CHUZHONGSHUXUE
YINGSHIZHINAN
HEXINFUDAO

吴鸣凤 编著

新课标

初中数学应试指南
核心辅导

九年级

湖北长江出版集团
湖北教育出版社

新内容
新特点
新方法

CHUZHONGSHUXUE
YINGSHIZHINAN
HEXINFUDAO

吴鸣凤 编著

新课标
初中数学应试指南
核心辅导

九年级

湖北长江出版集团
湖北教育出版社

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

新课标初中数学应试指南核心辅导.九年级/吴鸣凤编著.—武汉:湖北教育出版社.

ISBN 7-5351-2704-5

Ⅰ.新… Ⅱ.吴… Ⅲ.代数课-初中-教学参考资料②几何课-初中-教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 07958 号

出版 发行:湖北教育出版社　　武汉市青年路 277 号

网　　址:http://www.hbedup.com　　邮编:430015　电话:027-83619605

经　销:新　华　书　店

印　刷:孝感市三环印务有限责任公司印刷　　(432100·孝感市高新技术开发区东区工业园)

开　本:787mm×1092mm　1/16　　13.5 印张

版　次:2006 年 10 月第 2 版　　2006 年 10 月第 1 次印刷

字　数:307 千字　　印数:1-5 000

ISBN 7-5351-2704-5/G·2199　　定价:20.50 元

前言

新编《新课标·初中数学应试指南·核心辅导》丛书遵循教育部新颁布的《基本教育课程改革纲要》以及《全日制义务教育课程标准》的要求，紧扣“新课标、新内容、新特点、新方法”而编著的.

新编《新课标·初中数学应试指南·核心辅导》丛书，系统阐述了数学公式、法则、定义、定理的内涵与外延，注重基础知识与技能，注重创新能力和知识综合能力，注重实践、操作能力.

这套丛书的鲜明特点是：

1. 突出了数学素质教育，重在培养学生的创新精神，在教学过程中努力培养学生的归纳、推理、判断能力；

2. 突出了重点、难点教材，紧密结合教学进行系统性、针对性的讲与练，重在培养学生的分析与解题能力；

3. 突出了数学方法的理解和运用，如配方法、换元法、判别式法、待定系数法等等；

4. 突出了学习方法，紧密结合教学进行典型例题解析，重在熟悉解题策略、方法，如化简绝对值的方法“先判后去”的原则，这样既减轻学生的学习负担，又提高了学习效率；

5. 突出了记忆方法，如记忆全等的直角三角形法，可归纳、概括为“两边对应相等、一边和一锐角对应相等”；幂的运算法则：$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$，$a^m\div a^n=a^{m-n}$，$(a^m)^n=a^{mn}$中，抓住“底数不变，运算降级”这一规律，有利于学生提高记忆能力；

6. 突出了课本中的例题、习题的分类，如一元二次方程的解法，实际上归纳为两类，第一类是判别式为一个平方数或平方式时，则运用十字相乘法求方程的根；第二类是判别式不是一个平方数或平方式时，则运用求根公式法求方程的根，这样大大地提高了学生学习效率.

7. 突出了信息获取、实际操作的新题型，培养学生获取数学信息能力、实验操作能力；

8. 突出了规律意识的新题型，有利于培养学生发现规律、归纳规律的能力；

9. 突出了开放型试题，有利于培养学生探索、创新意识的能力；

10. 突出应试内容，应试专题辅导，帮助学生全面系统地复习数学知识与能力，提高应试效果.

新编《新课标·初中数学应试指南·核心辅导》丛书，例题、习题精选于湖北、北京、上海、天津、南京、重庆、浙江、广东、黑龙江、山西等省市中考试题、课改试题，其广度、难度、深度以全国各省市中考压轴题为标高.

新编《新课标·初中数学应试指南·核心辅导》丛书，标有“※”号是重点内容、例题及习题，必须掌握解题方法；标有“※※”号的例题、习题是难点例题、习题，供教师、学生选用；标有“·”号的内容、例题及习题，供使用不同版本的新教材的教师、学生选用.

新编《新课标·初中数学应试指南·核心辅导》丛书，分三册：

第一册七年级（初中一年级）使用；

第二册八年级（初中二年级）使用；

第三册九年级（初中三年级）使用.

这套丛书适合于《人教版》、《北师大版》、《华东版》等新教材使用.

作者根据“新课标、新内容、新特点、新方法”编著了《新课标·初中数学应试指南·核心辅导》丛书，既适用于各年级作同步辅导和同步训练，又适用于初三年级（九年级）升学复习使用.也可供初中数学教师作教学参考资料.

新编《新课标·初中数学应试指南·核心辅导》丛书还有不足之处，我真诚地期望广大读者不吝赐教，使这套丛书走向完善.谢谢.

吴鸣凤

2006年8月于武汉

目 录

第一章 一元二次方程

重点 1. 运用十字相乘法,求根公式解一元二次方程;

2. 掌握判别式,判断一元二次方程的存在性.

难点 运用韦达定理,解综合题.

一、一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的概念

重难点精释

掌握:一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 必须满足两个条件:

1. 二次项的系数 $a\neq0$;

2. 未知数 x 的最高指数是 2,这两个条件缺一不可.

特殊情况:当 $a\neq0,b\neq0,c=0$ 时,则方程一根为零,另一根为 $x=-\frac{b}{a}$;

当 $a\neq0,b=0,c\neq0$ 时,则方程的两根互为相反数,$x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$;

当 $a\neq0,b=c=0$ 时,则方程两根为零.

典型例题解析

例 1 若 a 是方程 $x^2+bx-a=0(a\neq0)$ 的根,则 $a+b=$________.

解:∵$x=a$ 是方程 $x^2+bx-a=0$ 的根,

∴$a^2+ba-a=0$,∵$a\neq0$,∴$a+b=1$.

例 2 已知 a 是方程 $x^2+4x+1=0$ 的根,则 $2a^2+8a-5$ 的值为________.

解:∵$x=a$ 是方程的根,∴$a^2+4a+1=0$,

∴$2a^2+8a=-2$(巧整体变形) ∴原式$=-7$.

(说明:例 1、例 2 两题是典型的用方程根的定义的求值问题.)

迁移扩展练习

1. 若方程 $(m^2-1)x^2-mx+1=0$ 是关于 x 的一元二次方程,则 m 的取值范围是________.

2. 若一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一根为 1,且满足等式 $b=\sqrt{a-2}+\sqrt{2-a}+3$,则 $c=$________.

3. 已知 a 是方程 $x^2-3x+1=0$ 的根,试求 $\frac{a^3-2a^2-5a+1}{a^2+1}$ 的值.

4. 如果方程 $x^2+(k-1)x-3=0$ 的一根为 1,那么 k 的值是________.

提示:方法①方程的定义,求解,$k=3$;

方法②当 $x=1$ 时,则方程的各项系数和为 0,∴$k=3$;

方法③韦达定理求值,$k=3$.

答案:2. -5 3. -1

二、一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的类型及解法

重难点精释

掌握一元二次方程的两种类型及解法.

一元二次方程按判别式是否是平方数或平方式分为两个类型.

典型例题解析

例 1 解方程:$3x^2-2\sqrt{6}x+2=0$.

解:∵$\Delta=(-2\sqrt{6})^2-4\cdot3\cdot2=0$,即 b^2-4ac 是一个平方数,将有理数 3,2 化为无理数 $(\sqrt{3})^2$、$(\sqrt{2})^2$,∴原方程化

> 第一类,当 $\Delta=b^2-4ac$ 是一个平方数或是一个平方式时,巧用十字相乘法求根.

为$(\sqrt{3}x)^2-2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}x+(\sqrt{2})^2=0$，

∴$(\sqrt{3}x-\sqrt{2})^2=0$，∴$x_{1,2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

例 2 解方程：$x^2-(2m+1)x+m^2+m=0$.

解：∵$\Delta=[-(2m+1)]^2-4(m^2+m)=1$

原方程变形为$x^2-(2m+1)x+m(m+1)=0$.

由十字相乘法，$(x-m)[x-(m+1)]=0$.

∴$x_1=m$，$x_2=m+1$.

例 3 解方程：$(m^2-n^2)(x^2-1)=4mnx$.

解：原方程化为$(m^2-n^2)x^2-4mnx-(m^2-n^2)=0$.

$$\because \Delta=16m^2n^2+4(m^4-2m^2n^2+n^4)=4(m^2+n^2)^2.$$

$(m+n)x \quad +(m-n)$

$(m-n)x \quad -(m+n)$

∴$x_1=-\frac{m-n}{m+n}$，$x_2=\frac{m+n}{m-n}$.

例 4 解方程：$x^2+2x-2=0$.

解：∵$\Delta=2^2-4\cdot1\cdot(-2)=12$，12不是平方数.

∴$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{12}}{2}$

$=-1\pm\sqrt{3}$.

> 第二类，当$\Delta=b^2-4ac$不是一个平方数或一个平方式时，用求根公式求根.

迁移扩展练习

解下列方程：

1. $6x^2-13x-5=0$；
2. $2y^2-4y-1=0$；
3. $x^2+2(a-b)x-4ab=0$；
4. $x^2+(2a+b)x+a^2+ab=0$；
5. $(a+b)x^2-2ax+(a-b)=0$；$(a+b\neq0)$
6. $(1+\sqrt{2})x^2-(3+\sqrt{2})x+\sqrt{2}=0$；
7. $abx^2-(a^4+b^4)x+a^3b^3=0$；$(ab\neq0)$
8. $x^2-(1+2\sqrt{3})x-3+\sqrt{3}=0$；
9. $(a^2+a)x^2+x-a^2-a=0$；$(a^2+a\neq0)$
10. $(a^2-1)x^2-(5a-1)x+6=0$. $(a^2-1\neq0)$

三、判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 的应用

重难点精解

1. 掌握一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$根的判别式

$\Delta=b^2-4ac>0 \longleftrightarrow$有两个不相等的实数根；

$\Delta=b^2-4ac=0 \longleftrightarrow$有两个相等的实数根；

$\Delta=b^2-4ac<0 \longleftrightarrow$没有实数根.

2. 判别式的应用

典型例题解析

例 1 已知关于x的方程$mx^2+2(m-3)x+m-5=0$没有实数根，判断关于x的方程$(m-5)x^2-2(m+2)x+m=0$的根的情况.

解：∵方程没有实数根，

∴$\Delta=[2(m-3)]^2-4m(m-5)<0$

∴$m>9$.

又∵$\Delta=[-2(m+2)]^2-4(m-5)\cdot m$

$=4(9m+4)$

∵$m>9$，

∴$\Delta=4(9m+4)>0$，

∴方程$(m-5)x^2-2(m+2)x+m=0$有两个不相等的实数根.

例 2* 已知m、n为整数，关于x的三个方程：$x^2+(7-m)x+3+n=0$有两个不相等的实数根；$x^2+(4+m)x+n+6=0$有两个相等的实数根；$x^2-(m-4)x+n+1=0$没有实数根. 求m、n的值.

解：由一元二次方程根的性质，得

$$\begin{cases}(7-m)^2-4(3+n)>0, & ①\\ [-(m-4)]^2-4(n+1)<0, & ②\\ (4+m)^2-4(n+6)=0. & ③\end{cases}$$

由③，$4n=m^2+8m-8$分别代入①、②，得

$$\begin{cases}-22m+45>0,\\ -16m+20<0.\end{cases} \quad \therefore \begin{cases}m<\frac{45}{22},\\ m>\frac{5}{4}.\end{cases}$$

∴$\frac{5}{4}<m<\frac{45}{22}$.

∵m、n为整数，∴$m=2$，$n=3$.

例 3* 已知实数a、b、c、r、p满足$pr>1$，且$pc-2b+ra=0$，试判断关于x的一元二次方程$ax^2+2bx+c=0$是否有实数根.

解：∵$2b=pc+ra$，

而方程$ax^2+bx+c=0$的判别式

$\Delta=(2b)^2-4ac$

$=(pc+ra)^2-4ac$

$=(pc-ra)^2+4ac(pr-1)$.

∵$(pc-ra)^2\geq0$，∵$pr-1>0$，

当$ac>0$时，有$\Delta>0$；

当$ac<0$时，有$\Delta=4b^2-4ac>0$.

综合上述，总有$\Delta\geq0$，∴方程$ax^2+2bx+c=0$必

有实数根.

例4 已知二次三项式 $9x^2-(m+6)x+m-2$ 是一个完全平方式,求 m 的值.

析:$ax^2+bx+c(a\neq0)$为完全平方式 $\longleftrightarrow$ $\Delta=b^2-4ac=0$.

解:$\because[-(m+6)]^2-4\cdot9(m-2)=0$

化简,得 $m_1=18,m_2=6$.

例5 已知关于 x 的方程 $(m-2)x^2-2(m-1)x+m+1=0$,当 m 为何非负整数时,

(1)方程只有一个实数根;

(2)方程有两个相等的实数根;

(3)方程有两个不相等的实数根.

解:(1)当 $m=2$ 时,方程 $2x+3=0$,$x=-\frac{3}{2}$,只有一个实数根.

(2)当 $m\neq0$ 时,方程为一元二次方程,其判别式为 $\Delta=-4m+12$

令 $-4m+12=0$,$\therefore m=3$,m 为非负整数.

$\therefore$当 $m=3$ 时,方程有相等的实数根.

(3)令 $-4m+12>0$. $\therefore m<3$. $\because m$ 为非负整数,且 $m\neq2$.

$\therefore$当 $m=1$ 或 0 时,方程有两个不相等的实数根.

例6* 已知关于 x 的一元二次方程 $(1-2k)x^2-2\sqrt{k+1}\cdot x-1=0$ 有两个不相等的实数根.k 为实数,求 k 的取值范围.

解:$\because$方程有两个不相等的实数根,则必有 $\Delta=b^2-4ac>0$.

$\therefore k$ 必须满足下列条件:

$$\begin{cases}1-2k\neq0,\\(-2\sqrt{k+1})^2-4(1-2k)\cdot(-1)>0,\\k+1\geq0,\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}k\neq\frac{1}{2},\\k<2,\\k\geq-1.\end{cases}$

$\therefore -1\leq k<2$,且 $k\neq\frac{1}{2}$.

迁移扩展练习

一、选择题

1. 给出下列四个判断:

(1)线段是轴对称图形,它只有一条对称轴;

(2)各边相等的圆的外切多边形是正多边形;

(3)一组对边相等,一条对角线被另一条对角线平分的四边形是平行四边形;

(4)已知方程 $ax^2+bx+c=0$ 中,a、b、c 为实数,且 $b^2-4ac>0$,那么,这个方程有两个不相等的实数根.其中不正确的判断有( )

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

2. 关于 x 的方程 $x^2-mx+m-2=0$,对其根的情况叙述正确的是( )

A. 有两个不相等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 没有实数根

D. 根的情况不能确定

3. 在一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$,且 a 与 c 异号,则方程( )

A. 有两个不相等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 没有实数根

D. 根的情况无法确定

4. 已知一直角三角形的三边为 a、b、c,$\angle B=90°$,那么关于 x 的方程 $a(x^2-1)-2cx+b(x^2+1)=0$ 的根的情况是( )

A. 有两个相等的实数根

B. 有两个不相等的实数根

C. 没有实数根

D. 无法确定

5. 已知 a、b、c 是$\triangle ABC$ 的三边的长,那么方程 $cx^2+(a+b)x+\frac{c}{4}=0$ 的根的情况为( )

A. 没有实数根

B. 有两个不相等的正实数根

C. 有两个相等的负实数根

D. 有两个异号的实数根

6. (2003年青岛市中考题)方程 $x^2-x+1=0$ 的根的情况是( )

A. 有两个相等的实数根

B. 有两个不相等的实数根

C. 两个实数根的和与积都等于 1

D. 无实数根

7*. 对于方程 $x^2+bx-2=0$,下列观点正确的是( )

A. 方程有无实数根要根据 b 的取值而定

B. 无论 b 取何值,方程必有一正根,一负根

C. 当 $b>0$ 时,方程两根为正;$b<0$ 时,方程两根为负

D. $\because -2<0$,$\therefore$方程两根肯定为负

解：∵方程有无实数根，要根据判别式的值来确定，∴A是错误的；∵方程两根为正，则 $b<0$，$c>0$；两根为负，则 $b>0$，$c>0$，∴C是错误的；显然，D也是错误的，故B是正确的.

8. (2003年河南省中考题)如果关于 x 的方程 $(m-2)x^2-2(m-1)x+m=0$ 只有一个实数根，那么方程 $mx^2-(m+2)x+(4-m)=0$ 的根的情况是(　　)

A. 没有实数根；

B. 有两个不相等的实数根；

C. 有两个相等的实数根；

D. 只有一个实数根.

9*. (2003年岳阳市中考题)已知 a、b、c 是△ABC三边的长，则方程 $ax^2+(b+c)x+\frac{a}{4}=0$ 的根的情况是(　　)

A. 没有实数根

B. 有两个不相等的正实数根

C. 有两个不相等的负实数根

D. 有两个异号的实数根

答案：CBCCC　　CBCC

二、简答题

1. 已知实数 a、b、c 不为零，一元二次方程 $(ac-bc)x^2+(bc-ab)x+ab-ac=0$ 有两个相等的实数根.

求证：$ab+bc=2ac$.

提示：简捷证法，因为各项系数之和为零，所以有一根为1，又因为方程有相等实根，

$\therefore \frac{ab-ac}{ac-bc}=1$，则结论成立.

2. 已知 a、b、c 为△ABC三边的长，方程 $a(1-x^2)+2bx+c(1+x^2)=0$ 有相等的实数根，试判断△ABC的形状.

3. 已知一元二次方程 $x^2+2ax+a^2+4a+9=0$ 有两个相异实根.

化简：$|a-1|+\sqrt{4a^2+8a+4}$.

4. 解方程：$x^2+70x+1221=0$.

提示：巧用配方法，求根简捷.

5. 已知关于 x 的方程 $(a+c)x^2+2bx-a+c=0$ 有相等的实数根，问正数 a、b、c 是否可以作一个三角形的三边长？如果可以，是什么形状的三角形？

6. 已知方程 $x^2-19x-150=0$ 的一个正实数根 a.

求：$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}+\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a+2}}+\frac{1}{\sqrt{a+2}+\sqrt{a+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a+1999}+\sqrt{a+2000}}$ 的值.

提示：先分母有理化，再求值.

7. 已知关于 x 的方程 $x^2-(k+2)x+2k=0$.

(1)求证：无论 k 取何实数值，方程总有实数根.

(2)若等腰三角形ABC的一边长 $a=1$，另两边长为 b、c 恰好是这个方程的两根. 求△ABC的周长.

8. 已知 $x^2-3x-2=0$，求代数式 $\frac{(x-1)^3-x^2+1}{x-1}$ 的值.

9. 三角形两边分别是3、8，第三边是一元二次方程 $x^2-21x+160=0$ 的一个根，求第三边的长.

10. 已知 $\sqrt{a+4}+|b-1|=0$，当 k 为何值时，方程 $kx^2+ax+b=0$ 有两个不相等的实数根.

11. 若一元二次方程 $x^2-2x-m=0$ 无实数根，则一次函数 $y=(m+1)x+m-1$ 的图象不经过哪个象限.

12*. (2005年荆门市中考题)已知关于 x 的方程 $x^2-(k+1)x+\frac{1}{4}k^2+1=0$ 的两个根是一个矩形两邻边的长，

(1) k 取何值时，方程有两个实数根；

(2)当矩形的对角线长为 $\sqrt{5}$ 时，求 k 的值.

13. (2005年长沙市中考题)已知一元二次方程 $x^2-3x+m+1=0$.

(1)若方程有两个不相等的实数根，求 m 的取值范围；

(2)若方程有相等的实数根，求此时方程的根.

答案：2. 直角三角形　3. $-3a-1$　6. 40　7. (2)5　8. 2　10. $k<4$　11. 第一象限　12. (1) $k\geqslant\frac{3}{2}$，(2) $k=2$

四、韦达定理(一元二次方程根与系数关系)的应用

重难点精释

掌握韦达定理的应用，归纳起来无非是两种：一是求值；二是作方程.

典型例题解析

例1　设 x_1、x_2 是方程 $2x^2-6x+3=0$ 的两根，求 $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$ 的值.

解：由韦达定理，$x_1+x_2=3$，$x_1x_2=\frac{3}{2}$.

求一元二次方程两根组成的代数式的值

$\therefore$原式$=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}=\frac{8}{3}$.

例 2* 若 x_1 和 x_2 分别是方程 $x^2-2mx+m^2-n^2=0$ 的两根. 则 $|x_1-x_2|=$________.

解：由根与系数关系，得 $\begin{cases}x_1+x_2=2m,\\x_1\cdot x_2=m^2-n^2.\end{cases}$ 于是，

原式$=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{4m^2-4(m^2-n^2)}$

$=2|n|$.

二分法分类讨论：

当 $n\geq0$ 时，$|x_1-x_2|=2n$；

当 $n<0$ 时，$|x_1-x_2|=-2n$.

例 3* 已知 α、β 是方程 $x^2+5x+2=0$ 的两根.

求$\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}+\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$的值.

解：由根与系数关系，知 $\begin{cases}\alpha+\beta=-5,\\\alpha\beta=2.\end{cases}$

$\because\alpha+\beta=-5<0$，$\alpha\beta=2>0$.

$\therefore\alpha<0$，$\beta<0$.

$\therefore\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}+\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{-\alpha}+\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{-\beta}$

$=\frac{-\sqrt{\alpha\beta}(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$

$=\frac{-\sqrt{2}\cdot(-5)}{2}$

$=\frac{5}{2}\sqrt{2}$.

例 4** 已知方程 $x^2-\sqrt{29}x+5=0$ 的两根分别为 α、$\beta(\alpha>\beta)$，不解方程求代数式

$\frac{2\beta-\sqrt{29}}{10-\sqrt{29}\alpha}+\frac{2\alpha-\sqrt{29}}{10-\sqrt{29}\beta}$的值.

析：求代数式值的关键是一将待求式化为 $\alpha+\beta$ 和 $\alpha\beta$ 的式子，用代入法求值.

解(1)：将待求式中 α 用 $\frac{5}{\beta}$ 代换，同时 β 用 $\frac{5}{\alpha}$ 代换.

$\because\alpha+\beta=\sqrt{29}$，$\alpha\beta=5$.

原式$=\frac{2\beta-\sqrt{29}}{10-\sqrt{29}\cdot\frac{5}{\beta}}+\frac{2\alpha-\sqrt{29}}{10-\sqrt{29}\cdot\frac{5}{\alpha}}$

$=\frac{\beta(2\beta-\sqrt{29})}{5(2\beta-\sqrt{29})}+\frac{\alpha(2\alpha-\sqrt{29})}{5(2\alpha-\sqrt{29})}$

$=\frac{\alpha+\beta}{5}=\frac{1}{5}\sqrt{29}$.

解(2)：由根与系数的关系，得 $\alpha\beta=5$，$2\alpha\beta=10$.

原式$=\frac{2\beta-\sqrt{29}}{2\alpha\beta-\sqrt{29}\alpha}+\frac{2\alpha-\sqrt{29}}{2\alpha\beta-\sqrt{29}\beta}$

$=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{1}{5}\sqrt{29}$.

解(3)：由根与系数关系，得 $\alpha+\beta=\sqrt{29}$，$\alpha\beta=5$，$\therefore2\alpha\beta=10$.

原式$=\frac{2\beta-(\alpha+\beta)}{2\alpha\beta-\alpha(\alpha+\beta)}+\frac{2\alpha-(\alpha+\beta)}{2\alpha\beta-\beta(\alpha+\beta)}$

$=\frac{-(\alpha-\beta)}{-\alpha(\alpha-\beta)}+\frac{\alpha-\beta}{\beta(\alpha-\beta)}$

$=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{1}{5}\sqrt{29}$.

解(4)：将待求式中 α 用 $\frac{5}{\beta}$ 代换后，化简求值简捷、或 β 用 $\frac{5}{\alpha}$ 代换后，化简求值.

原式$=\frac{2\beta-\sqrt{29}}{10-\sqrt{29}\cdot\frac{5}{\beta}}+\frac{2\cdot\frac{5}{\beta}-\sqrt{29}}{10-\sqrt{29}\beta}$

$=\frac{\beta}{5}+\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{1}{5}\sqrt{29}$.

例 5* 设 x_1、x_2 是方程 $x^2+x-3=0$ 的两根. 求代数式 $x_1^3-4x_2^2+19$ 的值.

解：先降次，后求值.

由方程的定义，知 $x_1^2=3-x_1$，$x_2^2=3-x_2$.

原式$=x_1(3-x_1)-4(3-x_2)+19$ （降次）

$=3x_1-x_1^2-12+4x_2+19$ （继续降次）

$=3x_1-(3-x_1)+4x_2+7$

$=4(x_1+x_2)+4$

由根与系数关系，得 $x_1+x_2=-1$.

$\therefore$原式$=0$.

五、应用题

考点点拨

列方程(组)解应用题的一般步骤是：

"一设、二列、三解、四答". 其第二步是关键，它包括了两层含义：一是要列出其他未知数用所设未知数的代数式表示；二是要找出等量关系，列出方程(组).

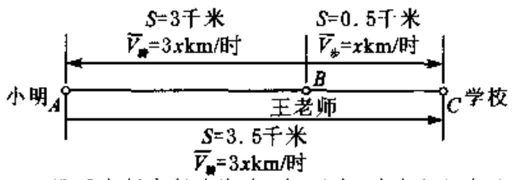
掌握工作问题中等量关系：工作效率(即：单位时间完成的工作量)×工作时间=工作量；行程问题中等量关系：路程=速度×时间.

典型例题解析

例 1 (2003 年吉林省中考题)小明家、王老师家、学校在同一条路上，小明家到王老师家的路程为

3千米、王老师家到学校的路程为0.5千米，由于小明的父母战斗在“非典”第一线，为了使他能按时到校，王老师每天骑自行车接小明上学，已知王老师骑自行车的速度是步行速度的3倍，每天比平时步行上班多用了20分钟，问王老师的步行速度及骑自行车的速度各是多少？

解(1)：线示图法



设王老师步行速度为$x$km/时，则骑自行车速度为$3x$km/时。

依据题意，得

$\frac{3}{3x}+\frac{3}{3x}+\frac{0.5}{3x}=\frac{0.5}{x}+\frac{20}{60}$，

解方程，得　$x=5$。

经检验，$x=5$是原方程的解，此时$3x=15$。

答：王老师步行的速度为5千米/时，骑自行车速度为15千米/时。

解(2)：设王老师步行速度为$x$km/时，

骑自行车速度为$y$km/时。

则列方程组$\begin{cases} y=3x, \\ \frac{3}{y}+\frac{3.5}{y}=\frac{0.5}{x}+\frac{20}{60}. \end{cases}$

解之，得$\begin{cases} x=5, \\ y=15. \end{cases}$

答：王老师步行速度为5千米/时，骑自行车速度为15千米/时。

例2　(2004年武汉市中考题)某公路上一路段的道路维修工程准备对外招标，现有甲、乙两个工程队竞标，竞标资料上显示：若由两队合作，6天可以完成，共需工程费用10200元；若单独完成此项工程，甲队比乙队少用5天，但甲队每天的工程费用比乙队多300元，工程指挥部决定从这两个队中选一个队单独完成此项工程，若从节省资金的角度考虑，应该选择哪个工程队，为什么？

解：设甲工程队单独完成需x天，每天需要费用m元。则乙工程队单独完成需$(x+5)$天，每天需要费用$(m-300)$元。

根据题意，得$\frac{6}{x}+\frac{6}{x+5}=1$。

解之，得$x_1=10$，$x_2=-3$(舍去)。

又　$6(m+m-300)=10200$，

解之，得$m=1000$。

∴甲工程队单独完成需费用$10\times1000=10000$(元)，而乙工程队单独完成需费用$15(1000-300)=10500$(元)。

答：从节约资金的角度考虑，应选择由甲工程队单独完成此项工程。

例3　(2005年武汉市中考题)武汉江汉一桥维修工程中，拟由甲、乙两个工程队共同完成某项目，从两个工程队的资料可以知道：若两个工程队合做24天恰好完成；若两个工程队合做18天后，甲工程队再独做10天，也恰好完成，请问：

(1)甲、乙两个工程队单独完成该项目各需要多少天？

(2)又已知甲工程队每天施工费为0.6万元，乙工程队每天施工费0.35万元，要使该项目总的施工费不超过22万元，则乙工程队最少施工多少天？

解：(1)设甲工程队单独完成该项目需x天，乙工程队单独完成该项目需y天。

根据题意，得

$\begin{cases} \frac{24}{x}+\frac{24}{y}=1, \\ \frac{18}{x}+\frac{18}{y}+\frac{10}{x}=1. \end{cases}$　解之，得$\begin{cases} x=40, \\ y=60. \end{cases}$

经检验，$\begin{cases} x=40 \\ y=60 \end{cases}$，是原方程组的解。

答：甲、乙两工程队单独完成此项目各需40天、60天。

(2)设甲工程队施工a天，乙工程队施工b天时总的施工费用不超过22万元。

根据题意，得

$\begin{cases} \frac{a}{40}+\frac{b}{60}=1, \\ 0.6a+0.35b\leqslant22. \end{cases}$

解之，得$b\geqslant40$。

答：要使该项目总的施工费用不超过22万元，乙工程队最少施工40天。

迁移扩展练习

1. 若x_1、x_2是方程$x^2-2x+m=0$的两根，且$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=2$，则$m$的值为________。
2. 已知α、β是方程$x^2+2x-5=0$的两个实数根，则$\alpha^2+\alpha\beta+2\alpha$的值为________。
3. (2004年鄂州市中考题)若方程$(k-1)^2x^2+2(k-2)$

$x+1=0$ 两根的倒数和的平方等于 8. 则 $k=$ ________.

4. 已知一元二次方程 $2x^2-2x+3m-1=0$ 有两个实数根 x_1、x_2，且它们满足不等式 $\frac{x_1x_2}{x_1+x_2+4}<1$. 求实数 m 的取值范围.

5*. 已知 $a=2+\sqrt{6}$，$b=2-\sqrt{6}$，

求代数式 $(a-b+\frac{4ab}{a-b})(a+b-\frac{4ab}{a+b})$ 的值.

6. 已知关于 x 的一元二次方程 $mx^2-(2m-1)x+m-2=0(m>0)$.

(1)求证：这个方程有两个不相等的实数根；

(2)如果这个方程的两个实数根为 x_1、x_2，且 $(x_1-3)(x_2-3)=5m$，求 m 的值.

7. 已知关于 x 的方程 $x^2+(m-2)x+\frac{1}{2}m-3=0$.

(1)求证：无论 m 取什么实数，这个方程总有两个不相等的实数根；

(2)若这个方程的两个实数根 x_1、x_2 满足 $2x_1+x_2=m+1$，求 m 的值.

8. (2005 年江西省中考题)设关于 x 的一元二次方程 $x^2-4x-2(k-1)=0$ 有两个实数根 x_1、x_2，问是否存在 $x_1+x_2<x_1\cdot x_2$ 的情况？请说明理由.

简解：$\because \Delta=16+4\cdot 2(k-1)\geqslant 0$，

$\therefore k\geqslant -1$.

假设存在 $x_1+x_2<x_1x_2$，$4<-2(k-1)$，

解不等式，得 $k<-1$.

$\therefore$ 不存在 $x_1+x_2<x_1\cdot x_2$ 的情况.

9. 如果 x_1、x_2 是关于 x 的方程 $x^2-2x+m-3=0$ 的两个实数根，求 $y=x_1^2+x_2^2$ 的最大值或最小值.

> **答案**：1. 1　　2. 0　　3. $2-\sqrt{2}$　　6. (2)$m=1$
>
> 7. $m=0$，$m=\frac{17}{12}$　　9. $m=4$ 时，$y_{最小值}=2$

六*、一元二次方程两根的商与系数的关系

掌握一元二次方程两根商的关系，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根分别为 x_1，x_2，由韦达定理知，

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}，x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

由此推得，$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}$

$$=\frac{b^2-2ac}{ac}=\frac{b^2}{ac}-2.$$

典型例题解析

例 1　已知方程 $x^2+(a+2)x+b-3=0$ 的两根之比是 2 : 3，且根的判别式的值是 4，求 a、b 的值.

解(1)：设参数消参数法

设 $x_1=2k$，$x_2=3k$.

由韦达定理 $x_1+x_2=-(a+2)$.

$\therefore 5k=-(a+2)$　　(1)

$x_1\cdot x_2=b-3$.

$\therefore 6k^2=b-3$　　(2)

把(1)代入(2)得 $6a^2+24a+99=25b$，　　(3)

又 $\because (a+2)^2-4(b-3)=4$，

化简，得 $a^2+4a+12=4b$　　(4)

(3)÷(4)得 $a^2+4a-96=0$，

解得 $a_1=-12$，$a_2=8$.

当 $a=-12$ 时，$b=27$；

当 $a=8$ 时，$b=27$.

解(2)：简捷解法

由一元二次方程两根的商与系数的关系，

得　$\frac{2}{3}+\frac{3}{2}=\frac{[-(a+2)]^2}{b-3}-2$.

化简，$6(a+2)^2=25(b-3)$，　①

又 $\because b^2-4ac=4$，$\therefore (a+2)^2=4b-8$，　②

把②代入①，得 $b=27$.

当 $b=27$ 时，$a=-12$，$a=8$.

例 2*　是否存在常数 k，使关于 x 的方程 $9x^2-(4k-7)x-6k^2=0$ 的两个实数根 x_1、x_2 满足 $\left|\frac{x_1}{x_2}\right|=\frac{3}{2}$，如果存在，试求出所有满足条件 k 的值；如果不存在，请说明理由.

简捷解法：结论：存在常数 k.

由两根的商的关系，得

$$\frac{|x_1|}{|x_2|}+\frac{|x_2|}{|x_1|}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{|x_1\cdot x_2|}，$$

$$\therefore \frac{3}{2}+\frac{2}{3}=\frac{\left(\frac{4k-7}{9}\right)^2+\frac{12k^2}{9}}{\frac{6k^2}{9}}.$$

化简，得 $k^2-8k+7=0$，$\therefore k=1$，$k=7$.

$\therefore$ 满足条件 k 的值为 1 或 7.

例 3*　如图 1－1，AB 是半圆 O 的直径，C 在半圆上，$CD\perp AB$ 于 D，过 C 作⊙O 的切线交 BA 的延长线于 P，若 AD、BD 是关于 x 的方程 $x^2-(4m+2)x+4m^2=0(m>0)$ 的两根，且

$AD:BD=1:4$,求 PC 的长.

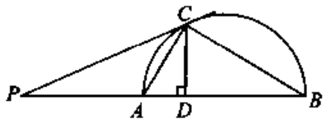


图 1—1

分析:这是一道方程与圆的综合题,因为 AD、DB 是方程 $x^2-(4m+2)x+4m^2=0$ 的两根,由两根的商与系数的关系,得 $\frac{AD}{DB}+\frac{DB}{AD}=\frac{b^2}{ac}-2$,可求得 m 的值,由射影定理分别可求得 CD、AC 和 BC,因为 $\triangle PAC\backsim\triangle PCB$,所以 $\frac{PA}{AC}=\frac{PC}{BC}$,

$PA=\frac{1}{2}PC$.

再由切割线定理,易求 PC 的长.

简捷解法:由商的根与系数的关系,得

$\frac{1}{4}+4=\frac{[-(4m+2)]^2}{4m^2}-2$.

化简,$9m^2-16m-4=0$.

$\therefore m=2$,$m=-\frac{2}{9}$(舍去)

于是,解方程 $x^2-10x+16=0$.

$x_1=AD=2$,$x_2=DB=8$.

$\because \triangle PAC\backsim\triangle PCB$,

$\therefore \frac{PA}{AC}=\frac{PC}{BC}$,$PA=\frac{1}{2}PC$.

由切割线定理,得

$PC^2=PA\cdot PB=PA(PA+AB)$

$=\frac{1}{2}PC(\frac{1}{2}PC+10)$.

$\therefore PC=\frac{20}{3}$,$PC=0$(舍去).

迁移扩展练习

1. 已知 x_1、x_2 是关于 x 的方程 $4x^2-(3m-5)x-6m^2=0$ 的两个不相等的实数根,且 $\left|\frac{x_1}{x_2}\right|=\frac{3}{2}$,求 m 的值.
2. 如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根之比为 $2:3$,求证:$6b^2=25ac$.
3. 如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 中,且 a、b、c 满足 $6b^2=25ac$.
求证:方程的两根之比为 $2:3$.
4. 如图 1—2,如果抛物线 $y=-x^2+2(m-1)x+m+1$ 与 x 轴交于 A、B 两点,且 A 点在 x 轴的正半轴上,B 点在 x 轴的负半轴上,OA 的长是 a,OB 的长是 b
(1)求 m 的取值范围;
(2)$a:b=3:1$,求 m 的值,并写出此时抛物线的解析式;
(3)设(2)中的抛物线与 y 轴交于点 C,抛物线的顶点是 M,问:抛物线上是否存在点 P,使 $\triangle PAB$ 的面积等于 $\triangle BCM$ 的 8 倍?若存在,求出 P 点坐标;若不存在,请说明理由.

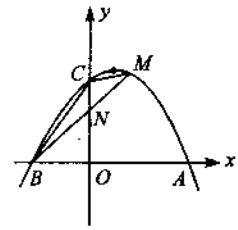


图 1—2

简解:(1)$\because x_1<0,x_2>0$,$\therefore x_1x_2=-(m+1)<0$.

解之,$m>-1$.

又$\because \Delta=4\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+7$,当 $m>-1$ 时,

$\Delta>0$,$\therefore m$ 的取值范围是 $m>-1$.

※**(2)**由商的根与系数关系,得

$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{b^2}{ac}-2$.

$\because x_1=b<0$,$x_2=a>0$.

$\therefore \left(-\frac{1}{3}\right)+(-3)=\frac{[2(m-1)]^2}{-(m+1)}-2$.

化简,$3m^2-7m+2=0$,

$\therefore m=2$,$m=\frac{1}{3}$(舍去).

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=-x^2+2x+3$.

(3)过 B、M 点的直线为 $y=2x+2$,$\therefore N(0,2)$.

$\because S_{\triangle ABP}=8S_{\triangle BCM}$,$\therefore \frac{1}{2}AB\times|y|=8S_{\triangle BCM}$.

$\because S_{\triangle BCM}=S_{\triangle BCN}+S_{\triangle MNC}=1$.

$\therefore |y|=4$,$\therefore y=\pm4$.

当 $y=4$ 时,P 点与 M 点重合,$\therefore P(1,4)$.

当 $y=-4$ 时,$-x^2+2x+3=-4$,解得

$x=1\pm2\sqrt{2}$.

$\therefore$ 满足条件的 P 点存在,P 点的坐标分别为

$(1,4)$,$(1+2\sqrt{2},-4)$,$(1-2\sqrt{2},-4)$.

5. 如图 1—3,已知直线 l 与 x 轴交于点 $P(-1,0)$,与 x 轴所夹的锐角为 θ,且 $\tan\theta=\frac{2}{3}$. 直线 l 与抛物线 $y=ax^2+bx+c$ $(a<0)$ 交于点 $A(m,2)$ 和点 $B(-3,n)$.
(1)求 A、B 两点的坐标,并用 a 的代数式表示 b 和 c;
(2)设关于 x 的方程 $x^2+6ax+3a-\frac{3}{2}=0$ 的两实

数根为 x_1、x_2，且 $x_1x_2<0$，$\left|\frac{x_1}{x_2}\right|=2$，求此时的抛物线解析式；

(3)若点 Q 是由(2)所得抛物线上的一点，且在 x 轴的上方，当满足 $\angle AOQ=90^\circ$ 时，求 Q 点的坐标及 $\triangle AOQ$ 外接圆的面积.

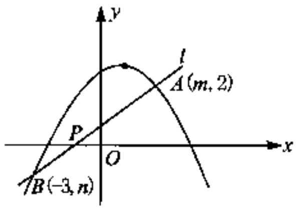


图 1--3

简解(1)：用“三角比”易求得 $A(2,2)$、$B\left(-3,-\frac{4}{3}\right)$，解

方程组 $\begin{cases}4a+2b+c=2,\\ 9a-3b+c=-\frac{4}{3},\end{cases}$

得 $b=a+\frac{2}{3}$，$c=-6a+\frac{2}{3}$.

(2)由两根的商与系数关系，得

$-2+\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{(6a)^2}{3a-\frac{3}{2}}$.

解得，$a=-\frac{1}{6}$，$a=\frac{1}{8}$(舍去).

∴抛物线的解析式为 $y=-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{5}{3}$.

(3)∵$A(2,2)$在直线 $y=x$ 上，又 $\angle AOQ=90^\circ$.

∴直线 OQ 的解析式为 $y=-x$.

解方程组 $\begin{cases}y=-x,\\ y=-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{5}{3},\end{cases}$

得 $\begin{cases}x=-1,\\ y=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x=10,\\ y=-10.\end{cases}$(∵点 Q 在 x 轴的下方，舍去)

从而，易求得 $\triangle AOQ$ 外接圆的面积 $\frac{5}{2}\pi$.

答案：1. $m_1=1$，$m_2=5$

七、倒数的应用

掌握倒数的应用：1. 是解分式方程(组)；2. 是以已知方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两根的倒数为根作新的一元二次方程.

典型例题解析

例 1 解方程：$x+\frac{1}{x}=a+\frac{1}{a}$

解析：方程两边的结构特点是：两项之和. 方程两边的数值特点是：倒数关系. 则有 $x=a$，$x=\frac{1}{a}$

经检验，它们都是原方程的解.

例 2 (2001 年上海市中考题)解方程：$\frac{x+6}{x}+\frac{x}{x+6}=\frac{10}{3}$

析：方程的左边既是两项之和，又是倒数关系，而方程的右边既不是两项之和又不是倒数关系，这里把常数项 $\frac{10}{3}$ 拆项，关键是拆分母，3 拆成两个因数的积，即 $3=3\times1$，则 $\frac{10}{3}$ 化为 $3+\frac{1}{3}$，原方程化为

$\frac{x+6}{x}+\frac{x}{x+6}=3+\frac{1}{3}$，易解，$x_1=3$，$x_2=-9$，经检验知，它们都是原方程的解.

例 3 解方程：$\frac{x-2}{x+2}-\frac{x+2}{x-2}=4\frac{4}{5}$.

析：方程右边的常数项化为 $5-\frac{1}{5}$.

原方程化为 $\frac{x-2}{x+2}-\frac{x+2}{x-2}=5-\frac{1}{5}$.

得 $\frac{x-2}{x+2}=5$，$\frac{x-2}{x+2}=-\frac{1}{5}$，易解 $x=-3$，$x=\frac{4}{3}$，经检验知，它们都是原方程的解.

例 4* 已知方程 $x+\frac{1}{x}=a+\frac{1}{a}$ 的两根分别是 a，$\frac{1}{a}$，则方程 $x+\frac{1}{x-1}=a+\frac{1}{a-1}$ 的根是______.

析：所求方程虽是两项和，但不是倒数关系，于是将方程适当变形，化为方程两边既是两项之和，又是倒数关系. 这里先添项，方程两边同时减去 1，原方程化为

$(x-1)+\frac{1}{x-1}=(a-1)+\frac{1}{a-1}$. 易解，$x=a$，$x=\frac{a}{a-1}$，经检验知，它们都是原方程的解.

例 5* 解方程：$\frac{x^2-3}{x}+\frac{3x}{x^2-3}=\frac{13}{2}$.