
Classical
Authoritative
Magical
红魔解题王
Magical Solutions
题型盘点　讲练结合
释疑解难　透视高考
·新·思·路·
·新·技·法·
高考数学
解题技法精讲
国防科技大学出版社

红魔解题王

高考数学解题技法精讲

丛书主编　李宗福　罗卫荣　夏晓燕
丛书编委　王劲松　尹鹏伟　卢昭琼　李作华
　　　　　朱颂秋　刘红辉　刘诏文　刘建政
　　　　　陈天成　邱爱祯　罗晓红　夏正平
　　　　　夏建东　夏哲辉　靳小雨　谌文彪
　　　　　蒋楚辉　喻国良　曾凯芳　谭文森
本册编著　夏建东　吴　迪　宾成杰　封　军

国防科技大学出版社
·长沙·

图书在版编目（CIP）数据

高考数学解题技法精讲/夏建东等编著 .—长沙：国防科技大学出版社，2006.8

（红魔解题王）

ISBN 7－81099－316－X

Ⅰ.高…　Ⅱ.夏…　Ⅲ.数学课—高中—解题—升学参考资料　Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 051021 号

红魔解题王·高考数学解题技法精讲

总 策 划：卢天贶　周艺文

编　　著：夏建东　吴　迪　宾成杰　封　军

责任编辑：卢天贶

责任校对：耿　筠

全案策划：万卷（香港）文化有限公司

湖南艺文出版策划有限公司

电话：（0731）2801361　邮政编码：410005

E－mail：zhouyiwen@vip.163.com

出版发行：国防科技大学出版社

电话：（0731）4572640　邮政编码：410073

http：//www.gfkdcbs.com

经　　销：新华书店

湖南书香万卷文化实业有限公司

电话：（0731）2849636　2849637

印　　装：湖南东方速印科技股份有限公司

电话：（0731）8807850

开　　本：710×960　1/16

印　　张：18

字　　数：400 千字

版　　次：2006 年 8 月第 1 版

印　　次：2006 年 8 月第 1 次印刷

书　　号：ISBN 7－81099－316－X/G·67

定　　价：19.80 元

红魔解题王系列丛书

高考数学解题技法精讲

￥19.80元

高考物理解题技法精讲

￥19.80元

高考化学解题技法精讲

￥19.80元

高考语文解题技法精讲

￥19.80元

高考英语解题技法精讲

￥19.80元

高考生物解题技法精讲

￥19.80元

高考政治解题技法精讲

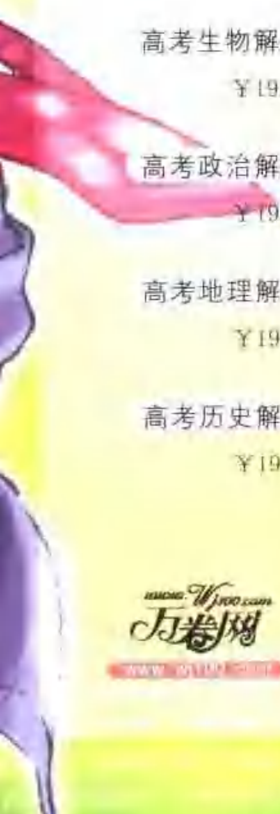
￥19.80元

高考地理解题技法精讲

￥19.80元

高考历史解题技法精讲

￥19.80元



万卷网 www.wj100.com

红魔网 www.redmagical.com

封面设计：李小清

编写说明

长期以来，我们感到：在总复习阶段，学生们迫切需要一套既能夯实基础，以不变应万变，又能在此基础上掌握解题技巧以及提高应试能力的丛书。

为此，我们精心策划了这套《红魔解题王丛书》，就是期望能为学生们提供最为全面、最为系统、最为实用、最为完备的各科解题方法与技巧。丛书以"突出素质教育、激发创新思维、增强实践应用、培养解题技能"为宗旨，按照各学科的体系分章编写，书中既有各科各章的重点、难点、要点归纳梳理，又有针对不同学科的方法点拨、思维开拓。丛书所有方法灵活巧妙，思路清晰流畅，点拨恰到好处。可以说，本丛书是同学们"学好功课的方法宝库，攻克难题的新式武器"。

编者根据多年的教学经验，为本丛书设计了以下栏目：

【解题基础】 对各科系内容分章节进行梳理、归纳，把握重点、突出难点、总结规律，以便于学生们对知识点掌握得透彻、明白。

【解题技法】 对各科知识点常用解题技法作精要概括与剖析，强化方法意识，拓宽解题思路，注重一题多解，使学生们能迅速提高解题能力。

本丛书将各学科的基础知识与解题技法作了有机结合，所涉及知识面广、思维层次深、知识跨度宽，因此编写难度较大，我们热忱希望广大师生朋友不吝批评指正以期再版时完善。

最后，愿本丛书能为您撑起一片知识的蓝天，为您顺利实现梦想，跨入理想的学府助一臂之力。

丛书编写组

2006 年 6 月

目　　录

第1章　高考数学解题技法总论

如何掌握正确的思维方法,寻求解题途径,提高数学解题能力,是当前数学学习中的重要课题,也是在高考中取得高分的重要条件。解数学题的实质是将数学命题(定义、定理、公式等)应用于解决数学问题的一系列推理,直到求出问题所要求的结论为止。无论是解一道题,还是阅读例题,都应集中精力于这一系列推理,力求提高解决问题的能力。

书本上的定理和例题,通常都只写出解法。我们拿到具体题目后应如何着手?怎样寻求它的解法?哪种解法才是最适当、最简便的?所有这些都是在书本上直接找不到的,而这些问题正是学习数学解题方法的关键。

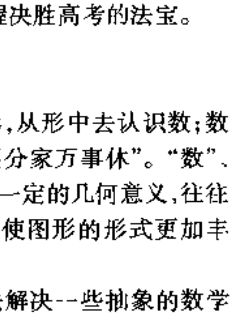
本书将本着"授人以鱼不如授之以渔"的宗旨,配以例题将数学这一学科中常见的思维方法、解题技巧加以详细讲述,让广大考生切实掌握决胜高考的法宝。

思想一:数形结合

数形结合是学习数学的一个重要方法,从数中去认识形,从形中去认识数;数缺形少直观,形少数难入微,正应了"数形结合百般好,隔裂分家万事休"。"数"、"形"是一对矛盾,数量关系的抽象概念和解析式如果被赋予一定的几何意义,往往会变得非常直观、简单;同时又可以通过对数量关系的研究使图形的形式更加丰富、精确、深刻。

纵观多年来的高考试题,巧妙运用数形结合的思想方法解决一些抽象的数学问题,可起到事半功倍的效果,数形结合的重点是研究"以形助数"。

数形结合的思想方法应用广泛,常见的如在解方程和解不等式问题中,在求函数的值域、最值问题中,在求复数和三角函数问题中,运用数形结合思想,不仅直观,易发现解题途径,而且能避免复杂的计算与推理,大大简化了解题过程。这在解选择题、填空题中更显其优越性,要注意培养这种思想意识,要争取胸中有图,见数想图,以开拓自己的思维视野。

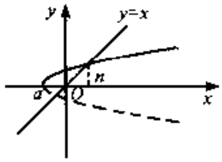


【例1】 解不等式$\sqrt{1+x^2}\leqslant 1+ax(a>0)$.

【解析】 如右图,作:$C:y=\sqrt{1+x^2}$,即$y^2-x^2=1(y>0)$,再作$l:y=ax+1(a>0)$,其图像恒过$(0,1)$点.令$\sqrt{1+x^2}=1+ax$,得:$x=0$或$x=\frac{2a}{1-a^2}(a<1,x>0)$.于是

$0<a<1$时解集为$\left\{x \left| 0\leqslant x\leqslant \frac{2a}{1-a^2}\right.\right\}$;$a\geqslant 1$时解集为$\{x\mid x\geqslant 0\}$.

【例 2】 不等式$\sqrt{x+a}\geqslant x$的解为$m\leqslant x\leqslant n$,$|m-n|=2a$,$a>0$,求a.

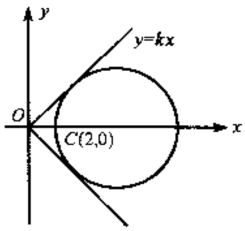


【解析】 如右图,作曲线$C:y=\sqrt{x+a}$,直线$l:y=x$.显然有$m=-a$,由$\begin{cases}y=x,\\ y^2=x+a\end{cases}$求得大根为$x=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$,即$n=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.于是由$|m-n|=2a$,得$\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}+a=2a$,解得$a=2$.

【例 3】 已知实数x,y满足$(x-2)^2+y^2=3$,求$\frac{y}{x}$的最值.

【解法一】 设$\frac{y}{x}=t$,则$y=xt$,将$y=xt$代入方程$(x-2)^2+y^2=3$中整理可得:$(1+t)^2x-4x+1=0$由于$x\in\mathbf{R}$,且$(1+t)^2\neq 0$,故方程$(1+t)^2x-4x+1=0$必有实根.因此$\Delta=(-4)^2-4(1+t^2)\geqslant 0$,解之得$-\sqrt{3}\leqslant t\leqslant\sqrt{3}$,即$\frac{y}{x}$的最大值为$\sqrt{3}$,最小值为$-\sqrt{3}$.

【解法二】 由于方程所表示的曲线为圆,$\frac{y}{x}$的几何意义是指圆上的点与原点所连直线的斜率.显然此斜率的最大值(或最小值)恰为原点向圆所引切线的斜率.设过原点的圆的切线方程为$y=kx$,因为圆心到切线$y=kx$的距离为圆的半径$\sqrt{3}$,故$\frac{|2k-0|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{3}$,解之得$k=\pm\sqrt{3}$,即$\frac{y}{x}$的最大值为$\sqrt{3}$,最小值为$-\sqrt{3}$如图所示.



【例 4】 已知$a,b,c\in\mathbf{R}$,求证$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\sqrt{2}|a+b+c|$.

【解法一】 如果用不等式的证明方法完成本题的证明是非常困难的,仔细观察式子左端的结构,可将根式设计为复数的模,为此设$z_1=a+b\mathbf{i}$,$z_2=b+c\mathbf{i}$,$z_3=c+a\mathbf{i}$.

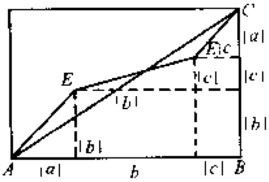
则$z_1+z_2+z_3=(a+b+c)+(a+b+c)\mathbf{i}$,

且$|z_1+z_2+z_3|=\sqrt{2}|a+b+c|$,

显然,左端$|z_1|+|z_2|+|z_3|\geqslant|z_1+z_2+z_3|=\sqrt{2}|a+b+c|$,故原不等式成立.

【解法二】 以$|a|+|b|+|c|$为边作正方形$ABCD$,分别构造三个直角三角形(如图所示)

使$\sqrt{a^2+b^2}=|AE|$，$\sqrt{b^2+c^2}=|EF|$，$\sqrt{c^2+a^2}=|FC|$，显然$|AC|\leqslant|AE|+|EF|+|FC|$，故有$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}=|AE|+|EF|+|CF|\geqslant|AC|$



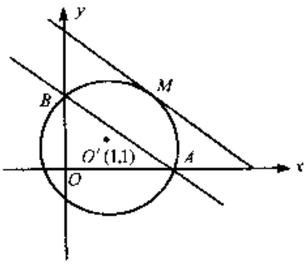
又$|AC|=\sqrt{2}(|a|+|b|+|c|)\geqslant\sqrt{2}|a+b+c|$，因此原不等式成立.

纵观这两种解法，都是利用了数形结合才使问题得以顺利解决.

【例 5】 已知 $\alpha\geqslant1,\beta\geqslant1$，且 $\log_a^2\alpha+\log_a^2\beta=\log_a(a\alpha^2)+\log_a(a\beta^2)(a>1)$，求 $\log_a(\alpha\cdot\beta)$的最值

【解析】 令 $x=\log_a\alpha,y=\log_a\beta$，这时问题转化为$(x-1)^2+(y-1)^2=4,(x>0,y>0)$时，求 $x+y$ 的最值.

设 $x+y=t$，则 $y=-x+t$，从曲线(一段圆弧)图像可知，当直线与圆相切时，纵截距最大，且最大值为 $2+2\sqrt{2}$，当直线过 A、B 两点时，纵截距最小，且最小值为 $1+\sqrt{3}$，即 $\log_a(\alpha\cdot\beta)$的最大值为 $2+2\sqrt{2}$，最小值为 $1+\sqrt{3}$，如图所示.



综上所述，数形结合能使许多问题得到妥善解决，尤其是在解答选择题、填空题时有独到的作用。掌握这种解题技巧，可以激发学习的兴趣，取到事半功倍的效果。

思想二：回归定义

定义是对一种事物的本质特征或一个概念的内涵和外延的确切而简要的说明，数学中的定义亦不例外，在解题过程中，回归定义就是回归问题的本质，往往使解法简单明了。

【例 6】 圆$(x-1)^2+y^2=1$的圆心到直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 的距离是(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. 1　　D. $\sqrt{3}$

【解法一】 圆心 $C(1,0)$到已知直线$\sqrt{3}x-3y=0$的距离

$$d=\frac{|\sqrt{3}\times1-3\times0|}{\sqrt{3+9}}=\frac{1}{2}$$

【解法二】 已知直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 的倾斜角为 30°，联想到在弦心距、半弦长、半径构成的直角三角形中，30°的角所对边为斜边的一半，即 $d=\frac{1}{2}r=\frac{1}{2}$，故选 A.

思想三:分类讨论

分类讨论是一种“化整为零,各个击破”的思想方法,先根据题目要求,确定适当的分类标准,然后对划分的每一类分别求解,如有必要可再加以分类,最后进行综合,从而得出结果。

【例7】 已知二次函数 $f(x)=ax^2+(2a-1)x+1$ 在区间 $\left[-\frac{3}{2},2\right]$ 上的最大值为3,求参数 a 的值.

【解法一】 (1)当 $a>0$ 时,由于二次函数图像开口向上,故最大值只能在区间 $\left[-\frac{3}{2},2\right]$ 的端点处取到.

①若 $f\left(-\frac{3}{2}\right)=3$,则有 $\frac{9}{4}a-\frac{3}{2}(2a-1)+1=3$,解得 $a=-\frac{2}{3}$,与 $a>0$ 矛盾,舍去.

②若 $f(2)=3$,则有 $4a+2(2a-1)+1=3$,解得 $a=\frac{1}{2}$,符合题意.

(2)当 $a<0$ 时,对称轴 $x=-\frac{2a-1}{2a}=-1+\frac{1}{2a}$,由于 $-1+\frac{1}{2a}$ 不可能大于2,因此只能有如下二种情况:

①$-\frac{2a-1}{2a}<-\frac{3}{2}$,即 $-1<a<0$,依题意有

$f(x)_{max}=f\left(-\frac{3}{2}\right)=3\Rightarrow a=-\frac{3}{2}$,符合题意.

②$-\frac{3}{2}\leqslant-\frac{2a-1}{2a}\leqslant 2$,即 $a\leqslant-1$,依题意有

$f(x)_{max}=f\left(-\frac{2a-1}{2a}\right)=\frac{4a\times1-(2a-1)^2}{4a}=3$

解得 $a=-\frac{1}{2}$,与 $a\leqslant-1$ 矛盾,舍去.

综上所述,所求参数 a 的值为 $\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{2}{3}$.

本题的这种解法,是一种常见的解法,既要讨论图像的开口方向又要讨论对称轴 $x=-\frac{2a-1}{2a}$ 与所给区间 $\left[-\frac{3}{2},2\right]$ 的相对位置关系,解法不够简捷明快,现介绍另一种解法,因函数在区间上取得最值时的 x 值必为区间端点坐标或顶点横坐标,从而逐一检验 x 取这些值时对应的参数值是否符合题意。

【解法二】 (1)假设 $f\left(-\frac{3}{2}\right)=3$,解出 $a=-\frac{2}{3}$,此时 $f(x)=-\frac{2}{3}x^2-\frac{7}{3}x+1$,容易求出 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{3}{2},2\right]$ 上的最大值为 $f\left(-\frac{3}{2}\right)=3$,符合题意.

(2)假设 $f(2)=3$，解得 $a=\frac{1}{2}$，此时 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+1$，容易求出 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{3}{2},2\right]$ 上的最大值为 $f(2)=3$，符合题意.

(3)假设 $f\left(-\frac{2a-1}{2a}\right)=3$，那么 $\begin{cases} a<0 & ① \\ -\frac{3}{2}\leqslant-\frac{2a-1}{2a}\leqslant 2 & ② \\ \frac{4a\times 1-(2a-1)^2}{4a}=3 & ③ \end{cases}$

由③解得 $a=-\frac{1}{2}$，满足①但不满足②，所以应舍去.

综上所述，所求参数 a 的值为 $\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{2}{3}$.

【例8】 已知函数 $f(x)=ax^3+3x^2-x+1$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数，求 a 的取值范围.

【解析】 求得函数 $f(x)$ 的导数为 $f'(x)=3ax^2+6x-1$.

(1)当 $f'(x)<0(x\in\mathbf{R})$ 时，$f(x)$ 是减函数，

$\therefore 3ax^2+6x-1<0(x\in\mathbf{R})$.

$\therefore a<0$ 且 $\Delta=36+12a<0$. $\therefore a<-3$.

$\therefore$ 当 $a<-3$ 时，由 $f'(x)<0$，知 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 是减函数；

(2)当 $a=-3$ 时，

$f(x)=-3x^3+3x^2-x+1$

$=-3\left(x-\frac{1}{3}\right)^3+\frac{8}{9}$，

由函数 $y=x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上的单调性，可知

当 $a=-3$ 时，$f(x)(x\in\mathbf{R})$ 是减函数；

(3)当 $a>-3$ 时，在 $\mathbf{R}$ 上存在一个区间，其上有 $f'(x)>0$，

$\therefore$ 当 $a>-3$ 时，函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 不是减函数.

综上，所求 a 的取值范围是 $[-\infty,-3]$.

注意：在运用分类讨论时一定要分析全面.

思想四：转化化归

在研究和解决有关数学问题时，常遇到一些问题直接求解较为困难，需将原问题通过变换使之转化为一个新问题，通过新问题的求解达到解决原问题的目的，这一思想方法我们称之为“转化化归”。

从哲学上来看，转化化归是用运动、变化、联系、发展的观点来看问题；从思想结构上看，首先必须对一些基本原理、基本法则和典型问题的解法及结论形成深刻的认识，当遇到生疏或复杂的问题时，通过寻找该问题与基本问题的关系，通过“化生为熟、化繁为简”解决问题。

转化化归思想方法应遵循以下原则：

(1)熟悉化原则：将陌生的问题转化为熟悉的问题；

(2)简单化原则：将复杂问题转化为简单问题；

(3)和谐化原则：转化问题的条件和结论，使其表现形式更符合数与形内部所表示的和谐统一的形式；

(4)直观化原则：将比较抽象的问题转化为比较直观的问题来解决；

(5)正难则反原则：当问题正面讨论遇到困难时，应想到考虑问题的反面，设法从问题的反面去探求。

【例9】 已知点 $A(0,a)$、$B(0,b)$，且 $b>a>0$，试在 x 轴正半轴上找一点 $M(x,0)$使$\angle AMB$ 最大.

【解析】 $k_{AM}=\frac{-a}{x}, k_{BM}=\frac{-b}{x}$,

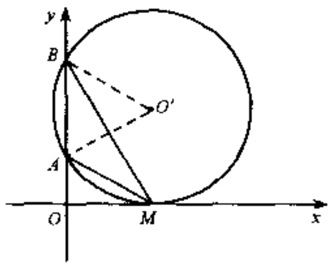
$$\tan\angle AMB=\left|\frac{k_{AM}-k_{BM}}{1+k_{AM}k_{BM}}\right|$$

$$=\left|\frac{\frac{-a}{x}+\frac{b}{x}}{1+\frac{-a}{x}\frac{-b}{x}}\right|$$

$$=\frac{b-a}{x+\frac{ab}{x}}$$

$$\leqslant\frac{b-a}{2\sqrt{\frac{x\cdot ab}{x}}}=\frac{b-a}{2\sqrt{ab}}$$

面上式等号当且仅当 $x=\frac{ab}{x}$，即 $x=\sqrt{ab}$时取得，故 $x=\sqrt{ab}$时，$\tan\angle AMB$ 有最大值，从而$\angle AMB$ 有最大值，故 M 点为$(\sqrt{ab},0)$.



【例10】 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且满足如下两个条件：

(1)对于任意的 $x,y\in\mathbf{R}$，有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$；

(2)当 $x>0$ 时，$f(x)<0$，且 $f(1)=-2$.

求函数 $f(x)$在$[-3,3]$上的最大值和最小值.

【解析】 应化归为函数的单调性问题.

设 $0\leqslant x_1<x_2\leqslant3$，则由条件(1)得：$f(x_2)=[(x_2-x_1)+x_1]=f(x_2-x_1)+f(x_1)$，即 $f(x_2-x_1)=f(x_2)-f(x_1)$.

$\because x_2-x_1>0$，由条件(2)得 $f(x_2-x_1)<0$，

$\therefore f(x_2)-f(x_1)<0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$. 故 $f(x)$在$[0,3]$上是减函数.

又 $f(x)$ 为奇函数，故 $f(x)$ 在 $[-3,0]$ 上也是减函数. 从而 $f(x)$ 在 $[-3,3]$ 上是减函数.

$\therefore f(x)_{\max}=f(-3)=-f(3)=-f(1+2)=-f(1)-f(1+1)=-3f(1)=6$.

$f(x)_{\min}=f(3)=-f(-3)=-6$.

【例 11】 规定每 3 个空瓶可以换 1 瓶汽水. 某单位购买了 2002 瓶汽水，最多可以喝多少瓶汽水？

【解析】 本题常规的解法是先喝 2002 瓶汽水，将空瓶换成 667 瓶汽水，再喝……依此类推. 显然运算量大，稍有不慎就会出错. 如果做一等价变换则易如反掌.

1 瓶汽水由汽水和空瓶组成. 它等价于 3 个空瓶. 从而 1 瓶汽水中的汽水等价于 2 个空瓶. 现第一次喝去 2002 瓶汽水，剩下 2002 个空瓶，又可换成 1001 瓶汽水中的汽水. 所以共喝 3003 瓶.

思想五：函数与方程思想

所谓函数思想，就是指用运动变化的观点去分析具体问题中的数量关系，并将这种数量关系表示成函数的形式，然后加以研究，使问题得到解决的思想；所谓方程思想，就是指在研究有关问题时，先设定一些未知数，再根据题目本身把所给的已知条件，列出等式，通过解方程或方程组使问题获得解决的思想。在解题时，关键是要有这种函数或方程的意识。

数列是特殊的函数，等差数列、等比数列的通项公式，前 n 项和公式都可以看成是 n 的函数，也可以看成是一个方程。因此，某些数列问题常用函数思想或方程思想来分析解决。

【例 12】 已知函数 $f(x)=\sqrt{x^2-a^2}\ (a>0, x\leqslant -a)$，设 $a_1=1$，$a_n=f^{-1}(a_{n-1})(n\geqslant 2)$，求通项 a_n.

【解析】 $\because f(x)=\sqrt{x^2-a^2}\ (a>0, x\leqslant -a)$，

$\therefore f^{-1}(x)=-\sqrt{x^2+a^2}\ (a>0, x\geqslant 0)$.

则 $a_n=f^{-1}(a_{n-1})=-\sqrt{a_{n-1}^2+a^2}$（$a_n<0$，除 a_1 之外）.

两边平方得 $a_n^2-a_{n-1}^2=a^2\ (n\geqslant 2)$.

$\therefore$ 数列 $\{a_n^2\}$ 是首项为 1，公差为 a^2 的等差数列.

即 $a_n^2=1+(n-1)a^2\ (n\geqslant 2)$，故 $a_n=-\sqrt{1+(n-1)a^2}\ (n\geqslant 2)$.

$$\therefore a_n=\begin{cases}1 & (n=1),\\ -\sqrt{1+(n-1)a^2} & (n\geqslant 2).\end{cases}$$

注意： 先求 $f(x)$ 的反函数，找出数列 $\{a_n\}$ 的递推关系，再通过两边平方，转化为等差数列，从而求出 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【例 13】 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和记为 S_n，已知 $a_{10}=30$，$a_{20}=50$.

(1)求通项 a_n；

(2)若 $S_n=242$,求 n.

【解析】 由已知列出 a_1,d 的方程组,求出 a_1,d 即可得 a_n,然后再由前 n 项和公式解方程即可求出 n 的值.

(1)由 $a_n=a_1+(n-1)d,a_{10}=30,a_{20}=50$

得方程组$\begin{cases}a_1+9d=30,\\a_1+19d=50.\end{cases}$解得 $a_1=12,d=2$

所以 $a_n=2n+10$.

(2)由 $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d,S_n=242$,

得方程 $12n+\dfrac{n(n-1)}{2}\times2=242$,

解得 $n=11$ 或 $n=-22$(舍去)

$\therefore n=11$.

【例 14】 已知 $a>0$ 且 $a\neq1$,数列$\{a_n\}$是首项为 a,公比也为 a 的等比数列.令 $b_n=a_n\lg a_n(n\in\mathbf{N}^*)$.若数列$\{b_n\}$中的每一项都小于它后面的项,求 a 的取值范围.

【解析】 因 $a_n=a\cdot a^{n-1}=a^n$,故 $b_n=a_n\lg a_n=na^n\lg a$.

由题意则应有 $b_{k+1}-b_k=a^k[k(a-1)+a]\lg a>0$,得$[k(a-1)+a]\lg a>0$.

(1)当 $0<a<1$ 时,$[k(a-1)+a]<0$,则 $k>\dfrac{a}{1-a}$.

(2)当 $a>1$ 时,$[k(a-1)+a]>0$,则 $k>\dfrac{a}{1-a}$.

由(1)、(2)得 $k>\dfrac{a}{1-a}$对任何自然数k(对应于数列的每一项)都成立.

于是,$\dfrac{a}{1-a}<1$,解得 $0<a<\dfrac{1}{2}$或 $a>1$,即为所求.

【例 15】 某工厂 A 车间现有职工 30 人,平均每人每年可创产值 a 万元(a 为正的常数).为了适应市场经济的发展需要,计划对 A 车间人员进行裁减.据评估,在生产条件不变的情况下,裁减 1 人时,留岗职工平均每人每年创造产值增加 5%;在一定范围内,裁减 $n+1$ 个人比裁减 n 个人时,留岗职工平均每人每年创造产值值增加 5%($n\in\mathbf{N}^*$).为使全年创造的总产值最大,问 A 车间应裁员多少人?

【解析】 设 A 车间应裁员 n 个人,则全年创造的总产值 $y=a(30-n)(1+5\%)^n$.

令 $f(n)=a(30-n)(1+5\%)^n$,则

$\dfrac{f(n+1)}{f(n)}=\dfrac{a(30-n-1)(1+5\%)^{n+1}}{a(30-n)(1+5\%)^n}=\dfrac{29-n}{30-n}(1+5\%)$,