数和数学分析课程打下基础.

（2）能简化初等数学问题的叙述和计算，解决它难以解答的问题.

（3）为学习其它自然科学和工程技术提供所必需的知识.

数学分析所运用的、经历了许多世纪方才提炼成的基本推理工具，就是所谓的“无穷小法”．其实质上完全相同的说法，就是“极限法”．

初等数学中的推理步骤是依据形式逻辑，计算法则限于有穷次数，这种方法虽然不失其正确周密性，但所解决的问题仍是个别的和零碎的.而高等数学则运用辩证唯物主义观点辅之有力的工具——极限理论，对客观世界的诸事物深刻彻底地予以研究解决.例如：初等数学中虽已经知道了三角形及圆的周长和面积的算法，但不能解决更一般的曲线及所围成图形的计算；而在高等数学中，由于运用极限理论研究最一般的函数曲线形态变化，使许多问题得到普遍的解决.至于其他一些特殊问题，如圆、椭圆问题等等，就更能简单明了地获得圆满的解决；况且，初等数学中所用的割圆术，也是以极

限概念为基础的。因此，可以说极限理论在生产实践和科学理论研究上起着头等重要的作用。高中数学课中“极限”这一章内容最难被学生领会，其原因除问题实质上的复杂性外，这一内容在其它部分教材中使用很少，使学生不能充分得到练习，加上教学时间紧，教法研究不充分，就很难使学生深入正确地理解。新颁《中学数学教学大纲》中规定，全日制十年制学校高二的教学内容，《数列和极限》一单元是在等差、等比数列学习的基础上讲授极限概念，还提到函数的极限和极限的算法以及两个重要极限问题。由于在高中阶段加入学习导数和简易微积分，这就使对总结复习极限理论有了良好条件，并可深入提高。

2.要做到正确理解极限基本概念

（1）必须正确运用绝对值的基本关系式。

（2）了解构成数列的特点。数列是从研究间断的变量着手，并明确指出它的特点是可以编号的变量；也就是可以与自然数列建立一一对应关系的变量称为数列。

（3）以研究极限定义为重点。应当注意的是先让学生正确的朴素的理解，这比使他们一知半解或不理解要好得多。这就要多采用直观讲法，层层深入；要防止新概念的成堆提出(如有界、单调、连续、不定形等等)。切忌在学生对严格定义没有从直观确信它必须那样定义之前，就提了出来。

（4）在对数列的极限理解比较深透后，函数的极限就可根据极限归并原则，用数列的极限来理解。这样类比解决，较为省力。

（5）求极限的法则是基于四个基本定理，证法也易为学生理解，重点要放在解算问题时的不定形——无意义的代数

式的情况，要很好地解决。

3.证明极限有关定理的几种方法

（1）以无穷小理论作基础.这种方法的顺序是：引入无穷小量概念——证明其基本定理（变量被看作是连续的）——给出任意的变量的极限定义——引出基本定理并证明（然后再考虑数列、连续变量的极限求值问题）。

（2）用 ε 方法。这种方法是完全不给出无穷小量概念。其顺序是：从数列的研究开始叙述——分析数列变化的情况、提出趋近于零的数列——建立极限概念、指出数列是整序变量为函数的特殊情况——定义函数极限、引出定理、用 ε 法证明（然后再进行有关计算）。

（3）混合方法。用 ε——δ 方法证明无穷小量定理，给出极限概念，提出定理，而后用无穷小量证明。

笔者认为，考虑到照顾中学生的接受能力，及新编中学数学教材的内容设置，以采用第二方法为宜，所以本文讨论问题的方法也以此为准。

4.应注意的问题

（1）选例从学生实际情况出发，问题不必过于复杂，但讲解深度应比平时加大。要注意解决以前遗留问题。语言文字叙述以易于理解为准则。

（2）通过类比应有意识地把数列极限与函数极限归并起来，以便于掌握计算法则。

（3）定义极限，应逐步达到严密正确，并总结出 n、N、ε、a、u_n 间的制约关系。还应通过作业练习，检查学生是否真正理解。因此，习题可随进度分散布置。

（4）上述方案虽未提出无穷小概念，而实际已做好学习

无穷小理论的准备，这方面知识内容（包括无穷大），可斟酌讲授或自修学习.

（5）学习不定形求极限，若函数$f(x)$当$x=c$时，$f(c)$虽无意义，但在其左右的极限都存在且彼此相等，照定值法应认为这是当$x=c$时的函数值. 因为补上此点，函数平滑连续地通过. 可以用图示说明，使学生深入了解极限的几何意义.

5.关于极限教学的具体建议

（1）建立极限概念，明确严密定义的实质，为求极限定理法则作基础.

（2）对比数列极限与函数极限的关系，统一两者的极限理论.

（3）学会用一般代数法则求极限，了解极限存在的充分条件.

（4）介绍用导数求极限法则，讲明不定形求值对函数图形的意义.

基于以上各点，本章在具体内容上就以下各专题，依次论述:

Ⅰ问题的提出——无穷运算与数列:

i. 什么是有穷运算与无穷运算？无穷运算才会有极限问题.

ii. 数列的定义，它是有一定规律的，与自然数建立一一对应的关系.

iii. 数列的无穷运算有无唯一的结果、能否写成统一公式，则不一定.

Ⅱ数列极限的定义:

i. 数列的严密定义，定义中的u_n、ε、n、N、a的实质和联系。

ii. 已知$\{u_n\}$的极限是a，在给定正数ε时，怎样求出N？怎样证明a是它的极限？

Ⅲ 数列有极限时的情况及趋近方式：

i. 性质定理一、二、三。极限具有唯一性、有界性和三数列趋于同一极限的情况。

ii. 趋近极限的方式：i）一直大于其极限；ii）一直小于其极限；iii）一直在极限的近旁摆动；iv）变化过程中，无穷多次取得其极限值。

Ⅳ 判断极限存在的条件：

i. 充分条件：单调增而有上界或单调减而有下界的数列必有极限。

ii. 充要条件：柯西审敛准则。

Ⅴ 函数的极限及定理：

i. 用数列极限来理解函数极限并定义它。

ii. 函数$f(x)$在$x\to c$时的极限。

iii. 函数$f(x)$在$x\to c$时极限不存在的情况。

iv. 极限计算的基本定理。

二、问题的提出——无穷运算的数列举例

数学中有很大一部分内容是讲计算方法的。凡是计算方法都要求能得出唯一的结果，否则，它就没有意义了。例如：$3+2$，$3-5$，-6×2，$64.2\div3$，$\sqrt{15129}$，…按照一定方法算下去，经过有限的步骤，便可得出了唯一的答案。这就

叫做有限运算。但是有许多问题并不像这样简单。例如$1\div3$和$\sqrt{5}$，若按照除法和开方法则算下去，终不能使它的余数变为零，像这样演算工作永不停止的运算，就不是有限运算了。这样的事例很多，下面举几个例子。

例 1 一个等腰直角三角形CAB，它的直角边长为1，从B点作BC的垂线与CA延长线交于M。从直角顶A作$AB_1\perp BM$，再作$B_1A_1\perp CM$，再作$A_1B_2\perp BM$，$B_2A_2\perp CM$，…这样继续下去，则随着三角形的个数的增加，面积和逐渐增大而接近于$\triangle BCM$的面积．易知$\triangle BCM=\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=1$.

实际上若用S_1、S_2、S_3、…分别表示$Rt\triangle CAB$、$Rt\triangle AB_1B$、$Rt\triangle B_1A_1A$、…的面积，就可得到一列的数：$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{7}{8}$，…这里文字列与数字列有一一对应的关系。我们还可以用$S_n=\frac{2^n-1}{2^n}$作为代表项，也就是通项公式，又$\triangle BCM-S_n=\frac{1}{2^n}$。显然，当计算次数愈多，$S_n$的值愈逐渐接近于$\triangle BCM$的值，就是说与1的差愈小，但总是以1为限度．这个意思可用$\underset{n\to\infty}{S_n\to1}$或$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$表达。

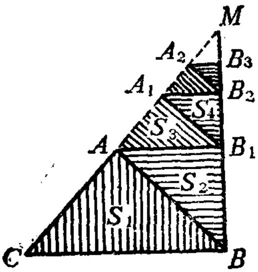


图 1

由例1，于是我们可以定义数列：

定义 遵照一定规律、用自然数编号构成的一列数，叫做数列，用$\{u_n\}$表之（$n=1，2，3，\cdots$）。

例 2 给定一个正方形$ABCD$，它的每边长是1. 作出它的对角线. 然后经过它的顶点，作对角线的平行线，得出正方形$A_1B_1C_1D_1$；再作正方A_1C_1的对角线和平行线，得出正方形A_2C_2；…这样继续作下去以至无穷. 若以u_1，u_2，u_3，…分别表示□A_1C_1，□A_2C_2…的面积，就可得出数列：

$$2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ \cdots,\ 2^n,\ \cdots$$

与它一一对应；通项公式为$u_n=2^n$. u_n的改变，也是随着自然数列（即计算次数逐一增加）的增加而变大，但结果是没有一个固定的数作界限. 也就是说，没有数来限制它，叫做u_n趋向于无穷大. 这样例1说成是有极限，例2是无极限的一个例子. 为书写方便也写成$u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$或用$\lim\limits_{n\to\infty} u_n=\infty$表示.

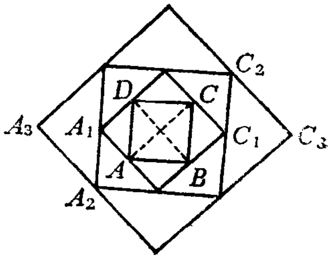


图 2

现在，可以小结如下：

（1）有限运算不会发生极限问题，无穷运算才会发生极限问题.

（2）数列是以自然数为变量，遵照一定规则建立一一对应关系的一列数.

（3）无穷运算若有唯一结果，实际就是决定它有无极限的问题.

（4）数列可以有极限，也可以没有；有的可以写出通项公式，有的则不能（例如$\sqrt{5}$计算到小数点后一位，两位，三位，…得数列2.2，2.24，2.236，…就不能写出它的通项公式）.

既然数列有的有极限，有的又没有，那么怎样才能确定

极限的存在呢？再说有极限时，用$\lim\limits_{n\to\infty} u_n \to a$表示，它的确切含义还不够明确，有极限应具备的条件也不知道。因此要进一步研究，给极限以严密的定义。下例，用图象显示变化情况，然后进行总结，定义极限。

例 3 讨论以下数列：

$$\frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{7}{4},\ \frac{9}{5},\ \frac{11}{6},\ \cdots\left(u_n=\frac{2n+1}{n+1}\right) \qquad ①$$

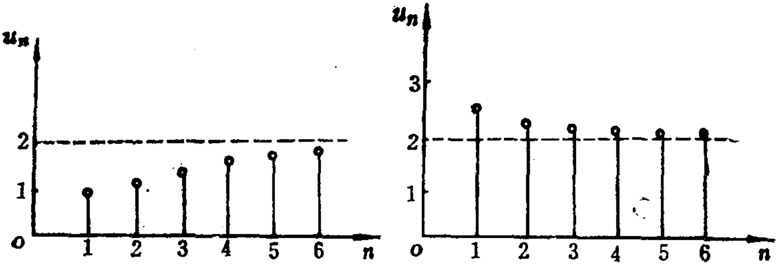
$$\frac{5}{2},\ \frac{7}{3},\ \frac{9}{4},\ \frac{11}{5},\ \frac{13}{6},\ \cdots\quad\left(u_n=\frac{2n+3}{n+1}\right) \qquad ②$$

$$1,\ \frac{5}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{9}{4},\ \frac{9}{5},\ \frac{13}{6},\ \cdots$$

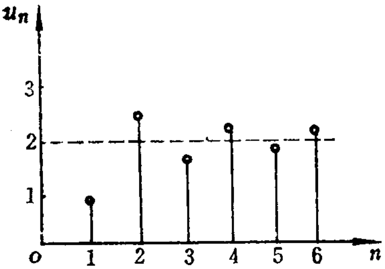
$$\left(u_n=\begin{cases}\dfrac{2n-1}{n}, & n\text{ 为奇数}\\[2ex] \dfrac{2n+1}{n}, & n\text{ 为偶数}\end{cases}\right) \qquad ③$$

为比较上列各数的变化情况，以纵横坐标轴分别表示u_n和n，作出它们的图形如下：

例中的三个数列虽都以2为极限，但变化的情况不尽相



① 图 3 ②



③
图 3

同.① 是递增的变化以2为极限；② 是以递减的变化以2为极限；③ 则是时大时小地逼近于2。但它们总是随着n的增大，u_n与极限2的差的绝对值变小，并可以小到任意小的一个正数。这个数用ε表示时，得到$|u_n-2|<\varepsilon$。这个ε可任意选择，不管它怎样小，总存在着个数码N，使得所有u_n，只要$n>N$都会必然满足上述不等式。

定义 不论正数ε怎样小，数列$\{u_n\}$总有足够的数码N，使得$n>N$的所有数列的项u_n满足不等式$|u_n-a|<\varepsilon$；那么常数a，是数列$\{u_n\}$的极限。

这个定义有三个要点：

第一、对于任意的正数ε，一定能找到一个号码N。

第二、从u_n以后的任何项与a的差的绝对值都小于ε。

第三、定义本身只要求一种可能性："只要给定ε，就能找到适当的N，使得在$n>N$时，$|u_n-a|<\varepsilon$。"有这种可能的数列便是有极限且极限是a。

定义中ε与N的作用，是说明u_n与a靠近的情况的：数列$\{u_n\}$的项，越往后便越靠近于a；靠近的程度是没有限制的，即（随着n的增大）$|u_n-a|$的小是不能用正数作限度的.现在说$|u_n-a|$没有限制，应该证明（随n的增大）$|u_n-a|$小得能以突破任何限度。定义中的ε，便是能被$|u_n-a|$突破的任何限度。再者，数列的项的前后作用，越靠后的项就越