一九八七年

# 数学分析研究生题解

## 第七册

杨守昌　谢家海　黄仿伦编





安徽大学数学系函授组

一九八七年五月

# 前　言

经过半年多的努力，1987年《数学分析研究生题解》（即函授教材第七册）与《高等代数研究生题解》（即函授教材第七册）终于与读者见面了。在收集试题和题解的过程中，得到了各兄弟院校研究生招生办公室及各校数学系同志的热情支持，有的试题甚至是请考生在考场上抄录下来的。在收集和编写试题解答时，还得到了我系部分同志的支持。在此，对他们一并表示衷心的感谢。由于某些原因，一些学校的试题或解答未能收入本书，特请这些学校予以谅解。

我们在编写解答时，对少数简单计算题写法编简，考生在正式考试时，应多写一些中间步骤才能使答案完整。

由于编写时间仓促，书中一定存在不少缺点和错误，恳请广大读者批评指正。

这套函授教材各册书均保证供应。各册定价是：第一册，《一元微积分》，551题解，1.50元；第二册，《级数与多元微积分》，370题解，1.50元；第三册，《微分方程》，390题解，1.10元；第四册，《线性代数》，447题解，1.10元；第五、六册1985年和1986年非数学专业用110套《高等数学研究生题解》，3.00元；第七册，1987年高等院校《数学分析研究生题解》，3.00元；第八册1987年高等院校《高等代数研究生题解》，300元；还有为复旦大学编教本《概率论》习题编写的《概率论题解》，1.80元。以上定价中均含挂号寄书邮费。购书来款请寄“安徽大学数学系函授组（合肥市）”，并请在汇款单附言栏注明购各册书的册数，不要另来函说明，以免核对之繁。

# 目　　录

**以下各校数学分析试题转第八册**

# 1 北京大学

一、（18分）证明 $f(x)=\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}dt\, e^{x^2/2}$ 在〔0,+∞)有界，但在(-∞,+∞)无界。

**证**。$f(x)$在(-∞,+∞)连续。

$$\because \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}\,dt}{e^{-x^2/2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-e^{-x^2/2}}{-xe^{-x^2/2}}=0,$$

所以$f(x)$在〔0，+∞）有界。当$x<0$时，

$$f(x)\geqslant\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}dt\; e^{x^2/2}.$$

易知当$x\to-\infty$时，$f(x)\to+\infty$，故$f(x)$在（-∞，+∞）无界。

二、（18分）计算下列积分：

（1）$\int_0^{\pi/2}\sqrt{\mathrm{tg}x}+\sqrt{\mathrm{ctg}x}\,)\,dx$；

（2）$\iiint\limits_V y\sqrt{16-z^2}\,dxdydz$，其中$V$是由 $z=y^2$，$z=2y^2$（$y>0$），$z=x$，$z=2x$，和 $z=4$ 围成的区域．

**解**。（1）令 $u=\sqrt{\mathrm{tg}x}$，则 $dx=2u(1+u^4)^{-1}du$。

$$I=2\int_0^{+\infty}\left(u+\frac{1}{u}\right)\frac{udu}{1+u^4}=\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\frac{u-1/2}{\sqrt{2}}\Bigg|_0^{+\infty}$$

$$=\sqrt{2}\,\pi.$$

(2) 令$u=x/z$，$v=y^2/z$，$w=z$，则可求得

$$\frac{\partial(x,\ y,\ z)}{\partial(u,\ v,\ w)}=\frac{1}{2}w\sqrt{\frac{w}{v}}.$$

区域$V$变为$V'$：$\frac{1}{2}\leqslant u\leqslant 1$，$\frac{1}{2}\leqslant v\leqslant 1$，$0\leqslant w\leqslant 4$。于是

$$I=\frac{1}{2}\iiint\limits_{V'}\sqrt{vw}\cdot\sqrt{16-w^2}\cdot w\sqrt{\frac{w}{v}}\,dudvdw$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^4 w^2\sqrt{4^2-w^2}\,dw\ .$$

作代换$w=4\sin\varphi$（$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$），可求得$I=2\pi$。

三、（18分）设$f(x)=\dfrac{1}{1-x-x^2}$，求证$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n!}{f^{(n)}(0)}$收敛。

**证**。显然$f(0)=f'(0)=1$。$f(x)$满足

$$f(x)-xf(x)-x^2f(x)=1$$

对上式两端求$n+1$阶导数可得

$$f^{(n+1)}(x)-[xf^{(n+1)}(x)+(n+1)f^{(n)}(x)]-$$
$$-[x^2f^{(n+1)}(x)+2(n+1)xf^{(n)}(x)+n(n+1)f^{(n-1)}(x)]=0$$

以$x=0$代入即得

$$\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}$$

记 $a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$，则有

$$a_0=a_1=1,\quad a_{n+1}=a_n+a_{n-1},\quad (n\geqslant 1)$$

从而$a_n>0$，且$\{a_n\}$为单调增加。易知

$$a_{n+1}\leqslant 2a_n\ ,\quad a_{n+1}\geqslant\frac{3}{2}a_n.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}^{-1}}{a_n^{-1}}\leqslant\dfrac{2}{3}<1$，即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}$ 收敛。

四、（15分）（1）证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\ln x$ 在（0，1〕不一致收敛。

（2）证明 $\displaystyle\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\ln x\right)dx=1-\frac{\pi^2}{6}$

**证**。（1）和函数为

$$S(x)=\frac{x\ln x}{1-x},\quad x\in(0,1);\quad S(1)=0.$$

当 $x\to 1-0$ 时，$S(x)\to 1$，所以$S(x)$在（0，1〕上不连续。原级数每一项都连续，所以级数在（0，1〕上不一致收敛。

（2）任意$0<\delta<x<1$，级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}t^n\ln t=\frac{\ln t}{1-t}$$

在〔$\delta$，$x$〕上一致收敛，从而有

$$\int_\delta^x\frac{\ln x}{1-t}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_\delta^x t^n\ln t\,dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^1-\int_0^{\delta}-\int_x^1\right)t^n\ln t\,dt \qquad (\cdot)$$

因为 $\displaystyle\int_0^1 t^n\ln t\,dt=-\frac{1}{(n+1)^2}$

所以 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 t^n\ln t\,dt=-\frac{\pi^2}{6}$

又因 $\displaystyle\left|\int_0^{\delta}t^n\ln t\,dt\right|\leqslant\frac{1}{(n+1)^2}$

$$\left|\int_x^1 t^n\ln t\,dt\right|\leqslant\frac{1}{(n+1)^2}$$

所以 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\delta}t^n\ln t\,dt$ 和 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\int_x^1 t^n\ln t\,dt$ 分别在 $0\leqslant\delta\leqslant1$ 和 $0\leqslant x\leqslant1$ 上一致收敛。在（$\cdot$）式两端令 $\delta\to0$，$x\to1$ 即得

$$\int_0^1\frac{\ln t}{1-t}dt=-\frac{\pi^2}{6},$$

或 $\displaystyle\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}x^n\ln x\,dx=1-\frac{\pi^2}{6}$.

五、（15分）设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx<+\infty,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2dx<+\infty$$

定义 $\psi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(|x-\xi|+|x-\eta|)}$

$\cdot|f(\xi)||f(\eta)|d\xi d\eta$,

证明： $\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)dx\leqslant 4\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2dx$.

**证一**. 令

$$\psi_n(x)=\int_{-n}^{n}\int_{-n}^{n}e^{-(|x-\xi|+|x-\eta|)}|f(\xi)||f(\eta)|d\xi d\eta$$

因为 $0\leqslant\psi(x)-\psi_n(x)\leqslant$

$$\leqslant\left(\int_{|\xi|\geqslant n}|f(\xi)|d\xi\right)^2+2\int_{|\xi|\geqslant n}|f(\xi)|d\xi\int_{-\infty}^{+\infty}|f(\eta)|d\eta$$

所以对 $x\in\mathbf{R}$，当$n\to\infty$时，$\psi_n(x)\rightrightarrows\psi(x)$.

$\forall A>0$，由$f$的连续性，得

$$\int_{-A}^{A}\psi_n(x)dx=\int_{-n}^{n}\int_{-n}^{n}|f(\xi)f(\eta)|d\xi d\eta\int_{-A}^{A}e^{-|x-\xi|-|x-\eta|}dx$$

因当 $\eta>\xi$ 时

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|x-\xi|-|x-\eta|}dx=\int_{-\infty}^{\xi}+\int_{\xi}^{\eta}+\int_{\eta}^{+\infty}=$$

$$=e^{-(\eta-\xi)}(1+\eta-\xi)$$

$$\therefore\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(|x-\xi|+|x-\eta|)}dx=e^{-|\xi-\eta|}(1+|\xi-\eta|)$$

即 $$\int_{-A}^{A}\psi_n(x)dx\leqslant$$

$$\leqslant\int_{-n}^{n}\int_{-n}^{n}|f(\xi)f(\eta)|\ e^{-|\xi-\eta|}(1+|\xi-\eta|)d\xi d\eta$$

在上式右端的积分中作代换：$\xi=u+v$，$\eta=u-v$，即得

$$\int_{-A}^{A}\psi_n(x)dx\leqslant$$

$$\leqslant 2\int_{-\sqrt{2}n}^{\sqrt{2}n}e^{-2|v|}\ (1+2|v|)dv\int_{-\sqrt{2}n}^{\sqrt{2}n}|f(u+v)f(u-v)|du$$

由 Schwarz 不等式

$$\int_{-\sqrt{2}n}^{\sqrt{2}n}|f(u+v)f(u-v)|du\leqslant$$

$$\leqslant\left(\int_{-\sqrt{2}n}^{\sqrt{2}n}|f(u+v)|^2du\right)^{1/2}\left(\int_{-\sqrt{2}n}^{\sqrt{2}n}|f(u-v)|^2du\right)^{1/2}$$

$$\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx$$

综上所述有

$$\int_{-A}^{A}\psi_n(x)dx\leqslant$$

$$\leqslant 2\int_{-\sqrt{2}n}^{\sqrt{2}n}e^{-2|v|}(1+2|v|)dv\ \int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2dx$$

两边令$n\to\infty$，并注意到极限可通过积分号（因$\psi_n(x)$
$\rightrightarrows\psi(x)$），

$$\int_{-A}^{A}\psi(x)dx\leqslant$$

$$\leqslant 2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2|v|}(1+2|v|)dv\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2dx$$

$$=4\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2dx.$$

由$\psi(x)\geqslant 0$知，上式左端是$A$的递增函数，故在上式中令$A\to+\infty$即得证。

**证二。** $\psi(x)=(e^{-|\xi|}\ast|f(\xi)|)^2$　（$\ast$为卷积）

由 Young 不等式，取$\varphi=e^{-|x|}$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)dx=\|\varphi\ast|f|\|_2^2\leqslant(\|\varphi\|_1\|f\|_2)^2$$

而$\|\varphi\|_1=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|x|}dx=2$，即得证。

六、（16分）设$f_n(x)=\cos x+\cos^2x+\cdots+\cos^nx$。

求证：

（1）对任意自然数$n$，方程$f_n(x)=1$在$[0,\frac{\pi}{3})$内有且仅有一个根；

（2）设 $x_n\in[0,\frac{\pi}{3})$是$f_n(x)=1$的根，则

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{\pi}{3}$$

**证.**（1）当$n=1$时，结论显然成立．下设$n>1$．令$y=\cos x$，则

$$f_n(x)=g_n(y)=y+y^2+\cdots+y_n$$

在$[\frac{1}{2},1]$上考虑函数$h_n(y)=g_n(y)-1$。因$h_n(y)$连续，且

$$h_n(\tfrac{1}{2})=-(\tfrac{1}{2})^n<0,\ h_n(1)=n-1>0,$$

所以存在$y_n\in(\frac{1}{2},1)$，使得$h_n(y_n)=0$。又因当$y\in[\frac{1}{2},1]$时，

$$h'_n(y)=1+2y+\cdots+ny^{n-1}>1$$

所以$h_n(y)$严稳增，于是$y_n$是唯一的。而 $y=\cos x$ 在$[0,\frac{\pi}{3})$上严格下降，故对每个$y_n$，存在唯一的$x_n=\arccos y_n\in(0,\frac{\pi}{3})$满足要求．

（2）由微分中值定理，存在$\xi\in(\frac{1}{2},y_n)$，使得

$$|h_n(y_n)-h_n(\tfrac{1}{2})|=|h_n'(\xi)||y_n-\tfrac{1}{2}|$$

因为$h_n(y_n)=0$，$h_n(\frac{1}{2})=-(\frac{1}{2})^n$，$|h_n'(\xi)|>1$，所以$|y_n-\frac{1}{2}|\leqslant 1/2^n$。从而$y_n\to\frac{1}{2}(n\to\infty)$，即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\arccos y_n=\frac{\pi}{3}.$$

## 2 中国科学技术大学

一、（每小题7分，共21分）求极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$；（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos a_1x\cdots\cos a_nx}{x}$；

（3）$\lim\limits_{x\leftarrow 0}\left(\dfrac{a_1^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{1/x}$ （$a_i>0$，$i=1$，$\cdots,n$）。

解．（1）$I=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$

（2）$I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2x}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\cos a_1x\cdots\cos a_nx}{\cos a_ix}a_i\sin a_ix$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i\lim_{x\to 0}\frac{\sin a_ix}{x}=\frac{1}{2}(a_1^2+\cdots+a_n^2).$$

（3）$I=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{a_1^x-1+\cdots+a_n^x-1}{n}\right)^{1/x}$

$$=\exp\left[\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{a_1^x-1+\cdots+a_n^x-1}{n}\right)\right]$$

$$=\exp\left[\lim_{x\to 0}\frac{1}{n}\ \frac{a_1^x-1+\cdots+a_n^x-1}{x}\right]$$

$$=\exp\left(\frac{1}{n}\ln a_1\cdots a_n\right)=\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}.$$

二、（10分）设$x^2+3y^2-2z^2+xy-z=2$.求在$(1,1,1)$处的偏导数 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}$ 和$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,1,1)}$.

**解**. 设$F(x, y, z)=x^2+3y^2-2z^2+xy-z-2$. 则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial x}\Big/\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{2x+y}{4z+1},\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}=\frac{3}{5};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x}=\frac{z}{4z+1}-\frac{8x+4y}{(4z+1)^2}\quad\frac{\partial z}{\partial x},$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,1,1)}=\frac{14}{125}.$$

三、（10分）求

$$\iint\limits_{x^2/a^2+y^2/b^2\leqslant\pi^2}\sin\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}dxdy.$$

**解**. 作变换 $x=ar\cos t, y=br\sin t(0\leqslant r\leqslant\pi,\ 0\leqslant t\leqslant\pi)$,

$$I=\int_0^{\pi}dr\int_0^{2\pi}abr\sin t\,dt=2ab\pi^2.$$

四、（15分）设 $f(x)$在$(0,\ +\infty)$上有定义,

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$ 存在且有限，对任何$A>0$，$\int_0^A\frac{f(x)}{x}dx$ 都收敛，$a>b>0$.

求证：

$$\int_0^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=l\ln\frac{a}{b}.$$

**证.** $\int_0^A \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=$

$$=\int_0^{aA}\frac{f(x)}{x}dx-\int_0^{bA}\frac{f(x)}{x}dx=\int_{bA}^{aA}\frac{f(x)}{x}dx=$$

$$=\int_{bA}^{aA}\frac{f(x)-l}{x}dx+l\ln\frac{a}{b}.$$

任给$\varepsilon>1$，存在$M>0$，当$x>M$时$|f(x)-l|<\varepsilon$．于是当$A>\frac{M}{b}$时有

$$\left|\int_0^A\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx-l\ln\frac{a}{b}\right|=\left|\int_{bA}^{aA}\frac{f(x)-l}{x}dx\right|$$

$$<\varepsilon\int_{bA}^{aA}\frac{dx}{x}=\varepsilon\ln\frac{a}{b}.$$

**五、**（10分）证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$在$x\geqslant\delta>0$时一致收敛.

**证.** 级数是交错的，并且其通项的绝对值为单调减．故对任意的正整数$M$，$N$都有

$$\left|\sum_{n=N+1}^{N+M}\frac{(-1)^n}{n^x}\right|\leqslant\frac{1}{(N+1)^x}+\frac{1}{(N+M)^x}<\frac{2}{N^\delta}.$$

因$2/N^\delta$与$x$无关，并且可以任意小，所以原级数一致收敛.

六、（10分）设 $f(x)$ 在区间（$a$，$b$）内连续且满足方程：

$$f(x)\int_0^x f(t)dt \equiv 0.$$

求证：$f(x)\equiv 0$。

**证**。反证，设有 $x_0\in(a,b)$ 使 $f(x_0)\neq 0$．由 $f(x)$ 的连续性知，存在 $\delta>0$，使当 $x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ 时，$f(x)\neq 0$ 且 $f(x)$ 和 $f(x_0)$ 同号．而另一方面，由题设方程可推知，$f(x)$ 在 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ 上的积分为0，即在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 中 $f(x)=0$，矛盾。

七、（每小题7分，共14分）设 $|r|<1$，求定积分：

（1）$\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{r-\cos x}{1-2r\cos x+r^2}dx$；（2）$\displaystyle\int_0^{\pi}\ln(1-2r\cos x+r^2)dx$。

**解**。（1）当 $r=0$ 时，

$$I(0)=\int_0^{\pi}-\cos x dx=0.$$

设 $0<|r|<1$。令 $u=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ 则

$$I(r)=\frac{1}{r}\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{1+u^2}-\frac{r-1}{r+1}\,\frac{1}{\frac{(r-1)^2}{(r+1)^2}+u^2}\right]du=0.$$

或利用展式：

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos nx=\frac{1-r^2}{2(1-2r\cos x+r^2)}$$