

一九八七年

数学分析研究生题解

第七册

杨守昌 谢家海 黄仿伦 编

安徽大学

44

安徽大学数学系函授组

一九八七年五月

前 言

经过半年多的努力,1987年《数学分析研究生题解》(即函授教材第七册)与《高等代数研究生题解》(即函授教材第七册)终于与读者见面了。在收集试题和题解的过程中,得到了各兄弟院校研究生招生办公室及各校数学系同志的热情支持,有的试题甚至是请考生在考场上抄录下来的。在收集和编写试题解答时,还得到了我系部分同志的支持。在此,对他们一并表示衷心的感谢。由于某些原因,一些学校的试题或解答未能收入本书,特请这些学校予以谅解。

我们在编写解答时,对少数简单计算题写法编简,考生在正式考试时,应多写一些中间步骤才能使答案完整。

由于编写时间仓促,书中一定存在不少缺点和错误,恳请广大读者批评指正。

这套函授教材各册书均保证供应。各册定价是:第一册,《一元微积分》,551题解,1.50元;第二册,《级数与多元微积分》,370题解,1.50元;第三册,《微分方程》,390题解,1.10元;第四册,《线性代数》,447题解,1.10元;第五、六册1985年和1986年非数学专业用110套《高等数学研究生题解》,3.00元;第七册,1987年高等院校《数学分析研究生题解》,3.00元;第八册1987年高等院校《高等代数研究生题解》,300元;还有为复旦大学编教本《概率论》习题编写的《概率论题解》,1.80元。以上定价中均含挂号寄书邮费。购书来款请寄“安徽大学数学系函授组(合肥市)”,并请在汇款单附言栏注明购各册书的册数,不要另来函说明,以免核对之繁。

目 录

1	北京大学.....	(1)
2	中国科学技术大学.....	(9)
3	清华大学.....	(14)
4	浙江大学.....	(19)
5	南开大学.....	(24)
6	中山大学.....	(29)
7	中国科学院数学研究所.....	(34)
8	厦门大学.....	(40)
9	复旦大学(一).....	(47)
10	四川大学.....	(56)
11	武汉大学.....	(60)
12	北京师范大学.....	(66)
13	吉林大学.....	(74)
14	山东大学.....	(81)
15	安徽大学(I) (II).....	(87)
16	杭州大学.....	(93)
17	江西大学.....	(97)
18	黑龙江大学.....	(105)
19	郑州大学.....	(109)
20	广西大学.....	(115)
21	河北大学.....	(120)

22	福州大学.....	(124)
23	贵州大学.....	(128)
24	辽宁大学.....	(134)
25	山西大学.....	(139)
26	暨南大学.....	(144)
27	新疆大学.....	(151)
28	天津大学.....	(158)
29	同济大学.....	(163)
30	哈尔滨工业大学.....	(171)
31	南京工学院.....	(179)
32	西安交通大学.....	(185)
33	西北工业大学.....	(191)
34	大连工学院.....	(196)
35	华南工学院.....	(200)
36	成都电讯工程学院.....	(204)
37	西南交通大学.....	(208)
38	华东化工学院.....	(213)
39	湖南大学.....	(216)
40	东北工学院.....	(223)
41	合肥工业大学.....	(229)
42	重庆大学.....	(233)
43	国防科学技术大学.....	(240)
44	上海交通大学.....	(246)
45	成都科学技术大学.....	(252)
46	山东海洋学院.....	(258)
47	华东师范大学.....	(264)

48	曲阜师范大学.....	(270)
49	江西师范大学.....	(276)
50	山东师范大学.....	(278)
51	西南师范大学.....	(281)
52	上海师范大学.....	(283)
53	辽宁师范大学.....	(285)
54	华南师范大学.....	(286)
55	复旦大学(二).....	(288)
56	北京师范大学.....	(289)

以下各校数学分析试题转第八册

65	哈尔滨范师学院
66	上海科学技术大学
67	四川范师大学
68	中国纺织大学
69	华中范师大学
70	内蒙古大学
71	兰州大学
72	西北大学
73	云南大学
74	北京钢铁学院
75	河北师范大学

1 北 京 大 学

一、(18分) 证明 $f(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt e^{x^2/2}$ 在

$[0, +\infty)$ 有界, 但在 $(-\infty, +\infty)$ 无界.

证. $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt}{e^{-x^2/2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-e^{-x^2/2}}{-xe^{-x^2/2}} = 0,$$

所以 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 有界. 当 $x < 0$ 时,

$$f(x) \geq \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} dt e^{x^2/2}.$$

易知当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 无界.

二、(18分) 计算下列积分:

$$(1) \int_0^{\pi/2} (\sqrt{\operatorname{tg} x} + \sqrt{\operatorname{ctg} x}) dx;$$

$$(2) \iiint_V y \sqrt{16 - z^2} dx dy dz, \text{ 其中 } V \text{ 是由 } z = y^2,$$

$z = 2y^2 (y > 0)$, $z = x$, $z = 2x$, 和 $z = 4$ 围成的区域.

解. (1) 令 $u = \sqrt{\operatorname{tg} x}$, 则 $dx = 2u(1+u^4)^{-1} du$.

$$I = 2 \int_0^{+\infty} \left(u + \frac{1}{u}\right) \frac{u du}{1+u^4} = \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{u-1/2}{\sqrt{2}} \Big|_0^{+\infty} \\ = \sqrt{2} \pi.$$

(2) 令 $u = x/z$, $v = y^2/z$, $w = z$, 则可求得

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \frac{1}{2} w \sqrt{\frac{w}{v}}.$$

区域 V 变为 V' : $\frac{1}{2} \leq u \leq 1$, $\frac{1}{2} \leq v \leq 1$, $0 \leq w \leq 4$. 于是

$$I = \frac{1}{2} \iiint_{V'} \sqrt{vw} \cdot \sqrt{16-w^2} \cdot w \sqrt{\frac{w}{v}} du dv dw \\ = \frac{1}{8} \int_0^4 v^{1/2} \sqrt{4^2-w^2} dw.$$

作代换 $w = 4 \sin \varphi$ ($0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$), 可求得 $I = 2\pi$.

三、(18分) 设 $f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$, 求证 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{f^{(n)}(0)}$

收敛.

证. 显然 $f(0) = f'(0) = 1$. $f(x)$ 满足

$$f(x) - xf(x) - x^2 f(x) = 1$$

对上式两端求 $n+1$ 阶导数可得

$$f^{(n+1)}(x) - [xf^{(n+1)}(x) + (n+1)f^{(n)}(x)] - \\ - [x^2 f^{(n+1)}(x) + 2(n+1)xf^{(n)}(x) \\ + n(n+1)f^{(n-1)}(x)] = 0$$

以 $x=0$ 代入即得

$$\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}$$

记 $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, 则有

$$a_0 = a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, (n \geq 1)$$

从而 $a_n > 0$, 且 $\{a_n\}$ 为单调增加. 易知

$$a_{n+1} \leq 2a_n, a_{n+1} \geq \frac{3}{2}a_n.$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}^{-1}}{a_n^{-1}} \leq \frac{2}{3} < 1$, 即 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 收敛.

四、(15分) (1) 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \ln x$ 在 $(0, 1]$ 不一致收敛.

(2) 证明 $\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \ln x \right) dx = 1 - \frac{\pi^2}{6}$

证. (1) 和函数为

$$S(x) = \frac{x \ln x}{1-x}, x \in (0, 1); S(1) = 0.$$

当 $x \rightarrow 1-0$ 时, $S(x) \rightarrow 1$, 所以 $S(x)$ 在 $(0, 1]$ 上不连续. 原级数每一项都连续, 所以级数在 $(0, 1]$ 上不一致收敛.

(2) 任意 $0 < \delta < x < 1$, 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n \ln t = \frac{\ln t}{1-t}$$

在 $[\delta, x]$ 上一致收敛, 从而有

$$\int_{\delta}^x \frac{\ln x}{1-t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\delta}^x t^n \ln t dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 - \int_0^{\delta} - \int_x^1 \right) t^n \ln t dt \quad (\cdot)$$

因为 $\int_0^1 t^n \ln t dt = -\frac{1}{(n+1)^2}$

所以 $\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 t^n \ln t dt = -\frac{\pi^2}{6}$

又因 $\left| \int_0^{\delta} t^n \ln t dt \right| \leq \frac{1}{(n+1)^2}$

$$\left| \int_x^1 t^n \ln t dt \right| \leq \frac{1}{(n+1)^2}$$

所以 $\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\delta} t^n \ln t dt$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} \int_x^1 t^n \ln t dt$ 分别在 $0 \leq \delta \leq 1$ 和

$0 \leq x \leq 1$ 上一致收敛。在 $(\cdot)$ 式两端令 $\delta \rightarrow 0$, $x \rightarrow 1$ 即得

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t} dt = -\frac{\pi^2}{6},$$

或 $\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} x^n \ln x dx = 1 - \frac{\pi^2}{6}.$

五、(15分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < +\infty$$

定义
$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(|x-\xi| + |x-\eta|)} \cdot |f(\xi)| |f(\eta)| d\xi d\eta,$$

证明:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dx \leq 4 \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx.$$

证一. 令

$$\psi_n(x) = \int_{-n}^n \int_{-n}^n e^{-(|x-\xi| + |x-\eta|)} |f(\xi)| |f(\eta)| d\xi d\eta$$

因为 $0 \leq \psi(x) - \psi_n(x) \leq$

$$\leq \left(\int_{|\xi| \geq n} |f(\xi)| d\xi \right)^2 + 2 \int_{|\xi| \geq n} |f(\xi)| d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\eta)| d\eta$$

所以对 $x \in \mathbb{R}$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\psi_n(x) \rightarrow \psi(x)$.

$\forall A > 0$, 由 f 的连续性, 得

$$\int_{-A}^A \psi_n(x) dx = \int_{-n}^n \int_{-n}^n |f(\xi)| |f(\eta)| d\xi d\eta \int_{-A}^A e^{-|x-\xi| - |x-\eta|} dx$$

因当 $\eta > \xi$ 时

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-\xi| - |x-\eta|} dx &= \int_{-\infty}^{\xi} + \int_{\xi}^{\eta} + \int_{\eta}^{+\infty} = \\ &= e^{-(\eta-\xi)} (1 + \eta - \xi) \end{aligned}$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(|x-\xi| + |x-\eta|)} dx = e^{-|\xi-\eta|} (1 + |\xi-\eta|)$$

$$\begin{aligned} \text{即} \quad & \int_{-A}^A \psi_n(x) dx \leqslant \\ & \leqslant \int_{-n}^n \int_{-n}^n |f(\xi)f(\eta)| e^{-|\xi-\eta|} (1+|\xi-\eta|) d\xi d\eta \end{aligned}$$

在上式右端的积分中作代换: $\xi = u+v$, $\eta = u-v$, 即得

$$\begin{aligned} & \int_{-A}^A \psi_n(x) dx \leqslant \\ & \leqslant 2 \int_{-\sqrt{2n}}^{\sqrt{2n}} e^{-2|v|} (1+2|v|) dv \int_{-\sqrt{2n}}^{\sqrt{2n}} |f(u+v)f(u-v)| du \end{aligned}$$

由 Schwarz 不等式

$$\begin{aligned} & \int_{-\sqrt{2n}}^{\sqrt{2n}} |f(u+v)f(u-v)| du \leqslant \\ & \leqslant \left(\int_{-\sqrt{2n}}^{\sqrt{2n}} |f(u+v)|^2 du \right)^{1/2} \left(\int_{-\sqrt{2n}}^{\sqrt{2n}} |f(u-v)|^2 du \right)^{1/2} \\ & \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \end{aligned}$$

综上所述有

$$\begin{aligned} & \int_{-A}^A \psi_n(x) dx \leqslant \\ & \leqslant 2 \int_{-\sqrt{2n}}^{\sqrt{2n}} e^{-2|v|} (1+2|v|) dv \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \end{aligned}$$

两边令 $n \rightarrow \infty$, 并注意到极限可通过积分号 (因 $\psi_n(x) \rightarrow \psi(x)$),

$$\begin{aligned} \int_{-A}^A \psi(x) dx &\leq \\ &\leq 2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|v|} (1+2|v|) dv \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \\ &= 4 \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

由 $\psi(x) \geq 0$ 知, 上式左端是 A 的递增函数, 故在上式中令 $A \rightarrow +\infty$ 即得证.

证二. $\psi(x) = (e^{-|\xi|} \cdot |f(\xi)|)^2$ ($\cdot$ 为卷积)

由 Young 不等式, 取 $\varphi = e^{-|x|}$, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dx = \|\varphi \cdot |f|\|_2^2 \leq (\|\varphi\|_1 \|f\|_2)^2$$

而 $\|\varphi\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} dx = 2$, 即得证.

六、(16分) 设 $f_n(x) = \cos x + \cos^2 x + \cdots + \cos^n x$.

求证:

(1) 对任意自然数 n , 方程 $f_n(x) = 1$ 在 $[0, \frac{\pi}{3})$ 内有且仅有一个根;

(2) 设 $x_n \in [0, \frac{\pi}{3})$ 是 $f_n(x) = 1$ 的根, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\pi}{3}$$

证. (1) 当 $n=1$ 时, 结论显然成立. 下设 $n > 1$. 令 $y = \cos x$, 则

$$f_n(x) = g_n(y) = y + y^2 + \cdots + y^n$$

在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上考虑函数 $h_n(y) = g_n(y) - 1$. 因 $h_n(y)$ 连续,

且 $h_n(\frac{1}{2}) = -(\frac{1}{2})^n < 0$, $h_n(1) = n - 1 > 0$,

所以存在 $y_n \in (\frac{1}{2}, 1)$, 使得 $h_n(y_n) = 0$. 又因当 $y \in [\frac{1}{2}, 1]$ 时,

$$h'_n(y) = 1 + 2y + \cdots + ny^{n-1} > 1$$

所以 $h_n(y)$ 严格增, 于是 y_n 是唯一的. 而 $y = \cos x$ 在

$[0, \frac{\pi}{3})$ 上严格下降, 故对每个 y_n , 存在唯一的 $x_n =$

$\arccos y_n \in (0, \frac{\pi}{3})$ 满足要求.

(2) 由微分中值定理, 存在 $\xi \in (\frac{1}{2}, y_n)$, 使得

$$|h_n(y_n) - h_n(\frac{1}{2})| = |h'_n(\xi)| |y_n - \frac{1}{2}|$$

因为 $h_n(y_n) = 0$, $h_n(\frac{1}{2}) = -(\frac{1}{2})^n$, $|h'_n(\xi)| > 1$, 所以 $|y_n - \frac{1}{2}| \leq 1/2^n$. 从而 $y_n \rightarrow \frac{1}{2} (n \rightarrow \infty)$, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \arccos y_n = \frac{\pi}{3}.$$

2 中国科学技术大学

一、(每小题7分,共21分)求极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}, \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos a_1 x \cdots \cos a_n x}{x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a_1^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{1/x} \quad (a_i > 0, i = 1, \cdots, n).$$

解. (1) $I = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

$$\begin{aligned} (2) I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x} \sum_{i=1}^n \frac{\cos a_1 x \cdots \cos a_n x}{\cos a_i x} a_i \sin a_i x \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin a_i x}{x} = \frac{1}{2} (a_1^2 + \cdots + a_n^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) I &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{a_1^x - 1 + \cdots + a_n^x - 1}{n} \right)^{1/x} \\ &= \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{a_1^x - 1 + \cdots + a_n^x - 1}{n} \right) \right] \\ &= \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{n} \frac{a_1^x - 1 + \cdots + a_n^x - 1}{x} \right] \\ &= \exp \left(\frac{1}{n} \ln a_1 \cdots a_n \right) = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}. \end{aligned}$$

二、(10分) 设 $x^2 + 3y^2 - 2z^2 + xy - z = 2$. 求在 $(1, 1, 1)$

处的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,1,1)}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(1,1,1)}$.

解. 设 $F(x, y, z) = x^2 + 3y^2 - 2z^2 + xy - z - 2$. 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\partial F}{\partial x} / \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{2x+y}{4z+1}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,1,1)} = \frac{3}{5},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{z}{4z+1} - \frac{8x+4y}{(4z+1)^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(1,1,1)} = \frac{14}{125}.$$

三、(10分) 求

$$\iint_{x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq \pi^2} \sin \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} dx dy.$$

解. 作变换 $x = arcost, y = brsint (0 \leq r \leq \pi, 0 \leq t \leq \pi)$,

$$I = \int_0^\pi dr \int_0^{2\pi} abrsint dt = 2ab\pi^2.$$

四、(15分) 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有定义,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ 存在且有限, 对任何 $A > 0$, $\int_0^A \frac{f(x)}{x} dx$ 都收

敛, $a > b > 0$.

求证:

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = l \ln \frac{a}{b}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{证. } \int_0^A \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx &= \\
 &= \int_0^{aA} \frac{f(x)}{x} dx - \int_0^{bA} \frac{f(x)}{x} dx = \int_{bA}^{aA} \frac{f(x)}{x} dx = \\
 &= \int_{bA}^{aA} \frac{f(x) - l}{x} dx + l \ln \frac{a}{b}.
 \end{aligned}$$

任给 $\varepsilon > 1$, 存在 $M > 0$, 当 $x > M$ 时 $|f(x) - l| < \varepsilon$. 于是当 $A > \frac{M}{b}$ 时有

$$\begin{aligned}
 \left| \int_0^A \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx - l \ln \frac{a}{b} \right| &= \left| \int_{bA}^{aA} \frac{f(x) - l}{x} dx \right| \\
 &< \varepsilon \int_{bA}^{aA} \frac{dx}{x} = \varepsilon \ln \frac{a}{b}.
 \end{aligned}$$

五、(10分) 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$ 在 $x \geq \delta > 0$ 时一致收敛.

证. 级数是交错的, 并且其通项的绝对值为单调减. 故对任意的正整数 M, N 都有

$$\left| \sum_{n=N+1}^{N+M} \frac{(-1)^n}{n^x} \right| \leq \frac{1}{(N+1)^x} + \frac{1}{(N+M)^x} < \frac{2}{N^\delta}.$$

因 $2/N^\delta$ 与 x 无关, 并且可以任意小, 所以原级数一致收敛.

六、(10分) 设 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内连续且满足方程:

$$f(x) \int_0^x f(t) dt \equiv 0.$$

求证: $f(x) \equiv 0$.

证. 反证, 设有 $x_0 \in (a, b)$ 使 $f(x_0) \neq 0$. 由 $f(x)$ 的连续性知, 存在 $\delta > 0$, 使当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时, $f(x) \neq 0$ 且 $f(x)$ 和 $f(x_0)$ 同号. 而另一方面, 由题设方程可推知, $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上的积分为 0, 即在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 中 $f(x) = 0$, 矛盾.

七、(每小题 7 分, 共 14 分) 设 $|r| < 1$, 求定积分:

$$(1) \int_0^\pi \frac{r - \cos x}{1 - 2r \cos x + r^2} dx; \quad (2) \int_0^\pi \ln(1 - 2r \cos x + r^2) dx.$$

解. (1) 当 $r = 0$ 时,

$$I(0) = \int_0^\pi -\cos x dx = 0.$$

设 $0 < |r| < 1$. 令 $u = \tan \frac{x}{2}$ 则

$$I(r) = \frac{1}{r} \int_0^\infty \left[\frac{1}{1+u^2} - \frac{r-1}{r+1} \frac{1}{\frac{(r-1)^2}{(r+1)^2} + u^2} \right] du = 0.$$

或利用展式:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx = \frac{1-r^2}{2(1-2r \cos x + r^2)}$$