高等学校教学用書

高等数学

GAODENG SHUXUE

下册

武汉水利电力学院数学教研組編

人民教育出版社

高等学校教学用書

高等数学

GAODENG SHUXUE

下册

武汉水利电力学院數学教研組編

人民教育出版社

本书是武汉水利电力学院为水利类专业编写的高等数学，其特点是比较注意与专业的联系，可作为高等工业院校水利类各系和各专业教材或教学参考书，也可作为这一类专业技术干部的自学用书。但这还是初步明确专业方向的第一批高等数学教材之一，希望使用本书的教师和读者多提改进意见，以便将来能出版更好的更符合专业需要的高等数学教材。

全书暂分上、中、下三册出版，本册是下册。

高等数学

下册

武汉水利电力学院数学教研组编

人民教育出版社出版 高等学校教材编辑部 北京宣武门内承恩寺7号

（北京市书刊出版业营业许可证出字第2号）

上海洪兴印刷厂印刷

新华书店上海发行所发行

各地新华书店经售

统一书号13010·865 开本850×1168 1/32 印张4 14/16 插页2

字数123,000 印数1—31,000 定价（4）¥0.55

1960年12月第1版 1960年12月上海第1次印刷

下册目录

第二十五章　常微分方程組及一阶偏微分方程

(一)　常微分方程組

§25.1. 常微分方程組及其組的概念

在第二十四章中，我們討論过的都是一个未知函数的微分方程，但在实际問題中可能要牽涉到两个或两个以上的未知函数；这时，常常要把两个或更多个微分方程联立起来加以討論。由几个微分方程所組成的联立式称为**微分方程組**；如果所含的自变量只有一个，則这种方程組称为**常微分方程組**(即由若干个常微分方程所組成的)，比較簡单的有如下形式：

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f_1(x, y, z), \\ \dfrac{dz}{dx}=f_2(x, y, z),\end{cases} \tag{1}$$

其中 y, z 是 x 的未知函数；f_1, f_2 是含 x, y, z 的已給函数。如果把 $f_1(x, y, z)$ 及 $f_2(x, y, z)$ 分别写为

$$\frac{Q(x, y, z)}{P(x, y, z)} \quad 及 \quad \frac{R(x, y, z)}{P(x, y, z)}$$

的形式，則方程組可改写成如下的对称形式：

$$\frac{dx}{P(x, y, z)}=\frac{dy}{Q(x, y, z)}=\frac{dz}{R(x, y, z)}。 \tag{2}$$

下面举个例来說明一下。在 §24.6 中，我們介紹过"流綫"的概念。所謂流綫即这样的一条曲綫，曲綫上任一点的切綫方向即过該点的流速方向。以前，我們是就平面流动的情形来說的，那时得出流綫的方向

由下式决定：

$$\frac{dx}{v_x}=\frac{dy}{v_y},$$

其中 v_x, v_y 即流速的两个分量。就空間的情形来說，曲綫的切向矢量可表示为

$$dx\boldsymbol{i}+dy\boldsymbol{j}+dz\boldsymbol{k}, \tag{3}$$

而流速 $\boldsymbol{v}$ 的投影表示式为

$$v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}, \tag{4}$$

其中 v_x, v_y, v_z 为 v 在三軸上的投影。由(3)，(4)式两矢量的平行条件給出

$$\frac{dx}{v_x}=\frac{dy}{v_y}=\frac{dz}{v_z}。 \tag{5}$$

这便是空間内确定流綫的微分方程，与方程組(2)的形式相同。

所謂**微分方程組的解**是这样的一組函数，它們的个数与未知函数的个数相同，它們中的每一个都能同时滿足方程組里面的各个方程。

下面叙述一下解的**存在定理**(不証)。設(x_0, y_0, z_0)是空間内一定点，如方程組(1)的函数 $f_1(x, y, z)$，$f_2(x, y, z)$ 以及它們对 y 和 z 的一阶偏导数都在点(x_0, y_0, z_0)附近連續，則方程組(1)存在着唯一的一組特解：

$$y=\varphi_1(x), \quad z=\varphi_2(x),$$

且滿足預給的初始条件：

$$y_0=\varphi_1(x_0), \quad z_0=\varphi_2(x_0)。$$

如固定 x_0，但改变 y_0 和 z_0 的値，則滿足相应初始条件的特解也将改变；既然 y_0 和 z_0 是任定的，所以方程組(1)的通解也与两个任定常数有关。因此，可将方程組(1)的通解更一般地写成包含两个任定常数 c_1, c_2 的函数的形式：

$$y=\varphi_1(x, c_1, c_2), \quad z=\varphi_2(x, c_1, c_2) \tag{6}$$

或由(6)式解出 c_1 及 c_2，得

$$\psi_1(x, y, z)=c_1, \quad \psi_2(x, y, z)=c_2。 \tag{7}$$

通解(6)或(7)在几何上表示空間的曲綫族(所謂**积分曲綫族**)，而特解則表通过一定点(x_0, y_0, z_0)的一条曲綫。剛才說过，曲綫上任一点 $M(x, y, z)$ 的切向矢量可用 $\{dx, dy, dz\}$ 表示，方程組 (2) 从几何上解释即矢量$\{dx, dy, dz\}$与矢量 $\{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$ 平行；即是說，积分曲綫上任一点 $M(x, y, z)$ 的切向矢量在三个軸上的投影，与函数 $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$在点 M 上的值成比例；換言之，过任一点 $M(x, y, z)$ 的切綫方向数即可順序以 $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$表示。

§25.2. 常微分方程組的解法举例

下面用例子来說明方程組的直接求解法。

例一　有一平行于 x 軸的等速流动，速度等于 v；試确定它的流綫方程。

解　已知 $v_x=v$, $v_y=v_z=0$，于是流綫的微分方程組为

$$\frac{dx}{v}=\frac{dy}{0}=\frac{dz}{0}$$

即

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{v}=\dfrac{dy}{0}, \\ \dfrac{dx}{v}=\dfrac{dz}{0}\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}dy=0, \\ dz=0。\end{cases}$$

积分之，得流綫方程为

$$\begin{cases}y=c_1, \\ z=c_2。\end{cases}$$

故流綫为平行于 x 軸的一族直綫。

例二　求解方程組：

$$\frac{dx}{1+y}=\frac{dy}{1+x}=\frac{dz}{z}.$$

解　利用連比的性質得

$$\frac{dx+dy}{2+x+y}=\frac{dx-dy}{-(x-y)}=\frac{dz}{z}$$

即
$$\begin{cases}\dfrac{dx+dy}{2+x+y}=\dfrac{dz}{z},\\ \dfrac{dx-dy}{-(x-y)}=\dfrac{dz}{z}。\end{cases}$$

积分之,得
$$\begin{cases}\ln(2+x+y)+\ln c_1=\ln z,\\ -\ln(x-y)+\ln c_2=\ln z。\end{cases}$$

故通解为
$$\begin{cases}z=c_1(2+x+y),\\ z=\dfrac{c_2}{x-y}。\end{cases}$$

例三 求解方程組:

$$\frac{dx}{yz}=\frac{dy}{zx}=\frac{dz}{xy}。$$

解 以 xyz 遍乘比式后,原方程組变为

$$x\,dx=y\,dy=z\,dz。$$

故通解为
$$\begin{cases}x^2-y^2=c_1,\\ y^2-z^2=c_2。\end{cases}$$

例四 求解方程:

$$\frac{dx}{xz}=\frac{dy}{yz}=\frac{dz}{-(x^2+y^2)}。$$

解 先求

$$\frac{dx}{xz}=\frac{dy}{yz}$$

的解,消去 z 以后,积分即得

$$\ln x+\ln c_1=\ln y$$

即
$$y=c_1x。$$

再求方程
$$\frac{dx}{xz}=\frac{dz}{-(x^2+y^2)}$$

的解。这时将刚才求得的 $y=c_1x$ 代入方程,即得

$$\frac{dx}{xz}=-\frac{dz}{x^2(1+c_1^2)}。$$

消去 x 以后,将上式改为

$$(1+c_1^2)\,x\,dx+z\,dz=0$$

积分之,得
$$(1+c_1^2)\,x^2+z^2=c_2。$$

故原方程組的通解为

$$\begin{cases} y=c_1x, \\ (1+c_1^2)x^2+z^2=c_2。\end{cases}$$

或用 $\frac{y}{x}$ 代 c_1，則通解式又可写为

$$\begin{cases} y=c_1x, \\ x^2+y^2+z^2=c_2。\end{cases}$$

§25.3. 化方程組为高阶微分方程后求解

任何微分方程組可以轉变为一个高阶微分方程；反之，一个高阶微分方程也可以改写为方程組的形式。有时經过这种轉变之后問題較易求得解答。下面先說方程組与高阶方程如何互相轉变，然后用例子說明方程組的这一解法。

比如，有一二阶微分方程：

$$y''=f(x, y, y')。$$

如令其中的 $y'=z$，則 $y''=\frac{dz}{dx}$，于是原方程就可以如下方程組替代：

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=z, \\ \dfrac{dz}{dx}=f(x, y, z)。\end{cases}$$

反之，方程組也可用一高阶方程来替代，比如，所給方程組为

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=f_1(x, y, z), \\ \dfrac{dz}{dx}=f_2(x, y, z)。\end{cases} \tag{1}$$

对第一个方程求导数，得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{dz}{dx}。$$

借方程組(1)消去 $\frac{dz}{dx}$ 及 z 得仅含 x, y, y' 及 y'' 的一个方程，即如下的

二阶微分方程:

$$f(x, y, y', y'') = 0。\tag{2}$$

由于二者之間存在这种关系，故常微分方程組可以通过高阶微分方程来求解。設从(2)式求出通解为

$$y = \varphi_1(x, c_1, c_2)。\tag{3}$$

将此式对 x 求导数，得

$$\frac{dy}{dx} = \varphi_1'(x, c_1, c_2)。\tag{4}$$

以(3)及(4)式所确定的 y, $\frac{dy}{dx}$ 代入方程組(1)的第一式，即得 z 关于 x, c_1, c_2 的函数:

$$z = \varphi_2(x, c_1, c_2)。\tag{5}$$

这样就求出了方程組(1)的通解为:

$$\begin{cases} y = \varphi_1(x, c_1, c_2), \\ z = \varphi_2(x, c_1, c_2)。\end{cases}$$

例 解方程組:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x + y + 2z, \\ \dfrac{dz}{dx} = x + z + 2y。\end{cases}$$

解 取第一式的导数，得

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 1 + \frac{dy}{dx} + 2\frac{dz}{dx}。$$

将原方程組中第二式的 $\frac{dz}{dx}$ 代入上式得

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 1 + \frac{dy}{dx} + 2(x + z + 2y)。$$

将此式与原方程組第一式联立，消去 z，即得

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 1 + \frac{dy}{dx} + 2x + \left(\frac{dy}{dx} - x - y\right) + 4y$$

即

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = x + 1。$$

这是常系数綫性微分方程。求出其通解为 $y=c_1e^{-x}+c_2e^{3x}-\frac{x}{3}-\frac{1}{9}$。取其导数，得

$$\frac{dy}{dx}=-c_1e^{-x}+3c_2e^{3x}-\frac{1}{3},$$

将所求得的 y 及 $\frac{dy}{dx}$ 代入原方程組第一式，得

$$2z=\frac{dy}{dx}-x-y=\left(-c_1e^{-x}+3c_2e^{3x}-\frac{1}{3}\right)-x-\left(c_1e^{-x}+c_2e^{3x}-\frac{x}{3}-\frac{1}{9}\right),$$

即

$$z=-c_1e^{-x}+c_2e^{3x}-\frac{x}{3}-\frac{1}{9}。$$

故求得原方程組的通解为：

$$\begin{cases}y=c_1e^{-x}+c_2e^{3x}-\frac{x}{3}-\frac{1}{9},\\ z=-c_1e^{-x}+c_2e^{3x}-\frac{x}{3}-\frac{1}{9}。\end{cases}$$

习 題 一

1. 求下列微分方程組的通解：

(1) $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$。

(2) $\frac{dx}{mz-ny}=\frac{dy}{nx-lz}=\frac{dz}{ly-mx}$。　答：$\begin{cases}lx+my+nz=c_1,\\ x^2+y^2+z^2=c_2。\end{cases}$

(3) $\frac{dx}{y+z}=\frac{dy}{z+x}=\frac{dz}{x+y}$。　答：$\begin{cases}x-y=c_1(z-x),\\ (x-y)^2(x+y+z)=c_2。\end{cases}$

(4) $\frac{dx}{z}=\frac{dy}{-z}=\frac{dz}{z^2+(x+y)^2}$。　答：$\begin{cases}y+x=c_1,\\ z^2+(y+x)^2=c_2e^{2z}。\end{cases}$

(5) $\frac{dx}{xy}=\frac{dy}{y^2}=\frac{dz}{xyz-2x^2}$。　答：$\begin{cases}y=c_1x,\\ \ln\left(z-\frac{2x}{y}\right)-x=c_2。\end{cases}$

(6) $\begin{cases}\frac{dy}{dx}+3y+z=1,\\ \frac{dz}{dx}-y+z=x。\end{cases}$　答：$\begin{cases}y=(c_1+c_2x)e^{-2x}+\frac{2-x}{4},\\ z=-[c_1+c_2(1+x)]e^{-2x}+\frac{3x-1}{4}。\end{cases}$

(7) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+5x+y=e^t, \\ \dfrac{dy}{dt}+3y-x=e^{-t}。\end{cases}$ 答: $\begin{cases}x=(c_1+c_2t)e^{-4t}+\dfrac{4}{25}e^t-\dfrac{e^{-t}}{9}, \\ y=-[c_1+c_2(1+t)]e^{-4t}+\dfrac{1}{25}e^t+\dfrac{4}{9}e^{-t}。\end{cases}$

(二) 一阶綫性偏微分方程

§25.4. 偏微分方程的概念

在第二十四章中曾提到过所謂偏微分方程，并举过

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

三个例子。一般地，偏微分方程的形式是

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \cdots\right)=0, \tag{1}$$

其中 x, y 是自变量(为求簡单起見，只假定有两个自变量)，z 是未知函数。若 F 中所含之最高阶导数为 n 阶的，則称 (1)式为 n 阶的偏微分方程。若 $n=1$，則为一阶偏微分方程，它的一般形式是

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)=0。 \tag{2}$$

所謂求解方程(1)，即定出函数

$$z=f(x, y),$$

使它适合所給方程，这样定出的函数名为方程的解或积分。从几何上說，如以 (x, y, z) 表空間一点的坐标，則 $z=f(x, y)$ 表一空間曲面，我們把这种曲面叫做偏微分方程的积分曲面。但必須指出，求偏微分方程的通解比求常微分方程的通解更为困难。并且，即使通解已被求出，

要想从中确定一个满足預給条件的特解也极为繁难。通常,除了一些比較簡单的以外,多是直接寻求满足預給条件的特解,而不是求出通解后再按条件确定特解。最后,还要指出一点:在 n 阶常微分方程的通解中包含 n 个任定常数,在 n 阶的偏微分方程中則包常 n 个任定函数。比如,方程

$$2\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$$

的通解即

$$z=y+f(x-2y),$$

其中 f 为任定函数。

事实上,把 $z=y+f(x-2y)$ 对 x, y 求偏导数即得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{df(u)}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{df}{du}\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=1+\frac{df(u)}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=1-2\frac{df}{du}\end{aligned}\right\}\quad(令\ u=x-2y)。$$

可見,

$$2\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1。$$

即无論 f 为任何一个可以求导的函数,恒有

$$2\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1。$$

讀者可用 $(x-2y)$ 的任一函数加以檢驗,例如,

$$f(x-2y)=e^{(x-2y)^2},\quad f(x-2y)=(x-2y)^3,\quad\cdots。$$

§25.5. 一阶拟綫性和綫性偏給分方程

这一节我們只講一阶拟綫性偏微分方程和綫性齐次偏微分方程。如下形式的方程

$$X_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)\frac{\partial x_n}{\partial x_1}+X_2(x_1, x_2, \cdots, x_n)\frac{\partial x_n}{\partial x_2}+\cdots+$$

$$+X_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_n)\frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}}=X_n(x_1, x_2, \cdots, x_n),\qquad(1)$$

叫做一阶拟綫性偏微分方程，这里所説的綫性是就各个偏导数来説的。如果(1)式右端为零，且函数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 中都不包含未知函数 z，郎形如

$$X_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)\frac{\partial z}{\partial x_1}+X_2(x_1, x_2, \cdots, x_n)\frac{\partial z}{\partial x_2}+\cdots+$$
$$+X_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)\frac{\partial z}{\partial x_n}=0 \tag{2}$$

的方程，叫做一阶綫性齐次偏微分方程。

以下説明方程(1)的特解，为簡单起見，只討論具有三个变量的拟綫性方程：

$$P(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y}=R(x, y, z), \tag{3}$$

其中 P, Q, R 是在 x, y, z 的所論区域內不同时为零的連續函数。求解这一方程与求解常微分方程組

$$\frac{dx}{P(x, y, z)}=\frac{dy}{Q(x, y, z)}=\frac{dz}{R(x, y, z)} \tag{4}$$

的問題有很密切的关系。下面郎从几何方面来説明这一关系。

設常微分方程組(4)的通解为

$$\begin{cases}\psi_1(x, y, z)=c_1,\\ \psi_2(x, y, z)=c_2,\end{cases} \tag{5}$$

式中 $\psi_1(x, y, z)=c_1$ 和 $\psi_2(x, y, z)=c_2$ 各表一曲面族，而联立式(5)則表空間的曲綫族，这族曲綫由 c_1, c_2 取各种不同的值得到。又过綫上任一点 $M(x,y,z)$ 的切綫方向数郎可順序以 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x, y, z)$表示。

另一方面，曲面可以看成是一族曲綫按某种規律所組成，例如，球面可以看成是由空間具有相同半徑的一族同心圓所組成。因此，如果将联立式(5)中的 c_1, c_2 按一定方式配合，比如令 c_1, c_2 滿足方程

$$\Phi(c_1, c_2)=0,$$

则 c_1 确定后，c_2 卽随之确定，于是联立式(5)卽定出一空間曲綫。当 c_1 变化时，如上确定的无穷多支曲綫卽組成一空間曲面，它的方程可表示为

$$\Phi\{\psi_1(x, y, z), \psi_2(x, y, z)\}=0_{\circ} \tag{6}$$

或者解出 z，得

$$z=f(x, y)_{\circ} \tag{7}$$

实际(6)或(7)式便是所求的偏微分方程(3)的积分曲面。要証明这一点，只需証明由(6)或(7)式确定的 z 能令方程(3)满足。

事实上，曲面(7)的法綫方向数可順序表示为 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$，$-1$（参看§20.12）；但曲面上任一点的法綫与过該点的每一切綫垂直，曲面(7)旣由联立式(5)所确定的曲綫組成，而这些曲綫的切綫方向数可順序表示为 $P(x, y, z)$，$Q(x, y, z)$，$R(x, y, z)$。按空間二直綫互相垂直的条件，知

$$P(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y}-R(x, y, z)=0,$$

这便是方程(3)。

如果曲面方程不用(7)式的形式而仍用隐函数

$$u(x, y, z)\equiv\Phi\{\psi_1(x, y, z), \psi_2(x, y, z)\}=0 \tag{8}$$

的形式，则其法綫方向数可表示为 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial z}$，这时同样可以得出如下等式：

$$P(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial x}+Q(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial y}+R(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial z}=0_{\circ} \tag{9}$$

(9)式的意思是，由方程

$$u(x, y, z)=0$$

确定的曲面是綫性齐次偏微分方程(9)的积分曲面。

由此可見，要求拟綫性方程(3)或齐次綫性方程(9)的通解，可先求出对应的常微分方程組(4)的通解：

$$\begin{cases}\psi_1(x, y, z)=c_1,\\ \psi_2(x, y, z)=c_2。\end{cases}$$

然后与任定函数

$$\Phi(c_1, c_2)=0$$

联立，卽得微分方程(3)和(9)的通解为

$$\begin{cases}\psi_1(x, y, z)=c_1,\\ \psi_2(x, y, z)=c_2,\\ \Phi(c_1, c_2)=0。\end{cases} \tag{10}$$

以上結論是利用几何性質推得的。似乎这个結論只适用于方程(3)和(9)的情形；但事实并非如此，以上方法实际可以推广到更多变量的情形中。我們不在这里作詳細的論証，只把它們的解法叙述如下：

齐次綫性方程

$$X_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)\frac{\partial z}{\partial x_1}+X_2(x_1, x_2, \cdots, x_n)\frac{\partial z}{\partial x_2}+\cdots+$$
$$+X_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)\frac{\partial z}{\partial x_n}=0$$

和拟綫性方程

$$X_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)\frac{\partial x_n}{\partial x_1}+X_2(x_1, x_2, \cdots, x_n)\frac{\partial x_n}{\partial x_2}+\cdots+$$
$$+X_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_n)\frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}}=X_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

就可以通过常微分方程組

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)}=\frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \cdots, x_n)}=\cdots=\frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)}$$

来求解，将求出的方程組的解，与任定常数間的任定函数联立，卽得所論一阶偏微分方程的通解。

例一 解偏微分方程

$$z\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1。$$