高等院校电子、信息类专业学习辅导书

信号与系统
概念 题解与自测

王晓华 闫雪梅 王群 编

信号与系统（北京理工版）

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高等院校电子、信息类专业学习辅导书

信号与系统
概念 题解与自测

王晓华 闫雪梅 王 群 编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

信号与系统　概念 题解与自测/王晓华，闫雪梅，王群编．—北京：北京理工大学出版社，2007.1
高等院校电子、信息类专业学习辅导书
ISBN 978-7-5640-0908-3

Ⅰ．信…　Ⅱ．①王…②闫…③王…　Ⅲ．信号系统-高等学校-教学参考资料　Ⅳ．TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 147390 号

出版发行／北京理工大学出版社
社　　址／北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编／100081
电　　话／（010）68914775（办公室）　68944990（批销中心）　68911084（读者服务部）
网　　址／http：//www.bitpress.com.cn
经　　销／全国各地新华书店
印　　刷／北京圣瑞伦印刷厂
开　　本／787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张／18.25
字　　数／422 千字
版　　次／2007 年 1 月第 1 版　　2007 年 1 月第 1 次印刷
印　　数／1～5000 册
定　　价／28.00 元

责任校对／郑兴玉
责任印制／吴皓云

前　　言

《信号与系统》课程是电子信息类专业的学生必须掌握的基础理论，该课程是许多院校相关专业研究生入学考试的必考课程之一。本书作为《信号与系统》课程的辅导教材，特别注重习题的选择。习题选择既有基本题型，注重突出基本理论、基本概念和基本方法的掌握，又有较灵活和深入的题型，适于不同需求的读者选学。同时注重解题方法和技巧的运用，一题多解，以便开拓学生解题思路，使学生对各个知识点间的关系有融会贯通的理解，而不是孤立生硬地记忆单一知识。

全书共有 9 章，每章包括：学习要求，知识要点，例题解析及练习题四部分；并附有三套北京理工大学硕士研究生入学考试试题及答案。

本书由王晓华编写第 1 章、第 4 章、第 9 章，闫雪梅编写第 2 章、第 6 章、第 7 章，王群编写第 3 章、第 5 章、第 8 章，全书由王晓华统稿。

在本书的编写过程中，参阅了大量的著作、资料、文献，在此谨向相关作者致以诚挚谢意。北京理工大学电子工程系 51 教研室的老师们给予了大力支持，一并谨致诚挚的谢意。

限于编者水平，书中难免有不妥及错误之处，恳请读者不吝赐教。

作者

目　录

第一部分　概念　题解

第二部分　自　测

第一部分　概念　题解

第1章　信号与系统的基本概念

本章介绍信号与系统的基本概念，从数学描述与表示入手，讨论信号与系统的基本概念、基本信号、基本分析方法及基本性质，使初学者对信号与系统有初步的认识。

一、学习要求

（1）信号与系统的基本概念与定义。

（2）信号的时域描述方法及基本运算，特别是时域变换及综合应用。

（3）基本连续/离散时间信号的时域描述、特点与性质。

（4）系统的定义与性质，特别是线性、时不变性、因果性、稳定性的判别。

二、知识要点

1. 信号的定义与分类

（1）定义。

信号是带有信息（如语言、音乐、图像、数据等）并随时间（或空间）变化的物理量或物理现象。

信号通常有数学函数及波形两种表达形式。

（2）分类。

根据不同的分类原则，信号可分为：连续时间信号与离散时间信号；确定信号与随机信号；周期信号与非周期信号；功率信号与能量信号；一维信号与多维信号。本书讨论一维确定信号。

2. 信号的时域描述与运算

（1）描述。

信号可用数学函数表达式描述，$x(t)$：表示连续时间信号；$x[n]$：表示离散时间信号。信号还可用波形描述。

（2）信号的运算。

① 相加：$y(t)=x_1(t)+x_2(t)$，$y[n]=x_1[n]+x_2[n]$

原则：两信号在同一瞬时的值相加。

② 相乘：$y(t)=x_1(t)\ x_2(t)$，$y[n]=x_1[n]\ x_2[n]$

原则：两信号在同一瞬时的值相乘。

③ 数乘：$y(t)=ax(t)$，$y[n]=ax[n]$，a 为常数。

原则：信号幅值在每一时刻都乘以常数 a。

④ 微分：$y(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$

作用：信号经微分运算后，会突显其变化部分，具有锐化功能。

⑤ 积分：$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\mathrm{d}\tau$

作用：信号经积分运算后，其突变部分可变得平滑，具有平滑功能。

⑥ 差分：$y[n]=\nabla x[n]=x[n]-x[n-1]$

$y[n]=\Delta x[n]=x[n+1]-x[n]$

原则：离散信号的差分通常分为后向差分 $\nabla x[n]$ 和前向差分 $\Delta x[n]$。

⑦ 求和：$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$

原则：离散信号的求和运算与连续信号的积分运算在性质上有某些相似之处。

以上七种运算是函数间的运算关系，不涉及自变量的变化。

⑧ 反转：$y(t)=x(-t)$，$y[n]=x[-n]$

原则：以变量 $-t$（或 $-n$）代替 t（或 n）。

⑨ 时移：$y(t)=x(t-t_0)$，$y[n]=x[n-n_0]$

原则：以变量 $t-t_0$（或 $n-n_0$）代替 t（或 n）。

$t_0>0$（或 $n_0>0$）时右移。

$t_0<0$（或 $n_0<0$）时左移。

⑩ 尺度变换：$y(t)=x(at)$

原则：以变量 at 代替 t。

$|a|>1$，表示 $x(t)$ 在时间轴上向原点压缩为原来的 $\frac{1}{|a|}$ 倍。

$|a|<1$，表示 $x(t)$ 在时间轴上由原点向外扩展为原来的 $|a|$ 倍。

⑪ 内插与抽取（针对离散时间信号）：

$x\left[\frac{n}{k}\right]$：在与原序列相邻的序列值之间插入 $n-1$ 个零。

$x[kn]$：只保留原序列在 k 的整数倍时间点的序列值，其余序列值丢弃。

以上⑧～⑪四种运算是由自变量的变化导致的信号运算，与①～⑦的产生原因是不同的。

3. 基本连续/离散时间信号

(1) 复指数信号。　$x(t)=ce^{at}$，根据 c,a 取值形式不同，信号可分为：

实指数信号：c,a 都取实数。

单位复指数信号：$c=1$，$a=\mathrm{j}\omega$。

复指数信号：$c=|c|e^{\mathrm{j}\theta}$，$a=\sigma+\mathrm{j}\omega$。

其中最重要的形式是单位复指数信号 $x(t)=e^{\mathrm{j}\omega t}$。

① 按欧拉公式展开：$x(t)=e^{\mathrm{j}\omega t}=\cos\omega t+\mathrm{j}\sin\omega t$（实部、虚部为同频率的三角函数）。

② $e^{\mathrm{j}\omega t}$ 关于 ω 不呈现周期性，随 ω 增大，信号变化越快。

③ $e^{j\omega t}$ 关于 t 呈周期性，其基波周期记为 T(单位：s)，与振荡频率 ω(单位：rad/s)之间满足 $T=\frac{2\pi}{\omega}$。

(2) 复指数序列。$x[n]=c\alpha^n$，根据 c;α 取值形式不同，信号可分为：

实指数序列：c，α 取实数。

单位复指数序列：$c=1$，$\alpha=e^{j\Omega}$。

复指数序列：$c=|c|e^{j\theta}$，$\alpha=|\alpha|e^{j\Omega}$。

其中最基本的形式是单位复指数序列 $x[n]=e^{j\Omega n}$。

① 按欧拉公式展开。$x[n]=e^{j\Omega n}=\cos\Omega n+j\sin\Omega n$(实部、虚部为同频率的三角函数)，其中 Ω 为数字频率(单位：rad)。

② $e^{j\Omega n}$ 的双周期性。

(i) $e^{j\Omega n}$ 关于 Ω 呈周期性，周期为 2π，一般取 $0\sim2\pi$ 为 Ω 的主值区间，当 Ω 接近 π 的奇数倍，信号振荡最快；Ω 接近 π 的偶数倍，信号振荡最慢，所以 π 的奇数倍区域为高频，π 的偶数倍区域为低频。

(ii) $e^{j\Omega n}$ 关于 n 呈有条件的周期性。

$$\frac{\Omega}{2\pi}=\frac{m}{N}\text{(有理数)}$$

$e^{j\Omega n}$ 是一个周期序列，基波周期为 N(当 m 与 N 互质时)基波频率为 $\Omega_0=\frac{2\pi}{N}$。

(3) 单位阶跃信号 $u(t)$ 与单位阶跃序列 $u[n]$。

$$u(t)=\begin{cases}0, t<0\\ \frac{1}{2}, t=0\\ 1, t>0\end{cases}\qquad u[n]=\begin{cases}0, n<0\\ 1, n\geqslant0\end{cases}$$

(4) 单位冲激信号 $\delta(t)$ 与单位抽样序列 $\delta[n]$。

$$\begin{cases}\delta(t)=0, t\neq0\\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt=1\end{cases}\qquad \delta[n]=\begin{cases}0, n\neq0\\ 1, n=0\end{cases}$$

(5) $\delta(t)$ 与 $\delta[n]$ 的性质。

与有界函数 $x(t)$，$x[n]$ 相乘：

$$x(t)\delta(t)=x(0)\delta(t)\qquad x[n]\delta[n]=x[0]\delta[n]$$

$$x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)\qquad x[n]\delta[n-n_0]=x[n_0]\delta[n-n_0]$$

抽样性：

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t)\,dt=x(0)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-t_0)\,dt=x(t_0)$$

$\delta(t)$ 为偶函数：

$$\delta(t)=\delta(-t)$$

$\delta(t)$ 与 $u(t)$，$\delta[n]$ 与 $u[n]$ 的关系：

$$\delta(t)=\frac{d}{dt}u(t)\qquad \delta[n]=u[n]-u[n-1]$$

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad u[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta[k]=\sum_{k=0}^{n}\delta[n-k]$$

微分性：

$$\delta'(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta(t) \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)x(t)\mathrm{d}t=-x'(0)$$

$$x(t)\delta'(t)=x(0)\delta'(t)-x'(0)\delta(t)$$

尺度变换：

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$$

卷积性*（见第2章）：

$$x(t)*\delta(t)=x(t) \qquad x[n]*\delta[n]=x[n]$$

$$x(t)*\delta(t-T)=x(t-T) \qquad x[n]*\delta[n-n_0]=x[n-n_0]$$

4. 系统的概念与描述

（1）概念：由一些基本单元（如元件、装置等）相互联结在一起而实现某种特定功能的整体，或对信号进行加工、处理的装置。

（2）描述：系统最基本的描述方法是输入－输出关系描述，连续时间系统用微分方程描述，离散时间系统用差分方程描述。为了书写简洁，还可用简单符号表示：$x(t)\to y(t)$，$x[n]\to y[n]$。$x(t)$，$x[n]$分别代表连续和离散情况下的输入；$y(t)$，$y[n]$分别代表连续和离散情况下的输出。

5. 系统的基本特性

（1）线性。

① 齐次可加性。

$$x_1(t)\to y_1(t) \qquad x_2(t)\to y_2(t)$$

则

$$ax_1(t)+bx_2(t)\to ay_1(t)+by_2(t)$$

② 分解特性。系统响应可分解为零输入响应和零状态响应，即 $y(t)=y_0(t)+y_x(t)$，并且零输入响应 $y_0(t)$ 与零状态响应 $y_x(t)$ 分别满足齐次性和可加性。

（2）时不变性。

$$x(t)\to y(t) \qquad 则\ x(t-t_0)\to y(t-t_0)$$

系统同时具有线性和时不变性，则该系统称为 LTI 系统。

（3）因果性。一个系统在任意时刻的输出仅决定于现在及过去的输入，而与未来时刻的输入无关。

（4）稳定性。一个系统的输入、输出在任何时刻有界。

（5）可逆性。一个系统的输入可从其输出唯一地确定出来。

（6）记忆性。一个系统在任何时刻的输出仅决定于该时刻的输入，而与过去时刻的输入无关。

三、例题解析

例1－1 写出如图1－1所示各信号的时域表达式。

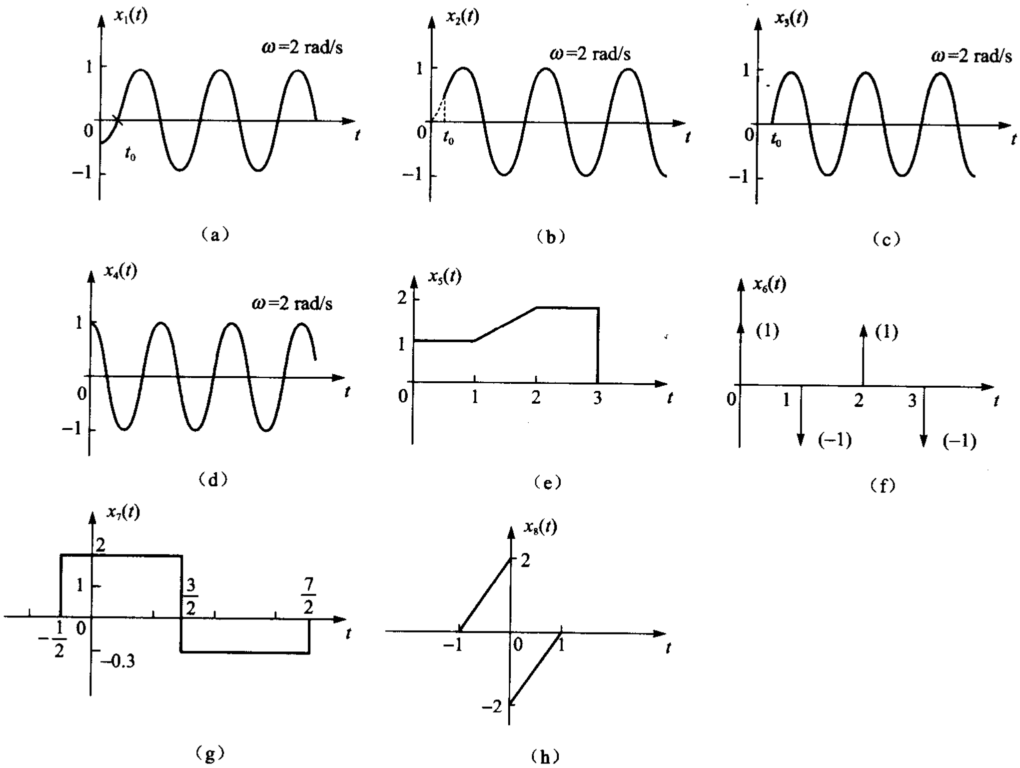


图 1-1

解：(1) $x_1(t)=\sin 2(t-t_0)u(t)$　　(2) $x_2(t)=\sin 2tu(t-t_0)$

(3) $x_3(t)=\sin 2(t-t_0)u(t-t_0)$　　(4) $x_4(t)=\cos 2tu(t)$

(5) $x_5(t)=u(t)+(t-1)u(t-1)-(t-2)u(t-2)-2u(t-3)$

(6) $x_6(t)=\delta(t)-\delta(t-1)+\delta(t-2)-\delta(t-3)$

(7) $x_7(t)=2\left[u\left(t+\frac{1}{2}\right)-u\left(t-\frac{3}{2}\right)\right]-0.3\left[u\left(t-\frac{3}{2}\right)-u\left(t-\frac{7}{2}\right)\right]$

(8) $x_8(t)=2(t+1)[u(t+1)-u(t)]+2(t-1)[u(t)-u(t-1)]$

例 1-2　概略绘出下列信号的波形图。

(1) $x_1(t)=(2-e^{-t})u(t)$　　(2) $x_2(t)=(e^{-t}-e^{-3t})u(t)$

(3) $x_3(t)=\left(1-\frac{|t|}{2}\right)[u(t+2)-u(t-2)]$　　(4) $x_4(t)=x_3(t)\cos 2\pi t$

解析：在绘制信号波形时，按照给定的函数式，确定信号的初值、终值、极大值、极小值及关键点的函数值等，按上述各值可概略画出信号波形。

解：(1) 如图 1-2(a) 所示。

(2) $\frac{d}{dt}(e^{-t}-e^{-3t})=e^{-t}(3e^{-2t}-1)=0$

所以　$t=\frac{1}{2}\ln 3=0.549$

$x_2(t)\Big|_{t=\frac{1}{2}\ln 3}=0.384$,如图 1-2(b)所示。

(3) 如图 1-2(c)所示。

(4) $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=1$,如图 1-2(d)所示。

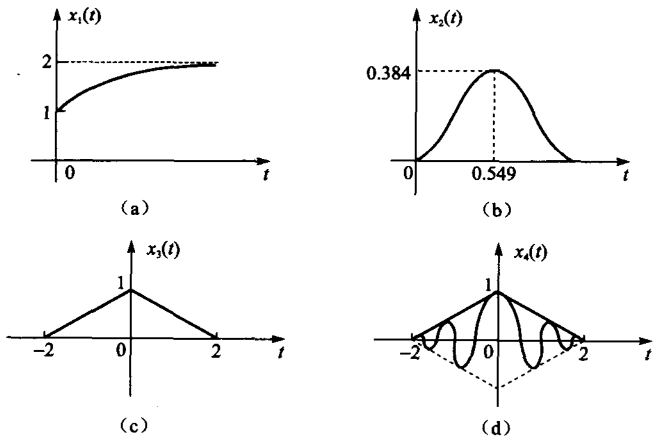


图 1-2

例 1-3 画出下列信号的波形。

(1) $x_1(t)=\sin \pi t u(t)+\sin \pi(t-1)u(t-1)$

(2) $x_2(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sin \pi(t-n)u(t-n)$

(3) $x_3(t)=tu(t)-\sum\limits_{n=1}^{\infty}u(t-n)$

(4) $x_4(t)=\pi\sin \pi t[u(t)-u(t-1)]+\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{\cos \pi t[u(t)-u(t-1)]\}$

(5) $x_5(t)=\mathrm{e}^{-|t|}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n)$

解:如图 1-3 所示。

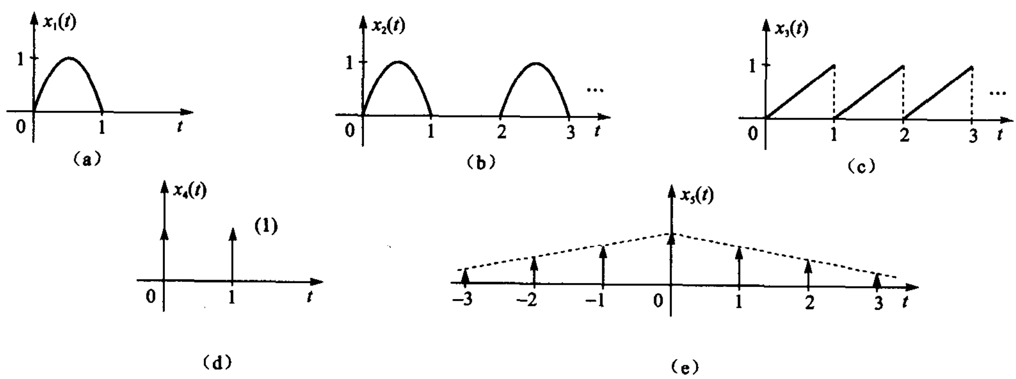


图 1-3

以上三个例题综合了信号的表达式与波形之间的对应关系，其中要特别注意常用信号、典型信号的表达式与波形的基本内容，在此基础上灵活组合。

例 1-4　求下列各函数式的值。

(1) $x_1(t)=5e^{-2t-3}\delta(t)$

(2) $x_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}(t^2+\cos\pi t)\delta(t-1)\mathrm{d}t$

(3) $x_3(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{-\tau}\delta'(\tau)\mathrm{d}\tau$

(4) $x_4(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t}\delta'(t)\mathrm{d}t$

(5) $x_5(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t^2-4)\mathrm{d}t$

(6) $x_6(t)=\int_{-\infty}^{\infty}2\delta(t)\dfrac{\sin 2t}{t}\mathrm{d}t$

(7) $x_7(t)=\int_{-1}^{1}\delta(t^2-4)\mathrm{d}t$

(8) $x_8(t)=\int_{-2\pi}^{2\pi}(1+t)\delta(\cos t)\mathrm{d}t$

(9) $x_9(t)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\cos t\delta(t)]$

解析：求解关于 $\delta(t)$ 的函数式时，要熟练运用关于 $\delta(t)$ 的各种性质，同时特别要注意关于 $\delta(t-t_0)$ 的定义域，以判断函数值的存在与否，如本题中的第(5)、(7)、(8)题。

解：(1) $x_1(t)=5e^{-2t-3}\Big|_{t=0}\delta(t)=5e^{-3}\delta(t)$

(2) $x_2(t)=t^2+\cos\pi t\Big|_{t=1}=1-1=0$

(3)
$$\begin{aligned}x_3(t)&=e^{-\tau}\delta(\tau)\Big|_{-\infty}^{t}-\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}(e^{-\tau})\\&=\delta(t)+\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)e^{-\tau}\mathrm{d}\tau\\&=\delta(t)+u(t)\end{aligned}$$

(4) $x_4(t)=-(e^{-t})'\Big|_{t=0}=1$

(5) $x_5(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t+2)\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-2)\mathrm{d}t=1+1=2$

(6) $x_6(t)=\int_{-\infty}^{\infty}4\delta(t)\dfrac{\sin 2t}{2t}\mathrm{d}t=4$

(7) $x_7(t)=\int_{-1}^{1}\delta(t+2)\mathrm{d}t+\int_{-1}^{1}\delta(t-2)\mathrm{d}t=0$

(8)
$$\begin{aligned}x_8(t)&=\int_{-2\pi}^{2\pi}(1+t)\left[\delta\left(t+\frac{\pi}{2}\right)+\delta\left(t-\frac{\pi}{2}\right)+\delta\left(t+\frac{3}{2}\pi\right)+\delta\left(t-\frac{3}{2}\pi\right)\right]\mathrm{d}t\\&=1-\frac{\pi}{2}+1+\frac{\pi}{2}+1-\frac{3}{2}\pi+1+\frac{3}{2}\pi=4\end{aligned}$$

(9) $x_9(t) = -\sin t\delta(t) + \cos t \cdot \delta'(t) = 0 + \cos t\Big|_{t=0}\delta'(t) - (-\sin t)\Big|_{t=0}\delta(t) = \delta'(t)$

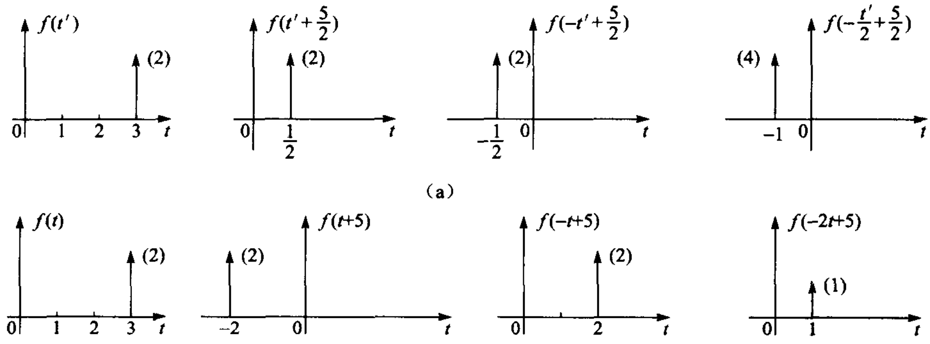
或: $x_9(t) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\delta(t)] = \delta'(t)$

例 1-5 求下列积分。

(1) 已知 $f(5-2t) = 2\delta(t-3)$，求 $\int_{0^-}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t$。

(2) 已知 $f(t) = 2\delta(t-3)$，求 $\int_{0^-}^{\infty} f(5-2t)\mathrm{d}t$。

解:(1) 令 $5-2t=t'$，$t=-\dfrac{1}{2}t'+\dfrac{5}{2}$，则 $f(t)$ 如图 1-4(a) 所示。



(a)

(b)

图 1-4

所以 $\int_{0^-}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_{0^-}^{\infty} 4\delta(t+1)\mathrm{d}t = 0$

(2) $f(5-2t)$ 如图 1-4(b) 所示。

所以 $\int_{0^-}^{\infty} f(5-2t)\mathrm{d}t = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t-1)\mathrm{d}t = 1$

例 1-6 求下列函数的微分与积分。

(1) $x_1(t) = \delta(t)\cos t$ (2) $x_2(t) = \cos t\ u(t)$ (3) $x_3(t) = \mathrm{e}^{-t}\delta(t)$

解析:在求解关于 $\delta(t)$ 的各种运算时，要注意应先按 $\delta(t)$ 的性质化简原式，然后再做其他运算，这样会大大简化运算。

解:(1) $\dfrac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\delta(t)] = \delta'(t)$ $\int_{-\infty}^{t} x_1(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau = u(t)$

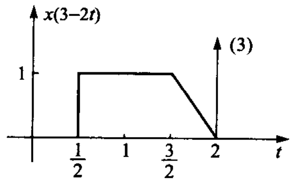
(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_2(t) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\cos t\ u(t)] = \cos t\delta(t) + (-\sin t)u(t) = \delta(t) - \sin t\ u(t)$

$\int_{-\infty}^{t} x_2(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{t}\cos\tau\ u(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{0}^{t}\cos\tau\mathrm{d}\ \tau = \sin tu(t)$

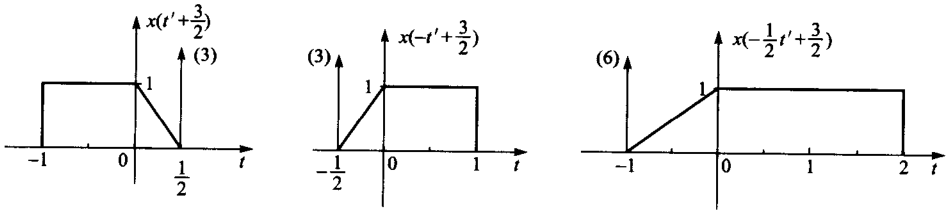
(3) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_3(t) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\delta(t)] = \delta'(t)$

$\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\tau}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau = u(t)$

例 1-7 已知 $x(3-2t)$ 的波形如图 1-5(a) 所示，绘出信号 $x(t)$ 的波形。



(a)



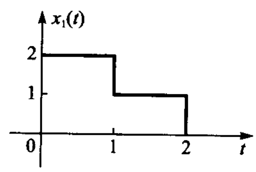
(b)

图 1－5

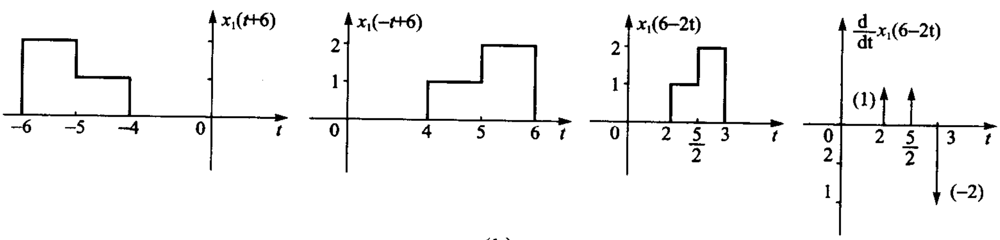
解:设 $t'=3-2t$,则 $t=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}t'$,相当于已知 $x(t')$,求 $x\left(-\frac{1}{2}t'+\frac{3}{2}\right)$。平移——反转——尺度,如图 1－5(b)所示。

例 1－8　已知信号 $x_1(t)$ 波形如图 1－6(a),绘出下列信号的波形。

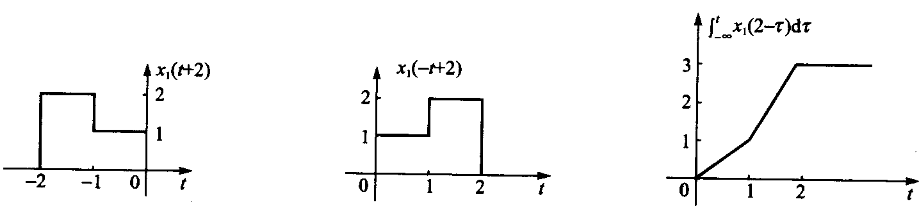
(1) $x_2(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[x_1(6-2t)]$



(a)



(b)



(c)

图 1－6

(2) $x_3(t) = \int_{-\infty}^{t} x_1(2-\tau)\mathrm{d}\tau$

解:(1) 如图 1-6(b)所示。

(2) 如图 1-6(c)所示。

例 1-9　一离散时间信号 $x[n]$ 如图 1-7(a),试绘出下列函数式的图形。

(1) $x[n-2]$　　(2) $x[4-n]$　　(3) $x[2n]$

(4) $x[2n+1]$　　(5) $x[n]u[2-n]$　　(6) $x[n-1]\delta[n-3]$

解析:离散时间序列做波形变换时,切记最后一步做内插或抽取。

解:各函数式波形如图 1-7(b)所示。

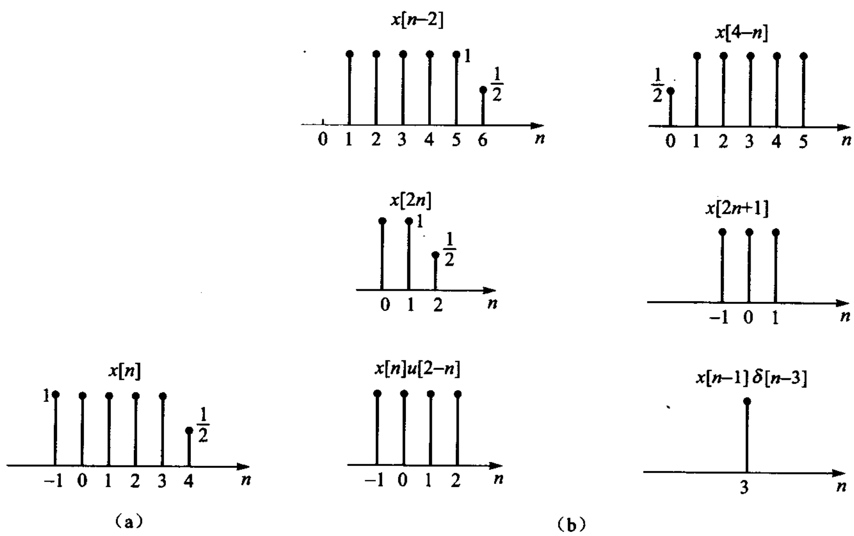


图 1-7

例 1-10　设 $x(t)$ 是复指数信号 $x(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$,其角频率为 ω_0,基波周期 $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$,如果离散时间序列 $x[n]$ 是通过对 $x(t)$ 以抽样间隔 T_s 进行均匀抽样的结果,即 $x[n] = x(nT_s) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 nT_s}$,试求出使 $x[n]$ 为周期信号的条件。

解:如果 $x[n]$ 是一个基波周期为 N_0 的周期信号,则满足 $x[n] = x[n+N_0]$

即
$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0(n+N_0)T_s} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 nT_s} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 N_0 T_s} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 nT_s}$$

必须有
$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 N_0 T_s} = 1$$

$$\omega_0 N_0 T_s = \frac{2\pi}{T_0} N_0 T_s = m2\pi$$

即 $\frac{T_s}{T_0} = \frac{m}{N_0}$ 为有理数。

因此当 T_s/T_0 是有理数时,$x[n]$ 是周期信号。

例 1-11　设 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 是基波周期分别为 T_1 和 T_2 的周期信号,在什么条件下,$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ 是周期信号,如果 $x(t)$ 是周期信号,其基波周期是多少?

解:$x_1(t) = x_1(t+T_1) = x_1(t+mT_1)$

$x_2(t) = x_2(t+T_2) = x_2(t+kT_2)$

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t)=x_1(t+mT_1)+x_2(t+kT_2)$$

为了使 $x(t)$ 是周期为 T 的周期信号，必有

$$x(t+T)=x_1(t+T)+x_2(t+T)=x_1(t+mT_1)+x_2(t+kT_2)$$

则
$$mT_1=kT_2=T$$

即 $\dfrac{T_1}{T_2}=\dfrac{k}{m}$ 为有理数，基波周期是 T_1，T_2 的最小公倍数，即 mT_1 或 kT_2。

例 1-12　设 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 是基波周期分别为 N_1 和 N_2 的周期序列，在什么条件下，$x[n]=x_1[n]+x_2[n]$ 是周期序列，如果 $x[n]$ 是周期序列，其基波周期是多少？

解：$x_1[n]=x_1[n+N_1]=x_1[n+mN_1]$

$x_2[n]=x_2[n+N_2]=x_2[n+kN_2]$

因此　$x[n]=x_1[n]+x_2[n]=x_1[n+mN_1]+x_2[n+kN_2]$

为使 $x[n]$ 是周期为 N 的周期序列，则

$$x[n+N]=x_1[n+N]+x_2[n+N]=x_1[n+mN_1]+x_2[n+kN_2]$$

因此必有
$$mN_1=kN_2=N$$

$$\frac{N_1}{N_2}=\frac{k}{m}\text{为有理数}$$

此时 $x[n]$ 为周期序列，基波周期是 N_1，N_2 的最小公倍数，即 mN_1 或 kN_2。

例 1-13　确定如下信号是否是周期信号，如果是，确定其基波周期。

(1) $x(t)=\cos\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)$　(2) $x(t)=\sin\dfrac{2\pi}{3}t$　(3) $x(t)=\cos\dfrac{\pi}{3}t+\sin\dfrac{\pi}{4}t$

(4) $x(t)=\cos t+\sin\sqrt{2}t$　(5) $x(t)=\sin^2 t$　(6) $x(t)=e^{j(\frac{\pi}{2}t-1)}$

(7) $x[n]=e^{j\frac{\pi}{4}n}$　(8) $x[n]=\cos\dfrac{1}{4}n$　(9) $x[n]=\cos\dfrac{\pi}{3}n+\sin\dfrac{\pi}{4}n$

(10) $x[n]=\cos^2\dfrac{\pi}{8}n$

解析：判断信号的周期性，要牢记关于周期性的判定条件，特别是组合信号。

解：(1) 是周期信号，$\omega_0=1$，$T_0=\dfrac{2\pi}{\omega_0}=2\pi$

(2) 是周期信号，$\omega_0=\dfrac{2}{3}\pi$，$T_0=\dfrac{2\pi}{\omega_0}=3$

(3) $x(t)=x_1(t)+x_2(t)=\cos\dfrac{\pi}{3}t+\sin\dfrac{\pi}{4}t$

$x_1(t)$ 是周期信号，$\omega_1=\dfrac{\pi}{3}$，$T_1=\dfrac{2\pi}{\omega_1}=6$

$x_2(t)$ 是周期信号，$\omega_2=\dfrac{\pi}{4}$，$T_2=\dfrac{2\pi}{\omega_2}=8$

$\dfrac{T_1}{T_2}=\dfrac{6}{8}=\dfrac{3}{4}$ 为有理数，是周期信号，$T_0=4T_1=3T_2=24$。

(4) $x(t)=x_1(t)+x_2(t)=\cos t+\sin\sqrt{2}t$

$x_1(t)=\cos t$ 是周期信号，$\omega_1=1$，$T_1=\dfrac{2\pi}{\omega_1}=2\pi$