安徽省高职高专规划教材

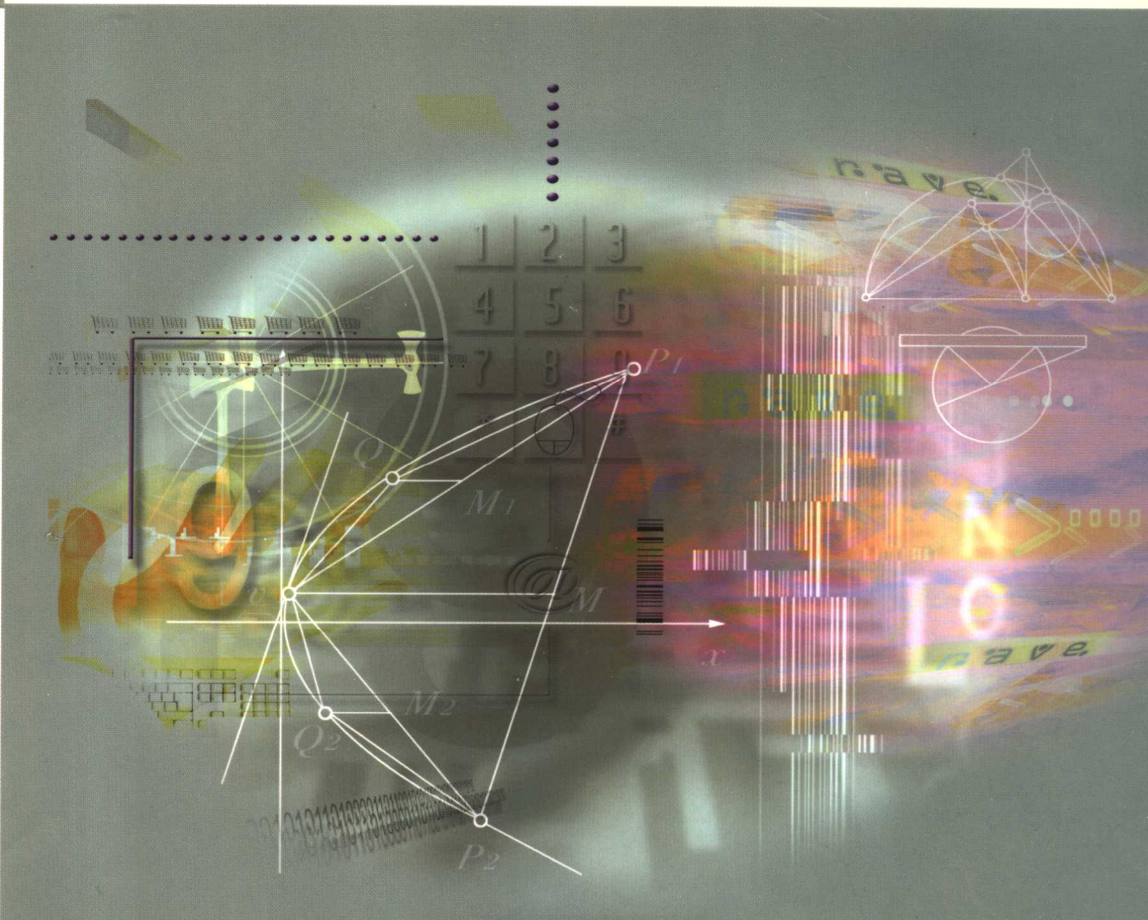
Anhuisheng Gaozhi Gaozhuan Guihua Jiaocai

高等数学

工科类

GAODENG SHUXUE

主　编◎邬弘毅　黄建国



合肥工业大学出版社

安徽省高职高专规划教材

高等数学

（工科类）

主　编　邬弘毅　黄建国
副主编　王正萍　梁继会
参　编　吴方庭　权为民
　　　　安忠猛　钱小仕

合肥工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/邬弘毅,黄建国主编. —合肥:合肥工业大学出版社,2006.7
ISBN 7-81093-415-5

Ⅰ.高... Ⅱ.①邬... ②黄... Ⅲ.高等数学-高等学校:技术学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 083434 号

高等数学

主　编　邬弘毅　黄建国　　　　责任编辑　汤礼广

出　版	合肥工业大学出版社		**版　次**	2006年8月第1版
地　址	合肥市屯溪路193号		**印　次**	2006年8月第1次印刷
邮　编	230009		**开　本**	787×1092　1/16
电　话	总编室	0551-2903038	**印　张**	19.25
	发行部	0551-2903198	**字　数**	468千字
网　址	www.hfutpress.com.cn		**发　行**	全国新华书店
E-mail	press@hfutpress.com.cn		**印　刷**	安徽新华印刷股份有限公司图书印装分公司

ISBN 7-81093-415-5/O·5　　　　**定价:** 29.50元

如果有影响阅读的印装质量问题,请与出版社发行部联系调换

前　　言

近几年来，我国的高等职业教育事业发展很快，社会对人才的需求也在不断变化，这对高职高专的高等数学教学提出了许多新的要求。为了更好地适应教学需要，根据教育部制定的《高职高专教育高等数学教学基本要求》的精神，我们在总结高职高专教学经验、探索高职高专数学教学发展方向、分析国内外同类教材特点的基础上，对合肥工业大学出版社先前出版的由合肥工业大学邬弘毅教授主编的安徽省高职高专《高等数学》（上、下）规划教材（见安徽省教育厅教秘高[2005]95号批复）进行了重新编写，并将上、下两册合并为一册。重新编写后的教材具有以下特点：

(1)更加突出以应用、实用、够用为度的教学原则。

(2)注重对学生的应用意识、兴趣和能力的培养。其中增加数学实验内容的目的就是为了提高学生将实际问题转化为高等数学相关问题的计算能力。

(3)对数学概念的叙述更加通俗、易懂，淡化了深奥的数学理论，强化了几何直观。

(4)根据工科类专业的教学需要，优选了一些应用实例。

本次编写工作由合肥工业大学邬弘毅教授和安徽水利水电职业技术学院黄建国副教授共同主持。参与本教材编写的老师还有：王正萍、吴方庭、梁继会、权为民、安忠猛、钱小仕。

本教材在编写过程中曾得到安徽省教育厅和合肥工业大学有关领导的关心和大力支持，在此表示衷心的感谢！

由于编者的水平和经验有限，书中难免存在不足之处，敬请读者批评指正。

编　者

2006年7月

目 录

第一章　极限与连续

高等数学是用极限方法，研究函数性质的一门学科．它以静认识动、以近似认识精确、以有限认识无限的思想方法，充分体现了辩证思维在人类认识世界、把握世界的过程中所起的关键作用．本章将在复习函数的概念及基本性质的基础之上，介绍极限的概念和性质，讨论函数的连续性等问题．

第一节　函　　数

一、区间、邻域

1．区间

在研究函数时，常用到一种实数的集合，就是区间．

定义 1　设 a,b 为两个实数，且 $a<b$，则数集 $\{x|a<x<b\}$ 称为开区间，记为 (a,b)，即 $(a,b)=\{x|a<x<b\}$．

类似地，$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间；$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$，$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$ 称为半开半闭区间．

上面介绍的区间都是有限区间。除了有限区间外，还有无穷区间，例如 $(a,+\infty)=\{x|x>a\}$，$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$，$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$，$[-\infty,b)=\{x|\leqslant b\}$ 等．全体实数的集合 $\mathbf{R}$，可以记为无穷区间 $(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$．

2．邻域

设 x_0 是给定的实数，δ 是给定的正数，称数集 $\{x||x-x_0|<\delta\}$ 为点 x_0 的 δ 邻域，记作 $U(x_0,\delta)$，即

$$U(x_0,\delta)=\{x\mid|x-x_0|<\delta\}$$

由于

$$|x-x_0|<\delta\Leftrightarrow x_0-\delta<x<x_0+\delta$$

所以点 x_0 的 δ 邻域是开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$．两个端点关于 x_0 对称，其中 x_0 确定了邻域的位置，称作邻域的中心，δ 确定了邻域的大小，称为邻域的半径．

将邻域的中心 x_0 去掉所得的数集，称为点 x_0 的空心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(x_0,\delta)$，即

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$$

二、函数的概念

定义 2　设有两个集合 D 与 M，在它们之间存在着一个对应关系 f，当在 D 中取定一个数值 x 时，通过 f 在 M 中有且只有一个数值 y 与之对应，这时我们称 D 与 M 间建立了一个函数的对应关系 $y=f(x)$．

显然，在上述定义下，D 中的每一个 x 只能在 M 中对应一个 y，但反过来 M 中的一个 y 却可以对应 D 中的多个 x. 这种对应称为单值对应.

函数由三部分内容构成，D 称为定义域，M 称为值域，f 称为对应关系. 但 M 是非独立的，如 $f(x)=2x^2+1$，$D=(0,2)$，则 $0<x<2$，$1<2x^2+1<9$，即 $M=(1,9)$. 因此定义域与对应关系一旦确定，函数就确定了，所以定义域与对应关系被称为函数的两要素. 两个函数只要定义域与对应关系相同，就是相同的函数，否则就是不同的函数.

通常函数的表示有三种方式：列表法、图形法和解析法. 例如下列银行储蓄存期不同年限的利率表就是一个函数.

三个月	半年	一年	二年	三年	五年
1.71	2.07	2.25	2.70	3.24	3.60

工厂常用的通过长期实验得到的所谓“经验曲线”(如图 1－1)也是一个函数.

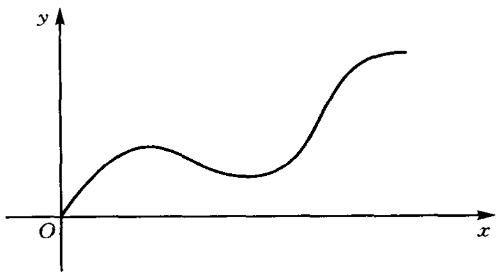


图 1－1

但数学上最重要的是解析法表示的函数，即可用数学表达式表达的函数. 一个函数若没有指明定义域，则该函数的定义域，就是使该函数表达式有意义的实数所组成的集合.

例 1 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}$ 的定义域.

解 要使函数 $f(x)$ 有意义，必须同时满足负数不能开偶次方和分母不能为零这两个条件，即 $x^2-x-2>0$，解得 $x>2$ 或 $x<-1$. 因此，其函数的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$.

在工程技术和经济领域的实际问题中，常常会遇到在定义域的不同范围内要用不同的解析式来表示的函数，这种函数称为分段函数.

例如，函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1, & x>1\end{cases}$ 是一个分段函数，它的定义域为 $[0,+\infty)$. 当 $x\in[0,1]$ 时，对应的函数值 $y=f(x)=x^2$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，对应的函数值 $y=f(x)=1$. 该函数当自变量 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，因 $\dfrac{1}{2}\in[0,1]$，故 $f(\dfrac{1}{2})=(\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{1}{4}$；当 $x=5$ 时，因 $5\in(1,+\infty)$，故 $f(5)=1$.

分段函数是今后研究的主要对象之一，特别要留意函数在“分段点处”性质的变化。

三、函数的几种特性

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,数集 $X\subset D$. 如果存在数 K_1 使得

$$f(x)\leqslant K_1$$

对任一 $x\in X$ 都成立,则称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界,而 K_1 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个上界. 如果存在数 K_2,使得

$$f(x)\geqslant K_2$$

对任一 $x\in X$ 都成立,则称函数 $f(x)$ 在 X 上有下界,而 K_2 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个下界. 如果存在正数 M,使得

$$|f(x)|\leqslant M$$

对任一 $x\in X$ 都成立,则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界. 如果这样的 M 不存在,就称函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

例如,$y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界,$-1\leqslant\sin x\leqslant 1$,数 1 是它的一个上界,而 -1 是它的一个下界.

又如 $f(x)=\ln x$ 在 $(0,1)$ 内有上界而无下界;$g(x)=\mathrm{e}^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有下界而无上界.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 上的任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1)<f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在 I 上是单调增加的;如果对于区间 I 上的任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1)>f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在 I 上是单调减少的. 单调增加和单调减少的函数称为单调函数.

例如,函数 $y=x^2$,在 $(-\infty,0)$ 上单调减少为减函数;而在 $(0,+\infty)$ 上单调增加为增函数. 但函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上不是单调函数.

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即若 $x\in D$ 则必有 $-x\in D$). 如果对于任意 $x\in D$,有

$$f(-x)=f(x)$$

恒成立,则称 $f(x)$ 为偶函数. 若对于任意 $x\in D$,有

$$f(-x)=-f(x)$$

恒成立,则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点对称.

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在一个不为零的常数 T,使得对于任一

$x \in D$,有

$$f(x+T)=f(x)$$

恒成立,则称函数 $f(x)$为周期函数,T 称为函数 $f(x)$的一个周期.

若 T 为函数 $f(x)$的一个周期,则

$$f(x+2T)=f[(x+T)+T]=f(x+T)=f(x)$$

即 $2T$ 也是 $f(x)$的周期.显然 $kT(k\in \mathbf{Z})$都是 $f(x)$的周期.我们把一个函数周期中的最小正数,称为最小正周期,通常我们所说的周期,指的就是最小正周期.

将周期函数图形上任意一段平移 T 个单位,必然与此函数的图形重合.

四、反函数

设函数 $f(x)$的定义域为 D,值域为 M.如果 D 中不同的 x,通过 f 在 M 中对应的 y 也是不同的,这样的对应称为"一一对应".可以看出这时 M 到 D 的对应也满足函数对应的要求,即存在反函数.这个函数的定义域为 M,值域为 D,对应关系为 f^{-1}.

例如,函数 $y=f(x)=2x+1$,$D=[-1,3]$.则 $M=[-1,7]$,它的图形是一条直线上的一段,显然 D 与 M 之间的对应是一一对应,应有反函数.直接从原函数求出 $x=f^{-1}(y)=\frac{1}{2}(y-1)$定义域为原函数的值域 $M=[-1,7]$,值域为原函数的定义域 $D=[-1,3]$,称为直接反函数.由于函数是由定义域与对应关系决定的,用什么字母表示自变量无关紧要,按照习惯改用 x 表示自变量,则反函数为 $y=f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(x-1)$,定义域为$[-1,7]$,称为矫形反函数.要注意的是:函数与直接反函数的图形是相同的,而与矫形反函数的图形则是关于直线 $y=x$ 对称的.

从图形上看,单调的函数一定是有反函数的.

五、复合函数

设函数 $y=f(u)$的定义域为 D_f,函数 $u=\varphi(x)$的定义域为 D_φ,值域为 R_φ.如果 D_f 与 R_φ 的交集非空,即 $D_f\cap R_\varphi\neq\varnothing$,则通过变量 u 可以确定变量 y 是 x 的函数,并称这一函数是由 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$复合的函数,记作 $y=f[\varphi(x)]$,称变量 u 为中间变量.

要注意的是 $D_f\cap R_\varphi\neq\varnothing$,否则是不能得到复合函数的.如 $y=f(u)=\arcsin u$ 与 $u=\varphi(x)=x^2+2$ 就不能形成复合函数,因为 $D_f=[-1,1]$,而 $R_\varphi=[2,+\infty)$,$D_f\cap R_\varphi=\varnothing$.

例 2 设函数 $f(x)$的定义域为$[0,1]$,求 $f(\sin x)$的定义域.

解 由 $f(x)$的定义域为$[0,1]$,可知 $f(\sin x)$必须满足

$$0\leqslant \sin x\leqslant 1$$

即

$$2k\pi\leqslant x\leqslant (2k+1)\pi \quad (k\text{ 为整数})$$

所以 $f(\sin x)$ 的定义域为 $\{x \mid 2k\pi \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi, k$ 为整数$\}$.

例 3 指出下列函数的复合过程.

(1) $y=\sqrt{1-x^2}$;　　(2) $y=\ln(1+\sqrt{1+x^2})$;

(3) $y=\sin^2\sqrt{x+1}$;　　(4) $y=e^{\tan\frac{1}{x}}$.

解 (1) $y=\sqrt{1-x^2}$ 由 $y=\sqrt{u}, u=1-x^2$ 复合而成.

(2) $y=\ln(1+\sqrt{1+x^2})$ 由 $y=\ln u, u=1+\sqrt{v}, v=1+x^2$ 复合而成.

(3) $y=\sin^2\sqrt{x+1}$ 由 $y=u^2, u=\sin v, v=\sqrt{w}, w=x+1$ 复合而成.

(4) $y=e^{\tan\frac{1}{x}}$ 由 $y=e^u, u=\tan v, v=\dfrac{1}{x}$ 复合而成.

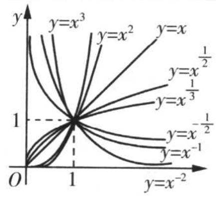
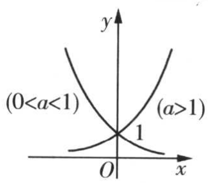
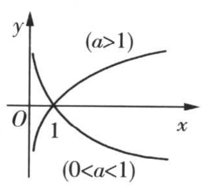
六、初等函数

1. 基本初等函数

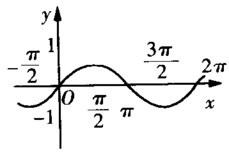
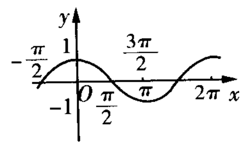
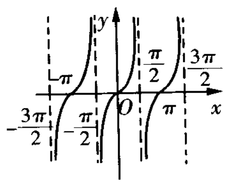
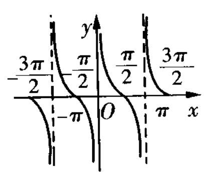
所谓基本初等函数，是指以下五类函数：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数.

现将这些函数定义域、图形和基本性质列于表 1-1。

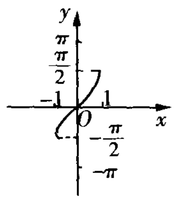
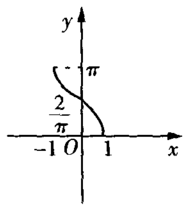
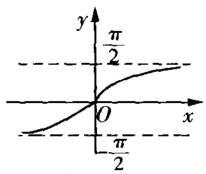
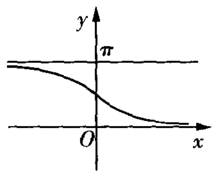
表 1-1

名称	表达式	定义域	图　形	特　性
幂函数	$y=x^\mu$ $(\mu\neq 0)$	随 μ 而不同，但在 $(0,+\infty)$ 中都有定义		经过点 $(1,1)$. 在第一象限内. 当 $\mu>0$ 时，x^μ 为增函数；当 $\mu<0$ 时，x^μ 为减函数
指数函数	$y=a^x$ $(a>0, a\neq 1)$	$(-\infty,+\infty)$		图形在 x 轴上方(因 $a^x>0$)，且都通过点 $(0,1)$. 当 $0<a<1$ 时，a^x 是减函数；当 $a>1$ 时，a^x 是增函数
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>0, a\neq 1)$	$(0,+\infty)$		图形在 y 轴右侧(因 0 与负数都没有对数)，都通过点 $(1,0)$. 当 $0<a<1$ 时，$\log_a x$ 是减函数；当 $a>1$ 时，$\log_a x$ 是增函数

续表

名称		表达式	定义域	图形	特性
三角函数	正弦函数	$y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$		是以 2π 为周期的奇函数(图形关于原点对称). 图形在两直线 $y=1$ 与 $y=-1$ 之间,即 $\lvert\sin x\rvert\leqslant 1$
	余弦函数	$y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$		是以 2π 为周期的偶函数(图形关于 y 轴对称). 图形在两直线 $y=1$ 与 $y=-1$ 之间,即 $\lvert\cos x\rvert\leqslant 1$
	正切函数	$y=\tan x$	$x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$		是以 π 为周期的奇函数,在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内是增函数
	余切函数	$y=\cot x$	$x\neq k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$		是以 π 为周期的奇函数,在 $(0,\pi)$ 内是减函数

续表

名称		表达式	定义域	图形	特性
反三角函数	反正弦函数	$y=\arcsin x$	$[-1,1]$		单调增加的奇函数. 值域: $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$
	反余弦函数	$y=\arccos x$	$[-1,1]$		单调减少. 值域: $0\leqslant y\leqslant\pi$
	反正切函数	$y=\arctan x$	$(-\infty,+\infty)$		单调增加的奇函数. 值域: $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$
	反余切函数	$y=\operatorname{arccot} x$	$(-\infty,+\infty)$		单调减少. 值域: $0<y<\pi$

2. 初等函数

由常数和基本初等函数经有限次四则运算和有限次复合运算,并能用一个数学式子表示的函数,称为初等函数. 例如

$$y=x^2\sin(2x+\frac{\pi}{4}),\quad y=\ln\frac{x+\sin x}{\cos^2 x},\quad y=e^{2x}-x\arctan(2x-1)$$

等都是初等函数. 而一般的分段函数

$$y=\sin x=\begin{cases}1, x>0\\0, x=0\\-1, x<0\end{cases},\quad f(x)=\begin{cases}x^2, x\leqslant 0\\x-1, x>0\end{cases}$$

就不是初等函数. 但并不是所有的分段函数都不是初等函数. 如 $y=|x|=\begin{cases}-x, x<0\\x, x\geqslant 0\end{cases}$ 为分段函数,但 $y=|x|=\sqrt{x^2}$ 可视为 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=x^2$ 复合而成的函数,所以它是初等函数.

习题 1-1

1. 用文字表述下列函数的对应关系 f.

(1) $f(x)=2x+1$；　(2) $f(x)=\sin(x-\frac{\pi}{4})$.

2. 已知函数 $f(x)=x^2$，$g(x)=\sin x$，求下列复合函数.

(1) $f[f(x)]$；　(2) $f[g(x)]$；

(3) $g[f(x)]$；　(4) $g[g(x)]$.

3. 若 $f(x)=\begin{cases} x^2, x\geqslant 0, \\ -x, x<0, \end{cases}$ $g(x)=\begin{cases} x, x>0, \\ x^2, x\leqslant 0. \end{cases}$ 求当 $x\leqslant 0$ 时，$f[g(x)]$的表达式.

4. 已知复合函数 $f(x+1)=x^2-1$，求下列函数

(1) $f(x)$；　(2) $f(\frac{1}{x})$.

5. 证明函数 $f(x)=-x^3+1$ 为减函数.

6. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$；　(2) $f(x)=2^x-2^{-x}$；

(3) $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$；　(4) $f(x)=x^2\cos x$.

7. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sin\sqrt{x}$；　(2) $y=\tan(2x+\frac{\pi}{3})$；　(3) $y=\arcsin(x+1)$；

(4) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\frac{1}{x}$；(5) $y=\ln(x-1)$；　(6) $y=\frac{1}{e^{x-1}}$.

8. 求下列函数的反函数.

(1) $y=3\sin 2x$；　(2) $y=1+\ln(x-2)$；　(3) $y=\frac{2^x}{2^x+1}$.

9. 判断下列各对函数是否为同一函数.

(1) $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$；　(2) $f(x)=\ln\sqrt{x}, g(x)=\frac{1}{2}\ln x$；

(3) $f(x)=x+1, g(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$；　(4) $f(x)=\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}, g(x)=\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-1}}$.

10. 下列函数分别是由哪些函数复合而成的?

(1) $y=\ln\cos x$；　(2) $y=\cos(2x+1)$；

(3) $y=(\arcsin\frac{x}{3})^2$；　(4) $y=e^{\tan(x+2)}$.

第二节　数列与函数的极限

函数 $y=f(x)$的因变量 y 依赖自变量 x 的变化而变化. 我们关心的是，当自变量 x 在某一变化状态下，对应的因变量 y 的变化趋势. 这里自变量 x 的变化状态主要是指以下两种情况：

(1) x 越来越接近(无限接近)有限值 x_0，记作 $x\to x_0$；

(2) x 的绝对值$|x|$无限增大,记作 $x\to\infty$.

我们先讨论特殊的函数——数列的极限,然后再讨论一般函数的极限.

一、数列的极限

数列是指按一定规律排列的一列数

$$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$$

简记为$\{x_n\}$. 数列中的每一个数称作数列的项,第 n 项 x_n 称作数列的通项或一般项. 例如

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}:1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots \tag{1}$$

$$\left\{1-\frac{1}{2^n}\right\}:\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{7}{8},\cdots,1-\frac{1}{2^n},\cdots \tag{2}$$

$$\left\{(-1)^n\frac{1}{n}\right\}:-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\cdots,(-1)^n\frac{1}{n},\cdots \tag{3}$$

可见数列中的项 x_n 随着 n 的变化而变化,所以 x_n 是以 n 为自变量的函数,即 $x_n=f(n)$,也把它称为整标函数.

数列按项数可分为有穷数列和无穷数列;按增减状况可分为单调增加数列、单调减少数列和摆动数列;按绝对值可分为有界数列和无界数列.

如 (1)是单调减少数列,(2)是单调增加数列,(3)是摆动数列. 它们都是无穷数列,也都是有界数列.

容易看出当项数 n 无限增大时,数列(1)的一般项无限地趋向于 0,数列(2)的一般项无限地趋向于 1,数列(3)的一般项无限地趋向于 0.

定义 1 如果无穷数列的项数 n 无限增大时,数列 $x_n=f(n)$的一般项无限地趋向于一个确定的常数 A,那么就称 A 为这个数列的极限,记作

$$\lim_{n\to\infty}f(n)=A \quad 或 \quad x_n\to A(n\to\infty)$$

数列(1)的一般项无限地趋向于 0,即$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$;数列(2)的一般项无限地趋向于 1,即$\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^n})=1$;数列(3)的一般项无限地趋向于 0,即$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{n}=0$.

如果一个数列有极限,就称这个数列是收敛的,否则就称它是发散的. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,也称 x_n 收敛于 A.

定理 1 (整体有界性) 若数列$\{x_n\}$收敛,则数列必有界.(证明略)

要注意有界数列不一定收敛. 有界是数列收敛的必要条件,而不是充分条件.

例如,数列$\{(-1)^n\}$是有界数列,但当 $n\to\infty$时,数列的项在 -1 和 1 之间摆动,不趋向一个确定的数,所以它是发散的.

定理 2(单调有界收敛) 若数列$\{x_n\}$单调有界,则数列$\{x_n\}$必收敛. (证明略)

例如,数列 $x_n=(\frac{1}{2})^n$,显然该数列是单调减少的,且 $0<(\frac{1}{2})^n<\frac{1}{2}$为有界,所以该数列应收敛. 事实上,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2})^n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$. 一般地 $x_n=q^n(0<q<1)$,