考试先锋

高教版·管致中等主编
《信号与线性系统》(第4版)同步辅导

九章丛书

信号与线性系统

辅导及习题全解

(教材上下册合订本)

第4版

主编/杨富云　孙怀东
编写/九章系列课题组

- 知识点窍
- 逻辑推理
- 习题全解
- 全真考题

电子科技大学出版社

信号与线性系统辅导及习题全解

(第4版)

(教材上下册合订本)

主编　杨富云　孙怀东

编写　九章系列课题组

电子科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

信号与线性系统辅导及习题全解 /杨富云,孙怀东主编. —成都:电子科技大学出版社,2006.9
ISBN 7-81114-276-7

Ⅰ.信... Ⅱ.①杨...②孙... Ⅲ.①信号理论—高等学校—教学参考资料②线性系统—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 109303 号

【内容简介】 本书是配合高等教育出版社出版、管致中等编著《信号与线性系统》(第 4 版)教材编写的辅导书,也可作为"信号与线性系统"课程的复习指导书,其内容、要点、题目都是根据该课程的范围和难度来组织的。

全书由绪论、连续时间系统的时域分析、连续信号的正交分解、连续时间系统的频域分析、连续时间系统的复频域分析、连续时间系统的系统函数、离散时间系统的时域分析、离散时间系统的变换域分析、离散傅里叶变换、数字滤波器、线性系统的状态变量分析、随机变量、随机过程、线性系统对随机信号的响应等十四章组成。每章又分为重点、难点学习指导、习题祥解等部分。

本书可作为高等学校电气信息类专业"信号与线性系统"课程的学习指导书,也适用于参加研究生入学考试复习参考书。

信号与线性系统辅导及习题全解(第 4 版)
杨富云　孙怀东　主编

出　　版:电子科技大学出版社(成都市建设北路二段四号,邮编:610054)
责任编辑:张　鹏
发　　行:电子科技大学出版社
印　　刷:北京龙兴印刷厂
开　　本:787×960　1/16　印张:22.25　字数:642 千字
版　　次:2006 年 9 月第一版
印　　次:2006 年 9 月第一次印刷
书　　号:ISBN 7-81114-276-7/TM・9
印　　数:1—5000 册
定　　价:25.00 元

前　　言

信号与线性系统是电子信息类各专业的一门重要的专业基础课程，主要研究信号与线性系统分析的基础理论、基本概念、和基本分析方法。

信号与线性系统是一门理论性和系统性很强的课程，它的内容涉及数学知识较多，并有广泛的实际工程应用背景。学习这门课程应注重数学和物理概念的结合，注重学和练相结合，从而掌握该门课程的分析方法。

本书是与管致中等主编的教材《信号与线性系统》（第四版）相配套的课程辅导书。按照先连续系统后离散系统、先时域分析法后变换域分析法、先输入输出后状态空间描述、先确定信号后随机信号的顺序，对教材上下两册共十四章的课后习题作了全面的解答，对教材每章的主要内容、基本公式进行了归纳。

本书在对习题的解答过程中，除了有传统辅导书的解题过程外，还对大部分具有代表性的习题给出了知识点窍、逻辑推理。知识点窍简明扼要的点出了题中涉及的核心知识点，让学生清楚的了解出题者的意图；而逻辑推理则注重引导学生思维，旨在培养学生科学的思维方法，掌握答题的思维技巧。

本书在编写过程中，参考了管致中等主编的《信号与线性系统》（第四版·上、下册）两书，并借鉴了书中部分插图，在此深表感谢。由于编者水品有限及编写时间仓促，不妥之处在所难免，希望广大读者不吝批评、指正。

编者

2006 年 8 月

目 录

第 1 章 绪 论

1.1 重点、难点学习指导

1. 信号的分类

(1)广义地说信号是随着时间变化的某种物理量

信号的形式多种多样,可以从不同的角度进行分类。常用的几种分类为:确定信号和随机信号;周期信号与非周期信号;连续时间信号与离散时间信号;能量信号与功率信号等。

(2)功率信号与能量信号

功率信号 信号在时间区间$(-\infty,\infty)$内的能量为无穷大,但平均功率为有限值则为功率信号。周期信号都是功率信号。

平均功率 $P=\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2\mathrm{d}t$

T 为周期信号的周期

能量信号 信号在时间区间$(-\infty,\infty)$内的能量为有限值,其平均功率为零,则为能量信号

$$W=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2\mathrm{d}t$$

2. 信号的时域运算与变换

信号的基本运算有 8 种。时域中的定义如下:

(1)相加:$y(t)=f_1(t)+f_2(t)$

即表示同一瞬间信号瞬时值之和。

(2)相乘:$y(t)=f_1(t)\cdot f_2(t)$

即表示同一瞬间信号瞬时值之积。

(3)幅度变化:$y(t)=af(t)$

即表示在每一时刻都乘以常数 a。

(4)信号的反褶:$f(-t)$

$f(-t)$的波形与原信号 $f(t)$的波形关于纵轴镜像对称。

(5)信号的时移:$f(t-t_0)$

式中,t_0 为常数,$f(t-t_0)$的波形当 $t_0>0$ 时,将 $f(t)$右移 t_0;当 $t_0<0$ 时,将 $f(t)$左移 t_0。

(6)信号的尺度变换:$f(at)$

式中,a 为常数。$f(at)$的波形当$|a|>1$ 时,信号 $f(t)$的波形在时间轴上压缩$\dfrac{1}{|a|}$倍;当$|a|<1$ 时,信号 $f(t)$的波形在时间轴上扩展$|a|$倍。

(7)微分运算:$y(t)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)$

(8)积分运算：$y(t)=\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau$

已知信号 $f(t)$ 的波形，求变换后信号 $f(at+b)(a\neq0)$ 的波形，通常采用对信号先平移再反转，最后进行尺度变换的步骤。即

若 $a>0$，有 $f(t)\rightarrow f(t+b)\rightarrow f(at+b)$

若 $a<0$，有 $f(t)\rightarrow f(t+b)\rightarrow f(-t+b)\rightarrow f(-|a|t+b)$

3. 系统的分类及特性

(1)系统的分类

从不同角度，可以将系统进行分类，按照系统特性可分为连续时间系统与离散时间系统，线性系统与非线性系统，时变系统与时不变系统，因果系统与非因果系统等。

(2)系统的特性

当输入为 $e(t)$，输出为 $r(t)$ 时，表示为 $e(t)\rightarrow r(t)$。

①线性：当 $e_1(t)\rightarrow r_1(t)$ 和 $e_2(t)\rightarrow r_2(t)$ 时，$k_1e_1(t)+k_2e_2(t)\rightarrow k_1r_1(t)+k_2r_2(t)$，其中 k_1,k_2 为任意常数。

②时不变：$e(t-t_0)\rightarrow r(t-t_0)$，其中 t_0 为任意常数，如 $r(t)=ae(t)$。

③因果性：系统在任何时刻的输出仅取决于输入的现在与过去值，而与输入的将来值无关，如 $r(t)=e(t-2)$。

④稳定性：系统输入有界，其输出也是有界的，如 $r(t)=e^{e(t)}$。

习题详解

1.1 说明波形如图 1.1 所示的各信号是连续信号还是离散信号。

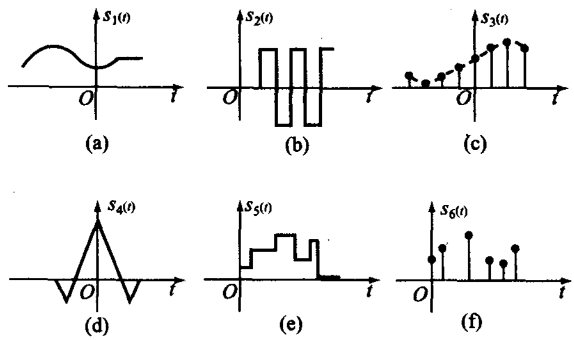

图 1.1

【知识点窍】 本题考察连续信号和离散信号的概念。

【逻辑推理】 连续信号：在某一时间间隔，对于一切时间值，除若干不连续点外，都给出确定函数值。

离散信号：只在某些不连续的时间值上给定函数值。

【解题过程】 由连续与离散信号定义知：时间变量 t 连续的信号为连续信号；时间变量 t 离散的信号为离散信号。所以图(a)、(b)、(d)、(e)所示信号为连续信号；图(c)、(f)所示信号为离散信号。

1.2 说明下列信号是周期信号还是非周期信号。若是周期信号,求其周期 T。

(a)$a\sin t-b\sin 3t$　(b)$a\sin 4t+b\cos 7t$

(c)$a\sin 3t+b\cos \pi t$,$\pi=3$ 和 $\pi\approx 3.141\cdots$

(d)$a\cos \pi t+b\sin 2\pi t$　(e)$a\sin \dfrac{5t}{2}+b\cos \dfrac{6t}{5}+c\sin \dfrac{t}{7}$

(f)$(a\sin 2t)^2$　(g)$(a\sin 2t+b\sin 5t)^2$

【知识点窍】 本题考察周期信号的判别方法和复合信号的周期计算方法。

【逻辑推理】 包含几个不同频率余弦分量的复合,信号的周期 T 是各分量信号周期 $T_i(i=1,2,3\cdots)$ 的整数倍,即 $T=m_i\cdot t_i=m_i\cdot\dfrac{2\pi}{\omega_i}$

因此只要找到几个不含整数公因子的正整数 $m_1,m_2,m_3\cdots m_n$ 使 $\omega_1:\omega_2:\omega_3\cdots\omega_n=m_1:m_2\cdots m_n$ 成立,可判定该信号为周期信号。

【解题过程】 (a)因为 $\omega_1:\omega_2=1:3$,所以 $T=1\times\dfrac{2\pi}{1}=2\pi$,故该信号为周期信号。

(b)因为 $\omega_1:\omega_2=4:7$,所以 $T=4\times\dfrac{2\pi}{4}=2\pi$,故该信号为周期信号。

(c)当 $\pi\approx 3$ 时,因为 $\omega_1:\omega_2=3:\pi\approx 3:3=1:1$,所以 $T=1\times\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}$,故该信号为周期信号。

当 $\pi\approx 3.141\cdots$ 时,其分量频率为无理数,所以是该周期信号即非周期信号。

(d)因为 $\omega_1:\omega_2=\pi:2\pi=1:2$,所以 $T=1\times\dfrac{2\pi}{\pi}=2$,故该信号为周期信号。

(e)因为 $\omega_1:\omega_2:\omega_3=\dfrac{5}{2}:\dfrac{6}{5}:\dfrac{1}{7}=175:84:10$,所以 $T=175\times\dfrac{2\pi}{\frac{5}{2}}=140\pi$,故该信号为周期信号。

(f)因为 $(a\sin 25)^2=\dfrac{a^2}{2}(1-\cos 4t)$,所以 $T=\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$,故该信号为周期信号。

(g)因为 $(a\sin 2t+b\sin 5t)^2=a^2\sin^2 2t+b^2\sin^2 5t+2ab\sin 2t\sin 5t=\dfrac{a^2}{2}(1-\cos 4t)+\dfrac{b^2}{2}(1-\cos 10t)+ab(\cos 3t-\cos 7t)$

$\omega_1:\omega_2:\omega_3:\omega_4=4:10:3:7$

所以 $T=4\times\dfrac{2\pi}{4}=2\pi$,故该信号为周期信号。

1.3 说明下列信号中哪些是周期信号,哪些是非周期信号;哪些是能量信号,哪些是功率信号。计算它们的能量或平均功率。

(1)$f(t)=\begin{cases}5\cos(10\pi t), & t\geqslant 0\\ 0, & t<0\end{cases}$

(2)$f(t)=\begin{cases}8e^{-4t}, & t\geqslant 0\\ 0, & t<0\end{cases}$

(3)$f(t)=5\sin 2\pi t+10\sin 3\pi t,-\infty<t<\infty$

(4)$f(t)=20e^{-10|t|}\cos(\pi t),-\infty<t<\infty$

(5)$f(t)=\cos(5\pi t)+2\cos(2\pi^2 t),-\infty<t<\infty$

【知识点窍】 本题考察周期信号、非周期信号、能量信号、功率信号的概念

【逻辑推理】 时间间隔无穷大时，周期信号都是功率信号，只存在有限时间内的信号是能量信号。

信号总能量为有限值而信号平均功率为零的是能量信号；信号平均功率为有限值而信号总能量为无限大的是功率信号。

【解题过程】 (1)因为 $f(t)$在 $t\geqslant 0$ 时间内按照余弦重复变化易知 $f(t)$为周期信号 $T=\frac{2\pi}{10\pi}=\frac{1}{5}$，故为功率信号。其平均功率为

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left|f(t)\right|^2\mathrm{d}t$$

$$=5\int_{-\frac{1}{10}}^{\frac{1}{10}}25\cos^2(10\pi t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{125}{2}\int_0^{\frac{1}{10}}(\cos 20\pi t+1)\mathrm{d}t=6.25\mathrm{W}$$

(2)因为 $t\to+\infty$，$e^{-4t}\to 0$，所以 $f(t)$为非周期信号，故为能量信号

$$W=\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}64e^{-8t}\mathrm{d}t=8\mathrm{J}$$

(3)因为 $\omega_1:\omega_2=2\pi:3\pi=2:3$，所以 $T=2\times\frac{2\pi}{2\pi}=2$，故 $f(t)$为周期信号，故为功率信号。其平均功率为

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left|f(t)\right|^2\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}(5\sin 2\pi t+10\sin 3\pi t)^2\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}(25\sin^2 2\pi t+100\sin^2 3\pi+100\sin 2\pi t\cdot\sin 3\pi t)$$

$$=62.5\mathrm{W}$$

(4)该信号为非周期信号，是能量信号。

$$E=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}|20e^{-10|t|}\cos(\pi t)|^2\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}400e^{-20|t|}\cos^2\pi t\mathrm{d}t=38.18\mathrm{J}$$

(5)该信号是非周期信号，是功率信号，其平均功率为

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2t}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2t}\int_{-T}^{T}\cos^2 5\pi t+4\cos^2(2\pi^2 t)+4\cos(5\pi t)\cdot\cos(2\pi^2 t)\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2t}\left[\int_{-T}^{T}\frac{\cos 10\pi t+1}{2}\mathrm{d}t+4\int_{-t}^{t}\frac{\cos 4\pi^2 t+1}{2}\mathrm{d}t\right.$$

$$+4\int_{-T}^{T}\cos(5\pi t+2\pi^2 t)+\cos(5\pi t-2\pi^2 t)\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2t}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2t+\frac{1}{2t}\cdot\frac{4}{2}\cdot 2t=\frac{1}{2}+2=2.5\text{W}$$

1.4 试判断下列论断是否正确：

(1)两个周期信号之和必仍为周期信号；

(2)非周期信号一定是能量信号；

(3)能量信号一定是非周期信号；

(4)两个功率信号之和必仍为功率信号；

(5)两个功率信号之积必仍为功率信号；

(6)能量信号与功率信号之积必为能量信号；

(7)随机信号必然是非周期信号。

【知识点窍】 本题考察周期信号、非周期信号、能量信号、功率信号的相关概念。

【逻辑推理】 时间间隔无穷大时，周期信号都是功率信号，只存在有限时间内的信号是能量。

【解题过程】

(1)错误

(2)错误

(3)正确

(4)错误

(5)错误

(6)错误

(7)正确

1.5 粗略绘出下列各函数式表示的信号波形。

(1)$f(t)=3-e^{-t},t>0$

(2)$f(t)=5e^{-t}+3e^{-2t},t>0$

(3)$f(t)=e^{-t}\sin 2\pi t,0<t<3$

(4)$f(t)=\dfrac{\sin at}{at}$

(5)$f(k)=(-2)^{-k},0<k\leqslant 6$

(6)$f(k)=e^{k},0\leqslant k<5$

(7)$f(k)=k,0<k<n$

【知识点窍】 本题考察信号波形的绘制。

【逻辑推理】 本题用到了信号的时域运算与变换。包括相加、相乘、幅度变化，反褶、时移、尺度变换等。

【解题过程】 各函数式所表示的信号波形如图1.2所示。

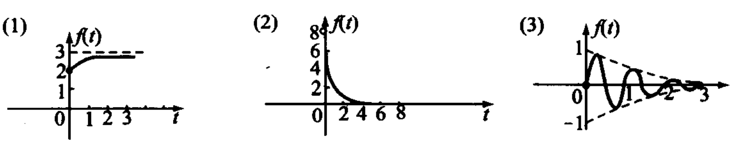

图1.2

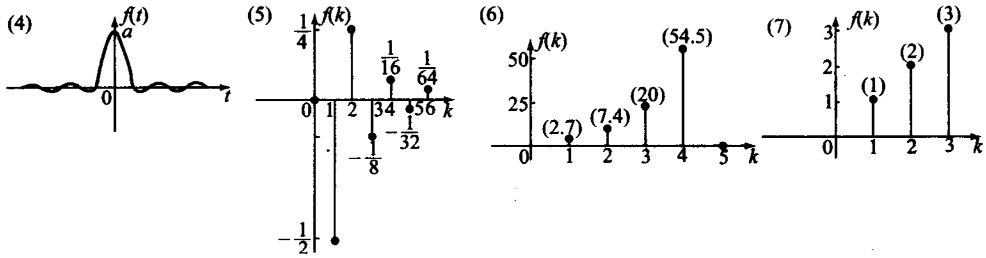

图 1.2(续)

1.6 已知信号 $f(t)$ 波形如图 1.3 所示，试绘出 $f(t-4)$，$f(t+4)$，$f\left(\frac{t}{2}\right)$，$f(2t)$，$f\left(-\frac{t}{2}\right)$，$f\left(-\frac{1}{2}t+1\right)$的波形。

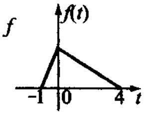

图 1.3

【知识点窍】 本题考察信号波形的时延、反褶、尺度变换等方法。

【逻辑推理】 对信号波形进行变换时，可按照时延、反褶、尺度变换的先后，组成不同的分步次序，可代入特殊点检验。

【解题过程】 波形图如图 1.4 所示：

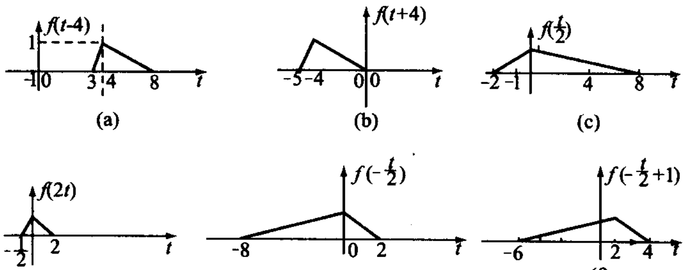

图 1.4

1.7 改变教材中例题 1-2 中信号处理的分布次序为：(1)反褶，时延，尺度变换 (2)尺度变换，反褶，时延，(3)尺度变换，时延，反褶，重绘 $f(1-2t)$的波形，并与例题 1-2 的结果相比较。

【知识点窍】 本题考察信号的简单处理。

【逻辑推理】 在信号的简单处理中常有综合时延、尺度变换与反褶，可以针对相应波形分步处理。

【解题过程】 (1)反褶→时延→尺度变换

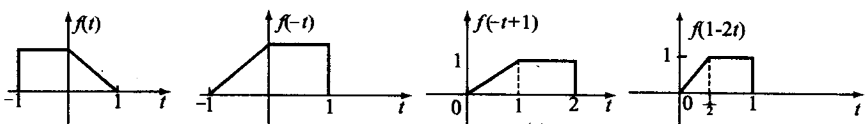

图 1.5(1)

(2)尺度变换→反褶→时延

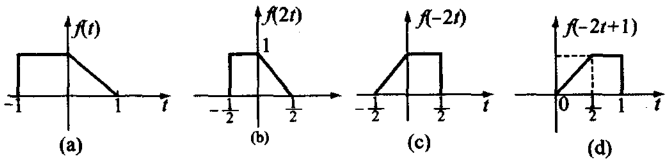

图 1.5(2)

(3)尺度变换→时延→反褶

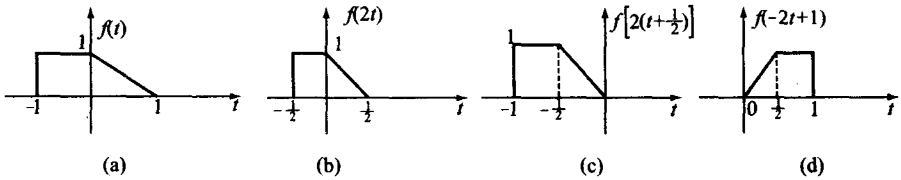

图 1.5(3)

1.8 试判断下列方程所描述的系统是否为线性系统？

(1)$\dfrac{dr(t)}{dt}+r(t)=e(t)+5$　　(2)$\dfrac{dr(t)}{dt}+tr(t)+5\int_{-\infty}^{t}r(\tau)d\tau=\dfrac{de(t)}{dt}+e(t)$

(3)$r(t)=10e^2(t)+10$　　(4)$\dfrac{d^2r(t)}{dt^2}-r(t)\dfrac{dr(t)}{dt}=10e(t)$

【知识点窍】 本题考察线性系统的判定。

【逻辑推理】 线性系统满足：当 $e_1(t)\to r_1(t)$，$e_2(t)\to r_2(t)$时

$e_1(t)+e_2(t)\to r_1(t)+r_2(t)$，其中 k_1，k_2 为任意常数。

【解题过程】 系统是否为线性系统需证明系统必需满足叠加性和齐次性，即若 $e_1(t)\to r_1(t)$，$e_2(t)\to r_2(t)$，且

$$e_1(t)+e_2(t)\to r_1(t)+r_2(t)$$

则该系统为线性系统。

(1)设激励为 $e_1(t)+e_2(t)$时，响应为 $r_1(t)+r_2(t)$，分别代入题中方程两边，得

$$\begin{aligned}\text{方程左边}&=\frac{d[r_1(t)+r_2(t)]}{dt}+[r_1(t)+r_2(t)]\\&=\left(\frac{dr_1(t)}{dt}+r_1(t)\right)+\left(\frac{dr_2}{dt}+r_2(t)\right)\\&=[e_1(t)+5]+[e_2(t)+5]\\\text{方程右边}&=e_1(t)+e_2(t)+5\end{aligned}$$

方程两边不等，所以该系统为非线性系统。

(2)设激励为 $e_1(t)+e_2(t)$时，响应为 $r_1(t)+r_2(t)$，分别代入题中方程两边，得

$$\text{方程右边}=\frac{d[e_1(t)+e_2(t)]}{dt}+e_1(t)+e_2(t)$$

$$\begin{aligned}\text{方程左边}&=\frac{d[r_1(t)+r_2(t)]}{dt}+t[r_1(t)+r_2(t)]+5\int_{-\infty}^{t}[r_1(\tau)+r_2(\tau)]d\tau\\&=\frac{d[e_1(t)+e_2(t)]}{dt}+e_1(t)+e_2(t)\end{aligned}$$

方程两边相等，所以该系统为线性系统。

(3)设激励为 $e_1(t)+e_2(t)$ 时，响应应为 $r_1(t)+r_2(t)$，分别代入题中方程两边，得

$$10[e_1(t)+e_2(t)]^2+10=10_1e_1^2(t)+20_1e_1(t)e_2(t)$$
$$+10e_2^2(t)+10\neq r_1(t)+r_2(t)$$

所以该系统为非线性系统。

(4)设激励为 $e_1(t)+e_2(t)$ 时，响应为 $r_1(t)+r_2(t)$，分别代入题中方程两边，得

$$\text{方程右边}=10[e_1(t)+e_2(t)]$$
$$=\frac{\mathrm{d}^2[r_1(t)]}{\mathrm{d}t^2}-r_1(t)\frac{\mathrm{d}[r_1(t)]}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}^2[r_2(t)]}{\mathrm{d}t^2}-r_2(t)\frac{\mathrm{d}[r_2(t)]}{\mathrm{d}t}$$
$$\text{方程左边}=\frac{\mathrm{d}^2[r_1(t)+r_2(t)]}{\mathrm{d}t^2}$$

方程两边不等，所以该系统为非线性系统。

1.9 证明线性时不变系统有如下特性：即若系统在激励 $e(t)$ 作用下响应为 $r(t)$，则当激励为 $\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}$ 时响应必为 $\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}$。

提示：$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{f(t)-f(t-\Delta t)}{\Delta t}$

【知识点窍】 本题考察线性时不变系统的概念

【逻辑推理】 时不变系统满足 $e(t-t_0)\to r(t-t_0)$

【证明】 因为 $\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{e(t)-e(t-\Delta t)}{\Delta t}\to\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{r(t)-r(t-\Delta t)}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}$ 即 $\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}\to\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}$，所以得证。

1.10 一线性非时变系统具有非零的初始状态，已知当激励为 $e(t)$ 时，系统全响应为 $r_1(t)=\mathrm{e}^{-t}+2\cos\pi t,t>0$；若初始状态不变，激励为 $2e(t)$ 时，系统的全响应为 $r_2(t)=3\cos\pi t,t>0$。求在同样初始状态条件下，如激励为 $3e(t)$ 时，系统的全响应为 $r_3(t)$。

【知识点窍】 本题考察系统的响应函数的求法。

【逻辑推理】 从一定初始条件和一定激励来求取系统响应，即求取描述该系统的常系数线性微分方程。

【解题过程】 设初始状态下系统的零输入响应为 $r_{zi}(t)$，零状态响应为 $r_{zs}(t)$，系统线性，零状态响应具有线性 $e(t)\to r_{zs}(t)$，$2e(t)\to 2r_{zs}(t)$ 则

由系统叠加性，激励为 $e(t)$ 时

$$r_{zi}(t)+r_{zs}(t)=r_1(t)=\mathrm{e}^{-t}+2\cos\pi t\quad t>0 \qquad ①$$

激励为 $2e(t)$ 时，系统全响应为

$$r_{zi}(t)+2r_{zs}(t)=r_2(t)=3\cos\pi t\quad t>0 \qquad ②$$

联立①②，解得 $\begin{cases}r_{zi}(t)=\cos\pi t-\mathrm{e}^{-t}\\ r_{zs}(t)=\cos\pi t+2\mathrm{e}^{-t}\end{cases}$

所以 $$r_{zi}(t)+3r_{zs}(t)=r_3(t)=4\cos\pi t-\mathrm{e}^{-t}\quad (t>0)$$

1.11 一具有两个初始条件 $x_1(0)$、$x_2(0)$ 的线性非时变系统，其激励为 $e(t)$，输出响应为 $r(t)$，已知

(1)当 $e(t)=0,x_1(0)=5,x_2(0)=2$ 时，

$$r(t)=\mathrm{e}^{-t}(7t+5),t>0$$

(2)当 $e(t)=0,x_1(0)=1,x_2(0)=4$ 时，

$$r(t)=\mathrm{e}^{-t}(5t+1),t>0$$

(3)当 $e(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$，$x_1(0)=1$，$x_2(0)=1$ 时，

$$r(t)=\mathrm{e}^{-t}(t+1),t>0$$

求 $e(t)=\begin{cases}3,t>0\\ 0,t<0\end{cases}$ 时的零状态响应。

【知识点窍】 本题考察线性非时变系统状态响应的求法。

【逻辑推理】 非线性系统对应非线性微分方程，求解状态响应也就是求解对应的非线性微分方程。

【解题过程】 设零输入响应为 $r_{zi}(t)$，零状态响应为 $r_{zs}(t)$，则由(1)得系统零输入响应为

$$5r_{zi_1}(t)+2r_{zi_2}(t)=\mathrm{e}^{-t}(7t+5) \quad ①$$

由(2)得系统零输入响应为

$$r_{zi_1}(t)+4r_{zi_2}(t)=\mathrm{e}^{-t}(5t+1) \quad ②$$

联立①、②解得

$$\begin{cases}r_{zi_1}(t)=\mathrm{e}^{-t}(t+1)\\ r_{zi_2}(t)=t\mathrm{e}^{-t}\end{cases}$$

由(3)得系统的全响应为 $r_{zi_1}(t)+r_{zi_2}(t)+r_{zs}(t)=\mathrm{e}^{-t}(t+1)$

所以系统零状态响应为 $r_{zs}(t)=-t\mathrm{e}^{-t}$

故当 $e(t)=\begin{cases}3,t>0\\ 0,t<0\end{cases}$ 时，零状态响应 $r(t)$ 为：

$$r(t)=3r_{zs}(t)=-3t\mathrm{e}^{-t},t>0$$

第2章 连续时间系统的时域分析

重点、难点学习指导

1. 奇异信号

(1)单位冲激函数性质

①$\delta(t)=\delta(-t)$

②$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$

③$f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)$

④$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(t)\delta(t)]=f(0)\delta'(t)$

⑤$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$

(2)单位冲激函数与单位阶跃函数关系

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau=\varepsilon(t)\quad \frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}=\delta(t)$$

(3)单位冲激偶函数

$$\delta'(t)=\begin{cases}\frac{\mathrm{d}\delta(t)}{\mathrm{d}t}, & t=0\\ 0, & t\neq 0\end{cases}$$

单位冲激偶函数性质：

①$\delta'(t)=-\delta'(-t)$

②$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)\,\mathrm{d}t=0$

③$\int_{-\infty}^{t}\delta'(\tau)\mathrm{d}\tau=\delta(t)$

④$f(t)\delta'(t)=f(0)\delta'(t)-f'(0)\delta(t)$

2. 冲激响应和阶跃响应

(1)冲激响应

系统在单位冲激信号$\delta(t)$作用下的零状态响应。求解方法：

①系数平衡法　系统方程两端对应系数相等。

②由单位阶跃响应$\varepsilon(t)$求单位冲激响应$\delta(t)$，即　$\delta(t)=\frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}$

(2)阶跃响应

系统在单位阶跃信号作用下的零状态响应。

3. 卷积积分

(1)定义

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

(2)性质

①交换律：

$$f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$$

②分配律：

$$f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t)$$

③结合律：

$$[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t)=f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]$$

④积分性质：

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{t}[f_1(\tau)*f_2(\tau)]\mathrm{d}\tau&=f_1(t)*\int_{-\infty}^{t}f_2(\tau)\mathrm{d}\tau\\&=f_2(t)*\int_{-\infty}^{t}f_1(\tau)\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

④微分性质：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f_1(t)*f_2(t)]=f_1(t)*\frac{\mathrm{d}f_2(t)}{\mathrm{d}t}=f_2(t)*\frac{\mathrm{d}f_1(t)}{\mathrm{d}t}$$

⑥微分积分性质：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f_1(t)}{\mathrm{d}t}*\int_{-\infty}^{t}f_2(\tau)\mathrm{d}\tau&=\int_{-\infty}^{t}f_1(\tau)\mathrm{d}\tau*\frac{\mathrm{d}f_2(t)}{\mathrm{d}t}\\&=f_1(t)*f_2(t)\end{aligned}$$

⑦任意时间函数 $f(t)$与 $\delta(t)$的卷积：

$$f(t)*\delta(t)=f(t)$$

$$f(t-T_1)*\delta(t-T_2)=f(t-T_1-T_2)$$

$$\delta(t-T_1)*\delta(t-T_2)=\delta(t-T_1-T_2)$$

⑧任意时间函数 $f(t)$与 $\varepsilon(t)$的卷积：

$$f(t)*\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$f(t)*\varepsilon(t-t_0)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau-t_0)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{t-t_0}f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

⑨任意时间函数 $f(t)$与 $\delta'(t)$的卷积：

$$f(t)*\delta'(t)=f'(t)*\delta(t)=f'(t)$$

$$f(t)*\delta^{(n)}(t)=f^{(n)}(t)$$

$$f(t)*\delta^{(n)}(t-t_0)=f^{(n)}(t-t_0)$$

4. 系统全响应的求解

时域分析有经典法和卷积积分法。经典法就是直接求解描述系统输入输出关系的微分方程式的方法。而卷积积分法是利用卷积积分求系统零状态响应的方法。

系统全响应可按三种方式分解：