教育部人才培养模式改革和开放教育试点教材
数学与应用数学专业系列教材

数学建模

主编 李佐锋

中央廣播电視大學出版社

教育部人才培养模式改革和开放教育试点教材
数学与应用数学专业系列教材

数 学 建 模

主编 李佐锋

中央广播电视大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学建模/李佐锋主编.—北京:中央广播电视大学出版社,2003.12

教育部人才培养模式改革和开放教育试点教材.数学与应用数学专业系列教材

ISBN 7-304-02526-3

Ⅰ.数... Ⅱ.李... Ⅲ.数学模型—电视大学—教材 Ⅳ.022

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 120203 号

教育部人才培养模式改革和开放教育试点教材

数学与应用数学专业系列教材

数 学 建 模

主编 李佐锋

出版·发行:中央广播电视大学出版社

电话:发行部:010-68519502　　总编室:010-68182524

网址:http://www.crtvup.com.cn

地址:北京市海淀区西四环中路 45 号

邮编:100039

经销:新华书店北京发行所

策划编辑:旷天鑑　　**责任编辑**:徐玉华

印刷:北京印刷二厂　　**印数**:4001~6000

版本:2003 年 11 月第 1 版　　2004 年 11 月第 2 次印刷

开本:B5　　**印张**:18　　**字数**:319 千字

书号:ISBN 7-304-02526-3/O·134

定价:24.00 元

(如有缺页或倒装,本社负责退换)

序　言

21世纪,中国全面进入了一个新的发展与竞争的时代.归根结底,竞争是人才和知识的竞争,团体竞争的优胜者将是那些具有一批高水平人才的团体;个体竞争的优胜者将是那些具有现代科学知识与超群工作能力的人.在这竞争的时代,青年人渴望学习到适应工作岗位需要的知识.正是在这种环境下,中央广播电视大学与东北师范大学为满足一大批中学数学教师的要求,联合开办了(师范类)本科数学与应用数学专业.

本专业的开办,为追求知识的中学青年教师开辟了一条前进的道路,而知识的获取,要靠学习者的辛勤劳动.可以说,学习是一项艰苦的劳动.这项劳动与其他劳动的一个显著区别是:学习不能由别人代替来完成,甚至也不能合作完成.特别是数学知识的学习,必须经过学习者一番夜不能寐的(有时甚至是痛苦的)冥思苦想,才能掌握数学的本质,才能体会到数学的真谛,才能达到由此及彼、由表及里的境界.

数学是众多学科中最为抽象的学科.它高度的抽象性,决定了他广泛的应用性,同时也造成了数学学习的困难.毋庸讳言,相对其他学科来说,学习数学需要花费更多的时间与精力.但是,数学并不是高不可攀的科学.数学的学习如同攀登高楼一样,只要一步一个台阶(而不是两个台阶,三个台阶,……,更不是飞跃)地拾级而上,我们并不觉得太困难即可攀上高楼.同样,只要学习者扎扎实实地掌握这一步知识,再去学习下一步的内容,循序渐进,数学就可以成为任你的思维纵横驰骋的自由王国.

作为教师,要充分地考虑到学生在自学过程中遇到的各种困难.我们在教材的编写中,尽最大可能地使教材通俗易懂,深入浅出.为了便于自学,我们适当地做出一些注释,引导学生深入理解知识.每章开始给出本章学习目标和导学,每章的结尾,作出本章的总结,指出本章的重点及难点,并安排了学习辅导内容,介绍典型例题,同时配备了自测题目.

中央广播电视大学与东北师范大学开办本科数学与应用数学专业处于刚刚起步阶段.我们的教师首次编写这套教材,一切尚处于探索的过程中.因此,这套教材难免有这样或那样的不妥之处.我们热情地欢迎读者提出宝贵的批评意见和改进的建议,使我们的教师及时改进这套教材,以不断提高学生的学习效果.

史宁中

于长春

2002年4月25日

前　　言

近些年来,数学模型和数学建模这两个术语使用的频率越来越高,人们对数学建模的关注程度亦与日俱增.那么,究竟什么叫数学模型?数学建模又是怎么一回事?又为什么要探讨这些问题呢?作为电大数学与应用数学专业的一门必选课,本书将对上述问题给予初步的,然而是全面细致地描述.

马克思曾说过:"一门科学只有成功地运用数学时,才算达到了完善的地步".也就是说,一门科学的发展水平可以用数学被应用于该门科学的水平作为标志,这个看法已经成为科技界乃至于政治、经济、教育等各界有识之士的共识.众所周知的牛顿运动定律和万有引力定律的发现是物理科学界成功运用数学解决物理问题,并且反过来推动数学发展的范例.17世纪,伟大的科学家牛顿在研究变速运动过程中发明了微积分,反过来又以微积分作为得力工具,在著名的关于行星运动的开普勒三定律和他已发现的牛顿第二运动定律的基础上,通过建立数学模型并且用演绎方法进行推导后得到了震惊世界的万有引力定律.这一发现成功地解释了树上的苹果为什么会掉到地上等许多自然现象,并为一系列观测和实验进一步证实,直到今天仍是物理科学中一条基本定律.从牛顿发现万有引力定律的过程可以看到,数学在解决实际问题中的重要作用和全过程.

进入20世纪以来,特别是计算机技术的迅猛发展,数学的应用不仅在它的传统领域——物理领域继续取得许多重要进展,而且迅速进入了人们生产和生活的许多新领域,诸如经济、人口、生态、医学、社会等领域.人们乐于在外出时乘坐的舒适、快捷又安全的大型喷气客机,其整个设计过程是由一种将数学与计算机相结合被称为计算机辅助设计(CAD)的先进的数学技术完成的.其生产过程则是用工程师们建立所要控制的生产过程的数学模型对控制装置作出相应的设计和计算后实现的.为了保障人民生命健康,医学专家们经常要开发和研制新的药物和医疗器械,而一种新药或器械的试制必须经反复试验以获得充分的数据,并利用数学方法模拟成疗效数学模型后方可分析疗效,从而有效地指导临床.在生

产流通领域，工厂企业的策划者需要根据产品的需求情况、生产能力和成本、贮存与销售等信息数据，制定出一个有效利用资源、合理安排生产与销售的数学模型，方能获得更大的经济效益.就是在我们日常生活中，这种事例也是比比皆是.您想生活得更好吗？那么一日三餐如何进行营养配置，使得既能少花钱又能保证营养需求？怎样锻炼身体，才能既达到锻炼目的又少消耗体力？如何减肥最科学？为您所在社区设计一个喷水池、一套商业网点，等等，都可以通过建立一个数学模型加以妥善解决.因此，对于广大的科技人员和应用数学工作者来说，建立数学模型是沟通实际问题与他们掌握的数学工具之间联系的一座必不可少的知识之桥.

本课程主要介绍最常见的四类基本数学模型的建立方法及相关学科知识，包括初等数学模型、微分方程模型、运筹学模型和概率统计模型.考虑到本书对象，将主要介绍这四类数学模型中的较基本、较简单的部分.采取低起点，细分析，深入浅出又通俗易懂的写法，达到基本上能够无师自通的目的，加上电视录像，IP网上学习等媒体支持，学好本门课程应该不成问题.在讲授四类数学模型之前，专设一章介绍数学建模的基本方法与基本步骤，通过一些典型实例加以详尽说明，打牢基础后再涉猎四类具体模型.

初等数学模型主要是介绍如何使用初等数学方法建立一些实际问题的数学模型.主要数学工具是大家所熟知的初等数学知识.具体问题有雨中行走问题、动物的身长与体重问题、代表名额的分配问题、实物交换问题与森林救火问题等.

微分方程模型一章通过车间空气清洁问题、减肥与增肥问题、种群增长、开发与保护等生态学方面问题说明如何建立微分方程模型.所使用的数学工具自然是常微分方程基本知识.还要给大家介绍一点减肥知识及生态学知识.

运筹学模型主要介绍营养配餐问题、生产计划问题、运输问题、多目标管理问题及图论模型.由于运筹学讲求把所面临的实际问题达到最佳状态，因此受到人们普遍关注.所使用的数学工具则是线性代数与线性规划，目标规划(线性)及图论中的一些基本数学知识.

概率统计模型主要介绍初等概率模型，存储论中的随机模型，带有随机因素的决策模型及排队论模型.使用的数学工具主要是概率论与数理统计中的数学基础知识，另外要涉及到运筹学中的存储论、决策论与排队论基本知识.届时均给予适当介绍.

至于最后一章是为学有余力的学员准备的，进一步了解一个常用的建模方

法——层次分析法. 在教材的最后，为了学员查阅方便，给出了一个相关数学分支基础知识简介的附录，可供学员随时查阅.

为了使广大学员能够随时消化掌握所学知识，在每一章的结尾都配置了章结、练习题及学习指导，并在书末附录了习题参考答案与提示. 由于数学建模课程的特殊性，我们想对此给予特殊说明.

一般的数学课程的练习题，可以说，其大部分内容应是与该章节有关的概念、定理和公式的具体运用，以熟悉和掌握相关的内容为训练目的. 数学建模课程则全然与之不同，其习题尽管也是为该章内容服务，但几乎每道题目都需要重新考虑和建构. 具体说来，几乎每一道题的做法都无固定公式和定理可套用，各有千秋. 也就是说，学员只能循着该章所介绍过的模型的建立和分析基本原理、基本思想与基本方法去面对每一道练习题，重新去分析、假设后再建立该题目的模型，并自行选择相应的数学工具加以求解、检验等，从中去体会了解本章所讲述的各种数学模型的基本建模思想和方法. 这样，数学建模的习题的配置就有以下两个特点：其一是量少，其二是几乎每一道题都需有创新之处. 同一题目，各人做法和结果可以完全不同. 作为习题的参考答案则只能是提供一些思路或提示，很少再有具体的答案，而评判一个习题做的水平高低则主要依据你对问题的分析与假设的合理性，建模的创造性，结果的合理性，求解与分析检验的到位情况，等等. 这也从一个侧面说明，数学建模课程不是“学数学”，而是试着去“用数学”解决实际问题. 从这个意义上讲数学建模课程的开设对于全面提高学员的综合素质，培养大家的创新能力，解决实际问题的能力和数学思维品质的培养等诸方面都将起到不可替代的重要的和基本的作用.

怎样才能学好本课程？我们惟一的建议是去做，去实践. 学习建模就像学习游泳一样必须亲身实践，只是欣赏别人的数学模型的人，永远不会拥有让别人欣赏的数学模型. 只要你亲身参与了数学建模活动，你就会感到自己数学知识或数学思想方法上的不足，更激起探讨数学的积极性. 反过来数学本领提高了，参与数学建模就更加得心应手.

有人说建模是一门艺术，艺术在某种意义下是无法归纳出几条准则或方法的. 一名出色的艺术家需要大量的观摩和前辈的指教，更需要亲身的实践，最终“青出于蓝而胜于蓝”. 完全类似地，掌握建模这门艺术，培养自己解决实际问题的能力，一要大量阅读、思考别人做过的模型，二要亲自动手，认真地做上几个实际题目. 也是出于这个目的，本书主要采用了实例研究法：即给出各个应用领域不同数学方法建模的大量实例，供读者研读，并提供若干题目供大家自己练习.

我们相信只要认真听、读和训练，必能达到成功的彼岸.

总之，要学好数学建模是需要下些功夫的，而一旦将这个重要方法学到手，对我们数学工作者来说将受益终身.

本书的第 1 章，第 4~6 章及第 2~3 章的学习指导由李佐锋编写，范猛编写了第 2~3 章的正文. 附录中的建模论文是由我们指导的本科优秀毕业论文.

在本书编写过程中，我们大量参考了国内外专家学者们的数学建模方面的专著和资料，恕不能一一列出. 由于数学建模课在中央电大开设尚属首次，经验不足加之编者水平有限，因此，书中错误与疏漏之处在所难免，诚望各位专家、学者和广大读者不吝赐教，以便有机会再版时改正.

特别致谢北京理工大学的叶其孝教授，北京师范大学的刘来福教授，北京航空航天大学的李卫国教授对本书的真诚关注与指导. 课题组的顾静相和张旭红老师对书稿的编排和版面设计提出了许多宝贵意见，并在整个课程的多种媒体一体化设计等方面付出了大量艰苦劳动，在此一并表示衷心感谢.

编　者

2003 年 10 月于长春

目　　录

第 1 章　数学建模方法论

【主要内容】

作为全书的基础章，本章讨论以下几方面问题：

1. 从现实对象到数学模型. 从现实对象出发给出较为确切的并适合于操作的数学模型概念及数学建模的意义与内涵.

2. 数学模型的作用、特点及建模基本过程.

搞清楚以上两个问题可以使我们的建模活动更具有针对性和灵活性，同时易于把握分寸，使所建立的模型更合于实际需求. 在此基础上，我们将用大部分精力探讨数学建模的基本方法.

3. 通过大量实例讨论数学建模的基本方法与技巧，其中将主要介绍机理分析法，并关注测试分析法；按照问题分析，合理假设，建立模型，求解与分析，检验、修改与推广这五个基本步骤展开讨论.

【学习目标】

理解数学模型的意义、特点和作用，掌握建模基本方法与基本步骤.

【重点、难点与学习建议】

建模方法不仅是本章学习的重点和难点，也同时是全书的重、难点所在. 为此，我们建议：

1. 学习中随时翻阅可能已经有些淡忘的相关数学专业知识方面的书籍，不能因为数学专业知识欠牢而影响用它们去解决实际问题这一主题. 特别是《数学分析》、《高等代数》、《概率论与数理统计》、《微分方程》与《运筹学》五本专业书籍，应放在身边随时备查.

2. 认真弄懂书中每一个具体的实例，其内容步骤是什么，用到了什么建模方法. 特别是要知晓它是怎样从实际问题转化为数学模型的. 开始时可能感到无从入手，不必担忧，这个问题并非只是你一个人的困惑. 随着学习过程逐渐展开，只要你是认真的，定会一步一步解脱困惑.

3. 每一章、节下来，只要书后有的思考题、练习题，一定一个不漏地试着用学习过的方法和步骤解决掉.

4. 本章内容至少有4个小时的录像和不低于5个小时的IP课，注意充分利用.

5. 建议就近与2～3个同学组成一个学习与讨论小组，在争论中求得知识的互补与问题的成功解决.

总之，勤动脑，勤思考与勤动手是学好数学建模课的关键，务求落实.

1.1 数学模型与现实对象

环视人类生活的现实世界，真可谓丰富多彩，变化万千. 昨天我们还在为温饱拼争，今天却已经在为建设小康社会而努力了. 人们不再满足于骑辆自行车去上班，而是渴望拥有一辆豪华轿车；外出工作或旅游入住高级旅店舒适又惬意；社区管理者要研究社区的教育、医疗、绿化和商业网点设置以更好地为社区人民服务；家庭主妇们要讲究吃的科学、要琢磨配餐问题、科学减肥问题；工厂企业的决策者们则要考虑如何安排生产计划，使有限的资源发挥最大的效益……然而，随着汽车工业的发展，环境污染成了大问题；摩天大楼式的高级宾馆一旦发生火灾，后果不堪设想，安全成了问题；社区要建设而资金有限，如何使有限的资金发挥最大效益，成了摆在社区管理者和工厂企业的决策者以及家庭主妇们面前的一个亟待解决的实际问题. 我们把现实世界中这些人们所关心和要解决的问题称为现实对象.

我们的目标是，使用数学建模的方法建立起能够有效代表现实对象的数学模型，然后通过对数学模型的求解和分析后反回来回答现实对象要解决的问题.

那么究竟什么是数学模型？ 数学建模又是怎么回事？

应该说数学模型是大家早已十分熟悉的概念. 早在中学的时候我们就已经用建立数学模型的方法来解决实际问题了，只不过这些问题是老师为教会学生相关知识而事先人为设置好了的，我们没有充分注意到它就是数学模型罢了. 譬如说下述这类“实际”问题.

设某厂投产一种新型家用轿车，第一年生产了 4 万辆，第二年、第三年产量持续增长，计划到第三年末，市场共拥有 19 万辆这种品牌的轿车，那么后两年的增长率是多少？

这是中学代数中的一道应用题——增长率问题. 按中学生的习惯解法有：

设增长率为 x，则有

$$4+4(1+x)+4(1+x)^2=19$$

整理即得

$$4x^2+12x-7=0.$$

求解这个一元二次方程得 $x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=-\frac{7}{2}$（不合题意，舍去）. 所以 $x_1=\frac{1}{2}=50\%$.

答：后两年汽车产量的增长率为 50%.

实际上，这个一元二次方程就是上述增长率问题的数学模型. 一旦给出这个方程，这个现实问题便转化为纯粹的数学问题，而求解这个数学问题得到的 x 的值 $x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=-\frac{7}{2}$ 便给出了这个现实对象的一个解答. 当然 $x_2=-\frac{7}{2}$ 经检验不符合题意（实际）而舍去. 至此，这个现实对象经过这种数学的处理后获得解决.

诚然，真正实际问题的数学模型与建立数学模型的过程通常要比之复杂得多，但其基本内容与过程已经包含在建立和求解这个代数应用题的过程中了. 即有：

一、根据现实对象的背景和要求进行**问题分析**；

若增长率为 x，根据题意，三年的总产量可写为等量关系.

$$4+4(1+x)+4(1+x)^2=19.$$

二、根据问题的要求和建立数学模型的目的作出**合理的简化假设**；

本例中，我们设增长率为常数 x，我们说这个假设并不合理，因为实际中的增长率通常不会是常数，但在中学阶段，这个假设就是合理的. 换句话说，假设的合理性与建模者所使用的工具有关.

三、根据问题分析与假设，利用相应的物理的或其它有关规律建立起现实对象的数学表达式——**建立数学模型**；

本例经整理后的数学模型是

$$4x^2+12x-7=0.$$

四、使用相应的数学方法**求解数学模型**以给出现实对象的数学解决；

本例使用一元二次方程的因式分解法（或公式法）解得

$$x_1=\frac{1}{2},x_2=-\frac{7}{2}.$$

五、用这个数学解对现实对象给予检验和解释——**模型分析**；

本例中，$x_2=-\frac{7}{2}$不合实际而舍去，$x_2=\frac{1}{2}$合乎实际而保留，于是现实对象所提问题获得解决.若所得两解均不符合实际，则所建数学模型有错误，应推倒重建.这是数学建模完全可能出现的情况，其产生原因往往是问题分析错误或假设不合理所至.

本问题的数学模型稍加修改便可适用于一般增长率问题(这里从略).

综上分析，我们可以给出数学模型与数学建模较为严格的一个**定义**：对于现实世界的一个特定对象，为了一个特定目的，根据对象特有的内在规律，在做出问题分析和一些必要、合理的简化假设后，运用适当的数学工具，得到的一个数学结构就称为该特定对象的数学模型.依据上述几个基本步骤建立数学模型这个全过程便称为数学建模.

请注意，本课程的重点不仅在于介绍现实对象的数学模型是什么样子，更重要的是要讨论建立数学模型的全过程.为方便起见，数学模型和建立数学模型以后常简称为模型和建模.

1.2 数学模型的作用、特点和建模基本过程

1.2.1 数学模型的作用与特点

当实际问题需要我们对所研究的现实对象提供分析、预报、决策、控制等方面的定量结果时，往往都要通过建立其数学模型才能给予较为准确的回答.这是数学模型比较其它类模型(物理模型、实物模型等)最大的优点.

所谓分析是指定量研究现实对象的某种具体现象或特性.例如描述一种新药的疗效，可通过药物浓度在人体内的变化模型以分析其疗效；有了一个生产计划模型，便可借此分析资源的潜在价值.

所谓预报是通过相应的数学模型分析结果的基础上，作出当环境或条件发生变化时，某种现象出现的规律.人口预报，天气预报及传染病大面积流行时刻预报是典型例子.

所谓决策，其含义更为广泛.诸如根据人口预报制定人口政策，根据天气预报决定是否外出或施工，依据诸如SARS等传染病流行情况制定控制方案等.

所谓控制是指根据现实对象的特征和某些指标给出尽可能满意的控制方案.诸如根据疫情预报给出一个可行的预防性控制方案,利用红绿灯对交通流进行控制等.

前面的增长率问题虽简单但却给出数学建模的基本过程,然而要建立一个实际问题的数学模型与解决一道数学应用题差别可能很大.建议你在阅读后续的建模实例时注意以下的差别和特点:

1.数学建模不一定有惟一正确的答案.求解数学应用题目往往都有惟一正确的答案.但对同一个实际问题,不同的人却可能建立起完全不同的模型而都符合实际问题的基本要求.因此,数学建模的结果无所谓"对"与"错",但却有优与劣的区别,评价一个模型优劣的惟一标准是实践检验.

2.数学建模没有统一的方法.常用的建模方法有机理分析法、测试分析法等.近年来,数据挖掘方法被大面积使用,理应引起我们的关注,限于本书篇幅恕不能涉及,只介绍前两种方法.建模中运用哪一个方法要依实际问题的特性来决定.一般地,若问题的内部机理比较清楚和容易识别,则常用机理分析法,用这种方法建立的模型常有明确的物理的或现实的意义.若研究对象的内部机理基本不掌握,也无法直接寻求,是一个黑箱系统且模型也不是用于分析内部特性,譬如仅用来作输出预报,则常用测试分析法.将两种方法结合起来也是常用的建模方法.另外利用计算机对实际问题进行随机模拟也可作为建模的一个手段.

3.模型的逼真性与可行性.尽管人们总是希望模型尽可能逼近研究对象,但是一个非常逼真的模型在数学上通常是难于处理的,因而达不到通过建模解决实际问题的目的,即实用上不可行.因此,在建模时不必追求模型的完美无缺而只要符合实际问题的基本要求即可.

4.模型的渐进性.稍复杂一些的实际问题的建模通常不可能一次成功,往往要反复几次建模过程,包括由简到繁,也包括由繁到简,以期获得越来越满意的模型,这也符合人们认识问题的规律性.

5.模型的可转移性.模型是对现实对象进行抽象化和理想化的产物,常常不为对象的所属领域所独有,完全可能转移到另外的领域中去,也即数学模型具有应用的广泛性.

6.模型与建模目的相关.即对同一个实际现象,不同的建模目的可能导致建立的模型大相径庭.

1.2.2　数学建模基本过程

这一段我们介绍数学建模的基本过程.我们将以实例给出或者更确切地说