普通高等教育测绘类规划教材

自由网平差与变形分析

陶本藻 编著

武汉测绘科技大学出版社

自由网平差与变形分析

（新　版）

陶本藻　编著

武汉测绘科技大学出版社

(鄂)新登字 14 号

内容提要

本书介绍秩亏自由网平差的各种经典解法、拟稳平差的解法、检测变形的几种统计检验方法、位移分析与应变分析等有关几何变形问题的理论、方法、解算步骤和实际应用，书中所 述方法精典、实用、有效，兼顾了测绘教学和生产实践的客观需要，既可作高校测绘工程院系的教材、又是大地测量、工程测量、地壳形变工作者必备的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

自由网平差与变形分析/陶本藻著 .—武汉：
武汉测绘科技大学出版社，2000.10
ISBN 7-81030-789-4

Ⅰ.自… Ⅱ.陶… Ⅲ.自由网平差—分析(数学) Ⅳ.P207

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 47278 号

责任编辑：徐　方　　封面设计：曾　兵
武汉测绘科技大学出版社出版发行
(武汉市珞喻路 129 号，邮编 430079)
武汉工业大学出版社印刷厂印刷
*
开本：850×1168　1/32　印张：6.875　字数：172 千字
2001 年 1 月第 1 版　2001 年 1 月第 1 次印刷
印数：0001—4000 册　定价：12.00 元

再 版 前 言

《自由网平差与变形分析》首版于 1984 年 7 月，由测绘出版社出版，简称“京版”。今修订再版，由武汉测绘科技大学出版社以同书名出版，简称“汉版”。为说明修订事宜，故有“再版前言”。

秩亏自由网平差作为当时一种新的平差理论出现，引起广大测量工作者的注意和兴趣，读者急需了解这一内容的研究现状和应用前景，测绘出版社及时组织了“京版”书的出版，在我国测绘界起到了研究、普及和应用的基础作用。

本书“京版”是作为新理论新方法论著出版，并未顾及作为教学用书，但 16 年来，本书不仅提供大地测量、工程测量和地壳形变工作者作为学习研究应用的参考，而且不少学校的测绘专业还作为代用教材或教学参考用书以及研究生的必读或参考读物，事实上，起到了教科书的作用。

而今考虑当前测绘教学和测绘生产实践的双重需要，且“京版”发行的 12000 册书也已售完，作者认为有必要修订再版。

“京版”书包含两部分内容，共六章。其一是自由网平差理论和各种解法，共五章；其二是作为自由网平差的应用，讲述变形分析方法，共一章。

“汉版”书的编写，以测绘工程专业 30～50 学时的必修课或选修课的教学用书为目的，同时也考虑广大生产技术人员的需要。“汉版”与“京版”相比较，对教学与生产应用的功效发生了变化。再版书共四章，第一章主要介绍国外作者提出的秩亏自由网平差各种经典解法。第二章介绍国内学者提出的拟稳平差理论和方

法。这两章内容保留了本书原“京版”前五章(至今仍不过时的具有生命力的内容)以及笔者的科研成果,删去现今已无实际应用价值的部分。第三章、第四章属变形分析内容,所述的变形分析部分是以自由网平差理论的应用为前提,包含了变形分析的基本内容,已能满足基准点稳定和工程形变问题分析的一般需要。

本书的修订出版,得到全国高等学校测绘类专业教学指导委员会大力支持并组织专家审查,武汉测绘科技大学教务处和出版社组织了本书的出版,陶华学教授和周世健教授对本书稿提出了很好的修改意见,本人一并表示衷心的感谢。

陶本藻

2000.5

目 录

第一章　秩亏自由网平差

本章介绍几种典型的实用的秩亏自由网平差方法，先阐明其原理，再举实例说明秩亏自由网平差的计算步骤。

§1.1　概　述

控制网按间接平差，通常必须满足足够的起始数据，待定参数是点的坐标，它们是非随机参数，平差的数学模型是

$$\underset{n1}{l} = \underset{nt}{A}\underset{t1}{\overline{X}} + \underset{n1}{\Delta} \text{ 或 } \mathrm{E}(l) = A\overline{X} \tag{1.1.1}$$

$$\mathrm{D}(l) = \sigma_0^2 Q = \sigma_0^2 P^{-1} \tag{1.1.2}$$

式中真误差 Δ 的数学期望 $\mathrm{E}(\Delta)=0$，故有(1.1.1)中第二式。模型(1.1.1)、(1.1.2)称为高斯—马尔柯夫模型。

在函数模型中，由于 $\overline{X}$ 中不包含起始数据，A 必为列满秩阵，即 A 的秩 $\mathrm{R}(A)=t$，t 为待定坐标参数的个数。随机模型中的权阵 P 是满秩阵，即 $\mathrm{R}(P)=n$，表示观测值之间不存在函数相关，所以这是一个满秩平差问题。

设 $\overline{X}$ 的估值为 X，则由(1.1.1)式可得误差方程为

$$V = AX - l \tag{1.1.3}$$

V 是 l 的改正数，称为残差。因为推导平差公式时与参数 $\overline{X}$ 是否取近似值无关，考虑平差时总要引入参数的近似坐标，所以上式中的 X 是其近似坐标的改正数，符号就不加区别了。按最小二乘原理

$$V^{\mathrm{T}}PV = \min$$

可得法方程为

$$NX = A^{\mathrm{T}}Pl \tag{1.1.4}$$

式中 $N = A^{\mathrm{T}}PA$,其秩为

$$\mathrm{R}(N) = \mathrm{R}(A^{\mathrm{T}}PA) = \mathrm{R}(A) = t$$

亦即 N 非奇异,存在凯利逆 N^{-1},满足

$$NN^{-1} = N^{-1}N = I \tag{1.1.5}$$

于是法方程的解惟一且为

$$X = N^{-1}A^{\mathrm{T}}Pl \tag{1.1.6}$$

协因素阵为

$$Q_{XX} = N^{-1} \tag{1.1.7}$$

单位权方差估值为

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^{\mathrm{T}}PV}{n - \mathrm{R}(A)} = \frac{V^{\mathrm{T}}PV}{n - t} \tag{1.1.8}$$

估值 X 是 $\bar{X}$ 的最优线性无偏估计,即有

$$\mathrm{E}(X) = \bar{X} \tag{1.1.9}$$

$$\mathrm{D}(X) = \min \text{ 或 } \mathrm{tr}D(x) = \min \tag{1.1.10}$$

上述经典平差法的条件是控制网中必须设定足够的坐标起始数据。如果设定的坐标起始数据等于必要起始数据个数,则称为经典自由网平差。例如在水准网中,仅选一个点的高程为已知,测角网中设定两点平面坐标为已知,GPS 网中仅设定一点三维坐标为已知等。

图 1.1　为一简单水准网,选定 x_3 的高程为已知,则可列出误差方程如下

$$\underset{31}{V} = \underset{32}{A}\,\underset{21}{X} - \underset{31}{l}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix}$$

在 A 中二阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$，$A$ 的秩 $R(A)=2$，A 为列满秩。法方程为

$$A^{T}AX = A^{T}l$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 - l_2 \\ l_2 - l_3 \end{pmatrix}$$

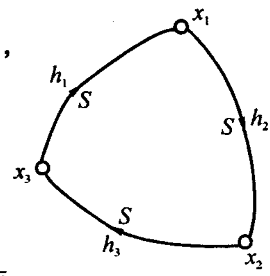

图 1.1

系数阵 $N = A^{T}A$ 的行列式 $|N| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$，故 $R(N)=2$，非奇异，法方程有惟一解：

$$X = (x_1 \quad x_2)^{T} = N^{-1}A^{T}l$$

此平差问题也可建立如下模型，设定各点高程近似值时，取 x_3 的已知高程为近似值，也将其视为待定参数参与平差，但其改正数必须为零。这就成为附有条件的间接平差问题了。其模型为

$$\left.\begin{aligned} &\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} \\ &(\underset{31}{V} = \underset{33}{A}\,\underset{31}{X} - \underset{31}{l}) \\ &x_3 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.1.11}$$

将条件 $x_3=0$ 代入误差方程后就是上述间接平差问题，可见两者等价。

如果网中没有起始数据，即网中 x_1、x_2、x_3 均为待定参数，此时(1.1.11)式中的条件 $x_3=0$ 不存在，而误差方程系数阵的行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

所以其秩 $R(A)\neq 3$,因其中有一个二阶子行列式不等于零,故 $R(A)=2$,A 为列不满秩阵,或称列亏阵。相应地法方程系数阵

$$|N|=|A^{T}A|=\begin{vmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{vmatrix}=0;\begin{vmatrix}2&-1\\-1&2\end{vmatrix}=3\neq 0$$

也是奇异阵,即 $R(N)=R(A^{T}A)=R(A)=2$。在这种情况下凯利逆 N^{-1}不存在,相应的法方程

$$\underset{33}{N}\underset{31}{X}=\underset{33}{A^{T}}\underset{31}{l}$$

不可能存在惟一解。

当网中不设起始数据或不存在必要的起始数据,而且又设网点坐标为待平差参数,误差方程系数阵列亏,这样的平差问题称为秩亏自由网平差。

在高斯—马尔柯夫模型(1.1.1)中,秩亏 d 的定义是

$$d=t-R(A)\tag{1.1.12}$$

实际上就是平差网形中缺少的必要坐标起始数据个数。如没有起始数据的网,秩亏数等于必要起始数据个数。例如,水准网的秩亏数 $d=1$;测角网的 $d=4$,即两个待定点的平面坐标数;测边网的 $d=3$,即一个待定点的平面坐标和一条边的方位角;GPS 网的 $d=3$,即一个点的三维坐标。自由网平差由 Meissl(1962)[1]提出,20 世纪 70 年代开始出现一些完整的解法,理论研究和应用探讨持续了十多年,现已得到广泛应用。

§1.2 秩亏自由网平差原理

秩亏自由网平差的函数模型是

$$\underset{n1}{l} = \underset{nt}{A}\underset{t1}{\bar{X}} + \underset{n1}{\Delta} \tag{1.2.1}$$

其中 $\mathrm{R}(A)=r<t$，秩亏数

$$d = t - r$$

随机模型是

$$\mathrm{D}(l) = \sigma_0^2 Q = \sigma_0^2 P^{-1} \tag{1.2.2}$$

P 为 n 阶非奇异对称阵，此模型亦称为高斯—马尔柯夫秩亏模型。

为了便于理解秩亏自由网平差原理，用广义逆解法进行说明。

一、用广义逆解线性方程组

设 A 为 $n \times m$ 矩阵，秩 $\mathrm{R}(A)=r \leqslant \min(m,n)$，满足如下方程的 G

$$AGA = A \tag{1.2.3}$$

定义为 A 的广义逆，G 为 $m \times n$ 矩阵，并记为 A^-，一般不惟一，称为 A^- 型广义逆。

A^- 型广义逆有如下性质：

(1) $(A^{\mathrm{T}})^- = (A^-)^{\mathrm{T}}$ （其中之一，即 $(A^-)^{\mathrm{T}} \subset (A^{\mathrm{T}})^-$） (1.2.4)

(2) $(kA)^- = \dfrac{1}{k} A^- \quad k \neq 0$ (1.2.5)

$(kA)^- = O \quad k = 0$ (1.2.6)

(3) $A(A^{\mathrm{T}}A)^- A^{\mathrm{T}} A = A$ (1.2.7)

$A^{\mathrm{T}} A (A^{\mathrm{T}}A)^- A^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}$ (1.2.8)

(4) $(A^- A)^2 = A^- A$ (1.2.9)

$$(AA^-)^2 = AA^- \tag{1.2.10}$$

亦即 A^-A 和 AA^- 均为幂等阵。

如对 A^- 型广义逆作某些限制,就可得惟一确定的广义逆。

设矩阵 A 为 $n \times m$ 阶,如果有一广义逆 G 满足如下四个方程:

$$AGA = A \tag{1.2.11}$$

$$GAG = G \tag{1.2.12}$$

$$(GA)^{\mathrm{T}} = GA \tag{1.2.13}$$

$$(AG)^{\mathrm{T}} = AG \tag{1.2.14}$$

则 G 为 A 的 A^+ 型广义逆,称为 Moore-Penrose 逆,简称伪逆。因伪逆 G 满足(1.2.11),它也是一个 A^- 型广义逆,因此 A^- 的四个性质对 A^+ 来说都成立。此外,A^+ 还有一个性质:

$$(A^+)^+ = A \tag{1.2.15}$$

A^+ 是惟一确定的广义逆。

有关广义逆详细叙述见附录一。

广义逆理论的提出与解线性方程组理论有关,测量平差的基本计算归根到底是解线性方程组问题。所以下面介绍用广义逆解线性方程组的基本理论。

设有相容线性方程组

$$\underset{nm}{A}\,\underset{m1}{X} = \underset{n1}{B} \tag{1.2.16}$$

其解存在,设为 $\underset{m1}{Y}$,则有

$$AY = B \tag{1.2.17}$$

按 A^- 逆定义,有

$$AA^-AY = B$$

或

$$AA^-B = B \tag{1.2.18}$$

此式称为方程组(1.2.16)的相容条件。由此可知

$$X = A^-B \tag{1.2.19}$$

为(1.2.16)的一个特解。

齐次方程组 $AX=O$ 的一般解为

$$X = (I - A^{-} A)M \tag{1.2.20}$$

I 为单位阵,M 为任意向量。事实上

$$\begin{aligned} AX &= A(I-A^{-}A)M=(A-AA^{-}A)M \\ &=(A-A)M=O \end{aligned} \tag{1.2.21}$$

因为非齐次方程组(1.2.16)的一般解等于它的任一特解与对应齐次方程组一般解之和,故(1.2.16)的一般解为

$$X = A^{-} B + (I - A^{-} A)M \tag{1.2.22}$$

这是相容线性方程组解的一般公式。

当 A 为 m 阶非奇异方阵时,则 $A^{-}=A^{-1}$,即 A^{-} 等于凯利逆,此时

$$X = A^{-1}B + (I - A^{-1}A)M = A^{-1}B \tag{1.2.23}$$

式中顾及 $A^{-1}A=I$,这就是满秩平差中法方程的解。

下面将结合自由网平差原理说明 A 为降秩情况下的各种解。

二、秩亏方程组的最小二乘解

由模型(1.2.1)得误差方程为

$$V = AX - l \tag{1.2.24}$$

按最小二乘原理

$$V^{\mathrm{T}}PV = \min \tag{1.2.25}$$

得法方程为

$$\underset{u}{N}X = A^{\mathrm{T}}Pl$$

式中 $\mathrm{R}(N)=\mathrm{R}(A)=r$,$N$ 为奇异阵,其凯利逆不存在,得不到惟一解。实际上,由(1.2.22)可知,法方程有如下的一般解:

$$X = N^{-} A^{\mathrm{T}}Pl + (I - N^{-} N)M \tag{1.2.26}$$

式中 $N^{-}N\neq I$,所以满足法方程的解有任意多个,其解不惟一。

由此可知,在秩亏自由网平差中,如果像经典平差那样,只要

求遵循最小二乘原则求未知参数的解,将不可能取得惟一确定的估计量,这是这种平差方法的特点。为了确定惟一的估计量,需要在遵循平差基本原则——最小二乘原则基础上附加另外条件,这个条件的确定应该保证所求得的未知参数的估计量是最优的。这样的最优解是惟一存在的,它就是法方程的最小范数解。

三、秩亏法方程的最小范数解

设满足法方程的一个解为 $X=(x_1\ x_2\cdots\ x_t)^{\mathrm{T}}$,取其平方和的开方为

$$\| X \| = (X^{\mathrm{T}}X)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

称为向量 X 的范数,几何意义是向量的长度。如果在法方程的一般解中有一个解 X 满足其范数最小,这个解就称为最小范数解,最小范数解满足的条件,称为最小范数条件,其表达式为

$$\| X \| = \min \text{或} X^{\mathrm{T}}X = \min \tag{1.2.27}$$

设 N_m^- 是N 的N^-型一个广义逆,由(1.2.19)式知,法方程有一个特解为

$$X = N_m^- A^{\mathrm{T}} Pl \tag{1.2.28}$$

如果这个特解的范数 $\| N_m^- A^{\mathrm{T}} Pl \|$ 比起任何解的范数要小,那它就是最小范数解。

现设由(1.2.28)式表达的 X 就是最小范数解,其广义逆 N_m^- 就称为最小范数逆,现在的问题是要确定 N_m^-。

下面要证明,一个最小范数逆必须满足下列两个方程:

$$NN_m^-N = N \tag{1.2.29}$$

$$(N_m^-N)^{\mathrm{T}} = N_m^-N \tag{1.2.30}$$

N_m^- 既是一个N^-型广义逆,前一式必然要成立。第二式说明 N_m^-N 是对称阵。

按(1.2.26)式,当法方程的特解取(1.2.28)式时,其一般解为

$$X = N_m^- A^T P l + (I - N_m^- N) M \qquad (1.2.31)$$

因为特解为最小范数解，故必有

$$\| N_m^- A^T P l \| \leqslant \| N_m^- A^T P l + (I - N_m^- N) M \| \qquad (1.2.32)$$

设 Y 为满足法方程的任意解向量，则有

$$NY = A^T P l \qquad (1.2.33)$$

代入(1.2.32)得

$$\| N_m^- N Y \| \leqslant \| N_m^- N Y + (I - N_m^- N) M \| \qquad (1.2.34)$$

两边平方，考虑 $\| U \|^2 = U^T U$，得

$$\begin{aligned} & (N_m^- N Y)^T (N_m^- N Y) \\ \leqslant & (N_m^- N Y + (I - N_m^- N) M)^T (N_m^- N Y + (I - N_m^- N) M) \end{aligned}$$

化简：

$$\begin{aligned} O \leqslant & (N_m^- N Y)^T (I - N_m^- N) M + ((I - N_m^- N) M)^T N_m^- N Y \\ & + ((I - N_m^- N) M)^T (I - N_m^- N) M \\ = & M^T (I - N_m^- N)^T (I - N_m^- N) M + 2 Y^T (N_m^- N)^T (I - N_m^- N) M \end{aligned}$$

上式右边第一项大于等于零，使不等式成立，顾及 Y 与 M 的任意性，必须使

$$(N_m^- N)^T (I - N_m^- N) = O$$

或

$$(N_m^- N)^T = (N_m^- N)^T N_m^- N \qquad (1.2.35)$$

两边转置：

$$(N_m^- N) = (N_m^- N)^T N_m^- N$$

可见(1.2.30)式成立。

由此可知，只要取满足(1.2.29)和(1.2.30)两条件的广义逆 N_m^- 作为最小范数逆，按(1.2.28)式就可求得法方程的最小范数解。

在自由网平差中，最小范数逆常取为

$$N_m^- = N^{\mathrm{T}}(NN^{\mathrm{T}})^- \qquad (1.2.36)$$

它确实满足上述两个条件，现验证如下：

$$NN_m^-N = NN^{\mathrm{T}}(NN^{\mathrm{T}})^- N \xlongequal{(1.2.8)} N$$

$$(N_m^-N)^{\mathrm{T}} = (N^{\mathrm{T}}(NN^{\mathrm{T}})^- N)^{\mathrm{T}} = N^{\mathrm{T}}(NN^{\mathrm{T}})^- N \xlongequal{(1.2.36)} N_m^-N$$

由于法方程系数阵 N 对称，$N^{\mathrm{T}} = N$，故有

$$N_m^- = N(NN)^- \qquad (1.2.37)$$

将(1.2.29)、(1.2.30)两个条件与伪逆四个条件相对照可知，它是其中两个条件，但只有同时满足四个条件的逆才惟一，所以最小范数逆仍是 N^- 型而不是 N^+ 型，它不是惟一确定的。虽然最小范数逆不惟一，但不论哪一个最小范数逆代入公式(1.2.28)，其最小范数解却是惟一的。了解这一点对于研究自由网平差理论十分重要。下面作出证明。

最小范数逆所满足的两个条件与满足下列一个条件是一致的：

$$N_m^-NN^{\mathrm{T}} = N^{\mathrm{T}} \qquad (1.2.38)$$

事实上

$$N^{\mathrm{T}} \xlongequal{(1.2.29)} (NN_m^-N)^{\mathrm{T}} = (N_m^-N)^{\mathrm{T}}N^{\mathrm{T}} \xlongequal{(1.2.30)} N_m^-NN^{\mathrm{T}}$$

亦即满足(1.2.38)的 N_m^- 也是最小范数逆。

设有两个最小范数逆 $N_{m_1}^-$ 和 $N_{m_2}^-$，相应最小范数解为

$$X_1 = N_{m_1}^-A^{\mathrm{T}}Pl, \quad X_2 = N_{m_2}^-A^{\mathrm{T}}Pl$$

按(1.2.38)式有

$$N_{m_1}^-NN^{\mathrm{T}} = N^{\mathrm{T}}, \quad N_{m_2}^-NN^{\mathrm{T}} = N^{\mathrm{T}}$$

即

$$(N_{m_1}^- - N_{m_2}^-)NN^{\mathrm{T}} = O$$

两边右乘 $(N_{m_1}^- - N_{m_2}^-)^{\mathrm{T}}$ 得

$$(N_{m_1}^- - N_{m_2}^-)NN^{\mathrm{T}}(N_{m_1}^- - N_{m_2}^-)^{\mathrm{T}} = O$$