根据浙江省学业考试要求编写

学生用书

ZHONGKAOJIJIN

中考集锦

全程复习训练

数学

丛书主编　潘志新
本册主编　汤旭新

体例结构

- 知识要点 ZHISHIYAODIAN
- 范例解析 FANLIJIEXI
- 能力拓展 NENGLITUOZHAN
- 全真模拟 QUANZHENMONI

浙江少年儿童出版社

根据浙江省学业考试要求编写

学生用书

ZHONGKAOJIJIN

中考集锦

全程复习训练

数学

丛书主编 潘志新

本册主编 汤旭新

副 主 编 王剑华 童桂恒 蒋光清

编　　写 陈晓岚 戴建平 胡　真 傅前晓 王林强 施杰毫 施进军 屠春福 王惠霞 王　琼 王汝法 徐晓静 叶群丽 尹志春 张旭东 赵科跃 丁旭良

浙江少年儿童出版社

图书在版编目(CIP)数据

中考集锦．数学：全程复习训练/潘志新主编．—杭州：浙江少年儿童出版社，2006.10（2007.1 重印）
学生用书
ISBN 978-7-5342-3770-6

Ⅰ．中…　Ⅱ．潘…　Ⅲ．数学课-初中-习题-升学参考资料　Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 130398 号

责任编辑　饶虹飞
封面设计　周　辉

中考集锦·全程复习训练
数学（学生用书）
丛书主编　潘志新

浙江少年儿童出版社出版发行
地址：杭州市天目山路 40 号
网址：www.ses.zjcb.com
富阳美术印刷有限公司印刷
全国各地新华书店经销
开本 850×1168　1/16
印张 15.75
字数 559000
印数 15051　25080
2007 年 1 月第 2 版
2007 年 1 月第 2 次印刷
ISBN 978-7-5342-3770-6
定价：20.00 元

前　言

为了适应课程改革后初中学业考试的最新趋势，帮助广大考生在复习迎考中查漏补缺，真正做到少走弯路，摆脱题海，高效率、高质量地进行考前复习，我们组织了具有丰富教学经验的特、高级教师和资深教研人员，根据《浙江省国家基础教育课程改革试验区初中毕业生学业考试说明》（以下简称《说明》），在研究、分析、总结省内外历年中考的基础上，精心写就本丛书。

本丛书有以下几个特点：

1.师生分版，使用方便　学生用书和教师用书两个版本结构、内容相同。针对复习中的不同要求，教师用书的所有练习题均有详细分析解答。在复习过程中，能使教师更好地指导学生复习，帮助学生养成良好的答题习惯，从容应对系统复习，从容应对学业考试。学生用书中的练习题只提供简解且答案分离式附置。这样可以让学生充分发挥自主性和独立性，在练习过程中自觉发现知识点、基本能力的不足之处，做到有针对性地复习迎考。

2.体例成熟，科学复习　本丛书以课时为单位进行编写，与学生的复习全过程同步进行。从书每章每节（或每讲）严格按照"考点解读"、"考题例析"、"能力训练"、"全真模拟"的体例构建内容。从书编者在钻研新大纲，吃透新课标的基础上，对照《说明》，结合教材进行了逐点逐项的阐释，并针对不同学科的特点进行演绎。（例如在《语文》中，部分章节（或讲）增加了"资料链接"栏目，既新颖又实用；在《数学》中，有意识地进行了新课标与原教材不同要求的比照，使新课标中增加的、加强的或削弱的、不作要求的考点更加明晰。）这样，从"考点"到"考题"，从"训练"到"模拟"，从理论阐述到实际应用，循序渐进，让学生从感知基础知识入手，完成逐级提升，达到能力形成的目的。

3.内容充实，选题精良　本丛书内容涵盖了《说明》中要求掌握的全部内容，紧扣双基，突出重点。选用例题精当，均为当年或近年全国各省、市学业考试中的典型考题，且有分析、解读、拓展。针对考试热点，从不同命题角度选用例题，举一反三，探究相应的规律及演变。设计的能力训练检测题着眼于原创，不仅注重实用、新颖，更重视引导学生参与到解决问题的过程中，具有较高的信度、效度，又有一定的区分度和难度。从书所有练习题思路新，内容全，全面覆盖应试知识点，全面考查各科应试的能力。

全套丛书包括《语文》《数学》《英语》《科学》共四册，于2006年12月修订出版。我们相信，这套丛书一定会成为即将进入高一级学校深造的学生的良师益友，帮助学生在2007年学业考试中取得理想的成绩。

编　者

2006年12月

目 录

第一部分 数与代数式

第二部分 空间与图形

CONTENTS

第三部分　统计与概率

第四部分　专题学习与训练

第五部分　全真模拟试卷

第一部分　数与代数式

第1讲　实数及其运算

知识要点

一、知识梳理

1. 实数的分类.

- 实数
  - 有理数
    - 整数
      - 正整数
      - 零
      - 负整数
    - 分数
      - 正分数
      - 负分数
    - } 有限小数或无限循环小数
  - 无理数
    - 正无理数
    - 负无理数
    - } 无限不循环小数

2. 数轴:规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴.数轴上的点与实数是一一对应关系.

3. 绝对值:在数轴上表示一个数的点与原点的距离叫做这个数的绝对值.$|a|$是一个非负数,即$|a|\geqslant 0$.

$$|a|=\begin{cases}a & (a>0)\\ 0 & (a=0)\\ -a & (a<0)\end{cases}$$

4. 相反数:只有符号不同,而绝对值相同的两个数称为互为相反数.若a、b互为相反数,则$a+b=0$.零的相反数是零.

5. 倒数:1除以一个非零实数的商叫做这个数的倒数.若a、b互为倒数,则$ab=1$.零没有倒数.

6. 近似数与有效数字:一个近似数,四舍五入到哪一位,就说这个近似数精确到哪一位.这时,从左边第一个不是0的数字起,到精确的数位上,所有的数字都叫做这个数的有效数字.

7. 科学记数法:$N=a\times10^n(1\leqslant a<10, n$为整数).

8. 有关平方根、立方根.

(1)一个正数有两个平方根,它们互为相反数;零的平方根是零;负数没有平方根.

(2)一个正数有一个正的立方根;一个负数有一个负的立方根;零的立方根是零.

9. 实数的运算顺序:先算乘方和开方,再算乘除,最后算加减.如果有括号,先算括号里;同一级运算应从左至右,按顺序进行.

10. 比较实数大小的几种常用方法:

(1)数轴比较法:将两实数分别表示在数轴上,右边的数比左边的数大.

(2)差值比较法:设a、b是任意的两实数,则$a-b>0\Leftrightarrow a>b$;$a-b<0\Leftrightarrow a<b$;$a-b=0\Leftrightarrow a=b$.

(3)商值比较法:设a、b是两正实数,则$\frac{a}{b}>1\Leftrightarrow a>b$;$\frac{a}{b}=1\Leftrightarrow a=b$;$\frac{a}{b}<1\Leftrightarrow a<b$.

(4)绝对值比较法:设a、b是两负实数,则$|a|>|b|\Leftrightarrow a<b$;$|a|=|b|\Leftrightarrow a=b$;$|a|<|b|\Leftrightarrow a>b$.

11. 三种重要的非负数.

(1)实数a的绝对值,记作$|a|$.

(2)实数a的偶次方,记作a^{2n}(n为自然数).

(3)实数$a(\geqslant0)$的算数平方根,记作$\sqrt{a}$.

二、课标解读

1. 课程内容加强的方面.

(1)数轴的应用,借助数轴理解相反数、绝对值.

(2)乘方意义的理解.

(3)有理数运算律意义的理解和应用.

(4)新增对含有较大数字的信息作出合理的解释和推断.

(5)新增用计算器求平方根和立方根.

(6)实数和数轴上点的一一对应关系.

(7)用有理数估计一个无理数的大致范围.

2. 课程内容削弱的方面.

(1)求有理数的绝对值时,绝对值符号内不含字母.

(2)有理数的运算以三步为主.

(3)删去了立方根表.

范例解析

【例1】 在天气预报图中,零上5度用5℃表示,那么零下3度应记作________.

【解】 -3℃.

【解析】 本例考查具有相反意义的量和有理数的意义,零上5度记作$+5$℃(正号可以省略),则零下3度记作-3℃.

【例2】 如果a与-2的和为0,那么a是(　　)

A. 2　　B. $\frac{1}{2}$

C. $-\frac{1}{2}$　　D. -2

【解】 A.

【解析】 由于 a 与 -2 的和为 0，即 $a+(-2)=0$，所以 a 与 (-2) 互为相反数，于是 $a=2$.

【例 3】 在 -7，$\tan45°$，$\sin60°$，$\frac{\pi}{3}$，$-\sqrt{9}$，$(-\sqrt{7})^{-2}$ 这六个实数中，有理数有 （ ）

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

【解】 D.

【解析】 ∵ $\tan45°=1$，$\sin60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$-\sqrt{9}=-3$，$(-\sqrt{7})^{-2}=\frac{1}{7}$.

∴有理数有 -7，$\tan45°$，$-\sqrt{9}$，$(-\sqrt{7})^{-2}$，共 4 个.

【例 4】 1 海里等于 1852 米，如果用科学记数法表示，1 海里等于 （ ）

A. 0.1852×10^4 米　　B. 1.852×10^3 米

C. 18.52×10^2 米　　D. 185.2×10^1 米

【解】 B.

【解析】 由科学记数法的表示可知，把 1852 写成 $a\times10^n$ 的形式，其中 $1\leqslant a<10$，n 为整数，即 $1852=1.852\times10^3$.

【例 5】 近似数 0.030 万精确到______位，有____个有效数字，用科学记数法表示，记作______万.

【解】 十，2，3.0×10^{-2}.

【解析】 0.030 万 $=0.030\times10^4=3.0\times10^2$，“3”后面的“0”是十位上的数字，故应填精确到十位，根据有效数字的概念，0.030 万有两个有效数字，即 3、0，写成科学记数法的形式时，要紧紧抓住 a、n 的条件，即 0.030 万 $=3.0\times10^{-2}$ 万.

【例 6】 $-|-2|$ 的倒数是 （ ）

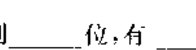
A. 2　　B. $\frac{1}{2}$

C. $-\frac{1}{2}$　　D. -2

【解】 C.

【解析】 $-|-2|=-2$，而 -2 的倒数是 $-\frac{1}{2}$，所以 $-|-2|$ 的倒数是 $-\frac{1}{2}$.

【例 7】 在数轴上表示 a、b 两个有理数的点的位置如图，请化简 $|a-b|-|a+b|$.



【解】 $2b$.

【解析】 根据数形结合的数学思想，可读出图中隐含的信息：$b>0$，$a<0$，且 $|a|>b$.

∴ $a-b<0$，$a+b<0$，

∴原式 $=(b-a)+(a+b)=2b$.

【例 8】 $(-7)^2$ 的平方根是______，$(\sqrt{3}-1.733)^2$ 的算术平方根是______.

【解】 ±7，$1.733-\sqrt{3}$.

【解析】 由平方根定义知 -7 是 $(-7)^2$ 的平方根，同时 $7^2=(-7)^2$，所以 7 也是 $(-7)^2$ 的平方根，即正数 $(-7)^2$ 的平方根有两个，即 7 和 -7；一个正数 $(\sqrt{3}-1.733)^2$ 的算术平方根为正，即为 $1.733-\sqrt{3}$.

【例 9】 (1) $2\times(-5)-9=$________.

(2) $3^{-2}+(-3)^0=$________.

(3) $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\div\left|-\frac{1}{6}\right|+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)^0=$________.

(4) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{2004}\cdot(-3)^{2005}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}-|1.4-\sqrt{2}|=$________.

(5) $\sin60°-\frac{\sqrt{3}}{2}-(-\sqrt{2})^0=$________.

【解】 (1) -19；(2) $\frac{10}{9}$；(3) 2；(4) $1.4-\sqrt{2}$；(5) 1.

【解析】 (1) $2\times(-5)-9=-10-9=-19$，注意运用运算法则确定符号.

(2) $3^{-2}+(-3)^0=\frac{1}{9}+1=\frac{10}{9}$，要正确理解负指数幂和零指数幂的意义.

(3) 原式 $=\frac{1}{6}\div\frac{1}{6}+1=1+1=2$，注意绝对值性质和运算顺序.

(4) 原式 $=\left(-\frac{1}{3}\right)^{2004}\cdot(-3)^{2004}\cdot(-3)+3-(-1.4+\sqrt{2})$

$=-3+3+1.4-\sqrt{2}$

$=1.4-\sqrt{2}$.

注意指数运算法则的逆向运用.

(5) 原式 $=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}+1$

$=1$.

注意特殊角的三角函数值.

【例 10】 当 $0<x<1$ 时，x^2、x、$\frac{1}{x}$ 的大小顺序是 （ ）

A. $\frac{1}{x}<x<x^2$　　B. $\frac{1}{x}<x^2<x$

C. $x^2<x<\frac{1}{x}$　　D. $x<x^2<\frac{1}{x}$

【解】 C.

【解析】 本题可用“差值比较法”来解.

∵当 $0<x<1$ 时，$1-x>0$，$x-1<0$，$x+1>0$，

∴ $x-x^2=x(1-x)>0$，

∴ $x>x^2$.

又 $x-\frac{1}{x}=\frac{x^2-1}{x}=\frac{(x+1)(x-1)}{x}<0$，

$\therefore x<\frac{1}{x}$，$\therefore x^2<x<\frac{1}{x}$.

基础训练

1. 选择题.

(1)已知 $|a|-\sqrt{2}=0$，则 a 的值是　（　）

A. $\pm\sqrt{2}$　　B. $-\sqrt{2}$

C. $\sqrt{2}$　　D. 1.4

(2)下列实数中，无理数是　（　）

A. $-\frac{1}{2}$　　B. 0

C. $\sqrt{3}$　　D. 3.14

(3)数轴上的点表示的数是①正数和负数；②整数和分数；③有理数和无理数；④有限小数和无限小数. 正确的是　（　）

A. ①②③④　　B. ①②

C. ②③　　D. ③④

(4)设 a 是大于 1 的实数，若 a，$\frac{a+2}{3}$，$\frac{2a+1}{3}$ 在数轴上对应的点分别记作 A、B、C，则 A、B、C 三点在数轴上自左至右的顺序是　（　）

A. C、B、A　　B. B、C、A

C. A、B、C　　D. C、A、B

(5)现规定一种新的运算"※"：$a※b=a^b$，如 $3※2=3^2=9$，则 $\frac{1}{2}※3=$　（　）

A. $\frac{1}{8}$　　B. 8

C. $\frac{1}{6}$　　D. $\frac{3}{2}$

2. 填空题.

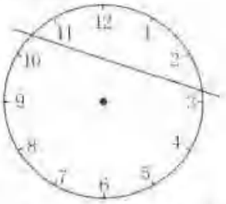
(1)据报道，2006 年全国高考报名总人数约为 9500000 人，用科学记数法表示为________人.

(2)用计算器比较大小：$\sqrt[3]{17}-\sqrt{6}$ ________ 0（填"$>$""$=$"或"$<$"）.

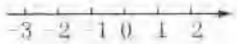
(3)绝对值不大于 4 的非负整数的积是________.

(4)数轴上离原点距离为 3 的数是________.

(5)如图的钟面上标有 1、2、3、…、12 共 12 个数，一条直线把钟面分成了两部分. 请你再用一条直线分割钟面，使钟面被分成三个不同的部分且各部分所包含的几个数的和都相等，则新分割成两部分所包含的几个数分别为________和________.



3. 请你用"・"在数轴上表示出比 1 小 2 的数.



4. 计算.

$2\sin60^\circ-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}+(\sqrt{2}-1)^0$.

5. 用计算器计算.

$\frac{22\times22}{1+2+1}=$________；

$\frac{333\times333}{1+2+3+2+1}=$________；

$\frac{4444\times4444}{1+2+3+4+3+2+1}=$________.

由此，请你写出两个类似的算式.

6. 请在下列 6 个实数中，计算有理数的和与无理数的积的差：4^2，$\frac{1}{\sqrt{3}}$，-2^3，$\frac{\pi}{2}$，$\sqrt{27}$，$(-1)^0$.

7. 用计算器探索：对按一定规律排列的一组数 1、$\sqrt{2}$、$-\sqrt{3}$、2、$\sqrt{5}$、$-\sqrt{6}$、$\sqrt{7}$…如果依次连续选取若干个数，使它们的和大于 5，那么至少要选几个数？

8. 计算机存储容量的基本单位是字节，用 b 表示. 计算机中一般用 kb(千字节)或 Mb(兆字节)或 Gb(吉字节)作为存储容量的计量单位，它们之间的关系为 $1Gb=2^{10}Mb$，$1Mb=2^{10}kb$. 一种新款电脑的硬盘存储容量为 80 Gb，相当于多少 kb(结果用科学记数法表示，并保留三个有效数字)？

能力拓展

9. 选择题.

(1)火车票上的车次号有两种意义. 一是数字越小表示车速越快：1～98 次为特快列车；101～198 次为直快列车；301～398 次为普快列车；401～498 次为普客列车. 二是单、双数表示不同的行驶方向，比如，单数表示从北京开出，则双数表示开往北京. 根据以上规定，杭州开往北京的某一趟直快列车的车次号可能是　(　　)

A. 20　　B. 119

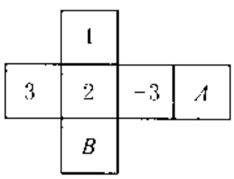
C. 120　　D. 319

(2)算式 $2^2+2^2+2^2+2^2$ 可化为　(　　)

A. 2^4　　B. 8^2

C. 2^8　　D. 2^{16}

(3)如图，是一个立方体的展开图，在其中的四个正方形内标有数字 1，2，3 和 −3. 现将它折回立方体后，若相对面上的两数互为相反数，则 A 处应填　(　　)



A. −1　　B. −2

C. −3　　D. 3

10. 填空题.

(1)小红家粉刷房间，雇用了 5 个工人，干了 10 天完成；用了涂料 150 升，费用 4800 元；粉刷的面积是 150 m^2. 最后结算工钱时，有三种方案：

方案一：按工算，每工 30 元(1 个工人干活 1 天算一工)；

方案二：按涂料费用的 30% 作为工钱；

方案三：按粉刷面积算，每平方米付工钱 12 元.

你觉得小红应选方案_______付工钱最合算.

(2)古希腊数学家把 1、3、6、10、15、21…叫做三角形数，它有一定的规律性，则第 24 个三角形数和第 22 个三角形数的差为________.

(3)如果 a、b、c 为互不相等的实数，且满足关系式 $b^2+c^2=2a^2+16a+14$ 与 $bc=a^2-4a-5$，那么 a 的取值范围是_______.

11. 小王上星期五买进公司股票 1000 股，每股 27 元，下表为本周内每日该股票的涨跌情况(单位：元).

星　期	一	二	三	四	五	
每股涨跌	+4	+4.5	−1	−2.5	−2	

(1)星期三收盘时，每股是多少元？

(2)本周内每股最高价是多少元？最低价呢？

(3)已知小王买进股票时付了 1.5‰的手续费，卖出时还需付成交额 1.5‰的手续费和 1‰ 的交易税. 如果小王在星期五收盘前将股票全部卖出，它的收益情况如何？

12. 已知某个正数的平方根分别为 $(2x-3)$ 和 $(x-3)$，而数 a 在数轴上对应点的位置在数 x 与 -1 之间，请化简式子：$|a-2|+\sqrt{(a+5)^2}$.

第2讲　整式及其运算

知识要点

一、知识梳理

1. 整式的概念.

(1)单项式：数与字母或字母与字母乘积的代数式.单独一个数或一个字母也叫单项式，单项式中的数字因数叫单项式的系数，单项式中所有字母的指数的和叫单项式的次数.

(2)多项式：几个单项式的和.其中每个单项式叫做多项式的项，次数最高项的次数叫做多次式的次数.

(3)整式：单项式和多项式的统称.

2. 同类项、合并同类项.

(1)同类项：所含字母相同，并且相同字母的次数也相同的项.特殊地，所有常数项也叫同类项.

(2)合并同类项：把多项式中的同类项合并成一项.合并同类项的一般法则：把同类项的系数相加所得的结果作为合并后的系数，项中的字母以及字母的指数不变.

3. 整式的四则运算.

(1)整式的加减运算本质上是合并同类项，遇到括号要先去括号.

(2)整式的乘除，就是正确地运用幂的运算法则及乘法公式.

①幂的运算法则：

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$(m、n均为整数，$a \neq 0$)；

$(a^m)^n = a^{mn}$(m、n均为整数，$a \neq 0$)；

$(ab)^m = a^m b^m$(m为整数，$a \neq 0, b \neq 0$)；

$a^m \div a^n = a^{m-n}$(m、n均为整数，$a \neq 0$).

②整式的乘法：单项式与单项式相乘，把系数、同底数幂分别相乘作为积的因式，只有一个单项式里含有的字母，则连同它的指数作为积的一个因式.

单项式乘以多项式：$m(a+b) = ma + mb$.

多项式乘以多项式：$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$.

③乘法公式：

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$；

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$；

$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$.

④整式的除法：单项式与单项式相除，把系数、同底数幂分别相除，作为商的因式，对于只在被除式里含有的字母，则连同它的指数作为商的一个因式.

多项式除以单项式，把这个多项式的每一项除以这个单项式，然后把所得的商相加.

⑤零指数和负整数指数.

规定：$a^0 = 1$，$a^{-p} = \dfrac{1}{a^p}$($a \neq 0$，p为正整数).

(3)整式运算顺序：先乘方，再乘除，最后是加减.

二、课标解读

1. 课程内容加强的方面.

对公式几何背景的了解和公式的推导.

2. 课程内容削弱的方面.

(1)整数指数幂的性质只要求了解.

(2)多项式相乘仅限于一次式相乘.

(3)乘法公式只限于平方差公式和完全平方公式.

(4)降低了整式除法的要求.

范例精析

【例1】　在代数式$\frac{1}{2}x^2y$，$-\frac{1}{3}a^3$，$\frac{5}{x}$，0，$5a^2-\frac{1}{4}b^2$，$\frac{1}{m}(a-b)$，$\frac{y-1}{2}$，z^2-6z+9中，哪些是整式？

【解】　在以上代数式中，$\frac{1}{2}x^2y$，$-\frac{1}{3}a^3$，0，$5a^2-\frac{1}{4}b^2$，$\frac{y-1}{2}$，z^2-6z+9是整式.

【解析】　整式是由单项式和多项式组成，分母中含有字母的不是整式.由此可判断：$\frac{1}{2}x^2y$，$-\frac{1}{3}a^3$，0是单项式，$5a^2-\frac{1}{4}b^2$，$\frac{y-1}{2}$和z^2-6z+9是多项式.它们都是整式.

【例2】　写出一个只含有字母x的三次四项式，使它的三次项系数为1，一次项系数为-2，常数项是$\frac{1}{4}$，并将它按x的升幂排列.

【解】　符合要求的结果可以是：$\frac{1}{4}-2x+2x^2+x^3$，$\frac{1}{4}-2x-\frac{1}{3}x^2+x^3$，$\frac{1}{4}-2x+8x^2+x^3$等.

【解析】　本例是关于整式概念的一个开放性题.由题意，这个多项式可以是$x^3+ax^2-2x+\frac{1}{4}$(其中a为非零实数)，比如：$x^3+2x^2-2x+\frac{1}{4}$，$x^3-\frac{1}{3}x^2-2x+\frac{1}{4}$，$x^3+8x^2-2x+\frac{1}{4}$等等.将这个多项式按字母$x$的升幂排列是指：运用交换律重新排列，使字母$x$的指

数由低到高排列，但要注意：移动某一项时，必须连同这个项的符号一起移动.

【例 3】 已知代数式$\frac{1}{2}x^{a-1}y^{3}$与$-3x^{-b}y^{2a+b}$是同类项，那么a、b的值分别是　　（　　）

A. $\begin{cases}a=2,\\b=-1\end{cases}$　　B. $\begin{cases}a=2,\\b=1\end{cases}$

C. $\begin{cases}a=-2,\\b=-1\end{cases}$　　D. $\begin{cases}a=-2,\\b=1\end{cases}$

【解】 A.

【解析】 本题主要考查的是同类项的概念和解二元一次方程组的情况.

由同类项的定义知，当且仅当$a-1=-b$且$2a+b=3$同时满足时，$\frac{1}{2}x^{a-1}y^{3}$与$-3x^{-b}y^{2a+b}$才是同类项，解方程组$\begin{cases}a-1=-b,\\2a+b=3,\end{cases}$可得$\begin{cases}a=2,\\b=-1.\end{cases}$

【例 4】 合并同类项.

(1)$x^3y-xy^3+\frac{1}{4}x^2y^2-x^3y+2xy^3+\frac{1}{3}y^3x$.

(2)$3(a+b)^2-a-b+2(a+b)^2-(a+b)^3+4a+4b-2(a+b)^3$.

【解】

(1)原式$=x^3y-xy^3+\frac{1}{4}x^2y^2-x^3y+2xy^3+\frac{1}{3}xy^3$

$=(1-1)x^3y+\left(2+\frac{1}{3}-1\right)xy^3+\frac{1}{4}x^2y^2$

$=\frac{4}{3}xy^3+\frac{1}{4}x^2y^2$.

(2)原式$=3(a+b)^2-(a+b)+2(a+b)^2-(a+b)^3+4(a+b)-2(a+b)^3$

$=(3+2)(a+b)^2+(4-1)(a+b)+(-1-2)(a+b)^3$

$=5(a+b)^2+3(a+b)-3(a+b)^3$.

【解析】 (1)将同类项分别用“______”“～～～～”等区分后再合并，可避免错误. 当两个同类项的系数互为相反数时，合并后将互相抵消.

(2)整式运算中常遇到的添括号法则：若括号前是“+”号，则括号里的各项都不变号；若括号前是“-”号，应注意括号内的各项都要改变符号.

(3)若注意到原式中$-a-b=-(a+b)$，$4a+4b=4(a+b)$，则应把整式$(a+b)$整体地看作一个“因式”去合并，可以减少计算量.

【例 5】 先化简，再求值：$(3x+2)(3x-2)-5x(x-1)-(2x-1)^2$，其中$x=-\frac{1}{3}$.

【解】 原式$=(9x^2-4)-(5x^2-5x)-(4x^2-4x+1)$

$=9x^2-4-5x^2+5x-4x^2+4x-1$

$=9x-5$.

当$x=-\frac{1}{3}$时，

原式$=9x-5=9\times\left(-\frac{1}{3}\right)-5$

$=-3-5=-8$.

【解析】 (1)本题用到了乘法公式、去括号法则、合并同类项、代入求值等知识和技能.

(2)去括号的法则：若括号前是“+”号，只要把括号和它前面的“+”号去掉即可；若括号前是“-”号，把括号和它前面的“-”号去掉的同时，括号里的各项都要改变符号.

【例 6】 已知当$x=-2$时，代数式ax^3+bx+1的值为6，那么当$x=2$时，求代数式ax^3+bx+1的值.

【解法一】 令$m=ax^3+bx+1$，则

当$x=2$时，$8a+2b+1=m$　(1)

当$x=-2$时，$-8a-2b+1=6$　(2)

由(1)+(2)得$2=m+6$，

$\therefore m=-4$.

即$ax^3+bx+1=-4$.

【解法二】 由已知当$x=-2$时，$ax^3+bx+1=6$，

得$a(-2)^3+b(-2)+1=6$.

$\therefore -8a-2b=5$，即$2^3a+2b=-5$，

$\therefore 2^3a+2b+1=-4$，

$\therefore$当$x=2$时，$ax^3+bx+1=-4$.

【解析】 此题利用当$x=\pm2$时，ax^3+bx的值互为相反数，利用“整体思想”求出代数式的值，这是解决此类问题的常用方法. 求代数式的值的常用方法还有：直接代入法、先化简再求值法等.

【例 7】 计算下列各式.

(1)$\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)^3$.

(2)$(a^3)^2\div a^5$.

(3)$(-a^{n+1})^2\cdot(a^{2n+1})^3$.

(4)$(x+y-z)(x-y+z)-(x+y+z)(x-y-z)$.

【解】 (1)原式$=\left(-\frac{1}{2}\right)^3\cdot(a^2)^3\cdot b^3$

$=-\frac{1}{8}a^6\cdot b^3$.

(2)原式$=a^6\div a^5=a^{6-5}=a$.

(3)原式$=(a^{n+1})^2\cdot(a^{2n+1})^3=a^{2n+2}\cdot a^{6n+3}$

$=a^{2n+2+6n+3}=a^{8n+5}$.

(4)原式$=[x+(y-z)][x-(y-z)]-[x+(y+z)][x-(y+z)]$

$=[x^2-(y-z)^2]-[x^2-(y+z)^2]$

$=x^2-(y-z)^2-x^2+(y+z)^2$

$=(y+z)^2-(y-z)^2$

$=(y+z+y-z)[(y+z)-(y-z)]$

$=2y\cdot(y+z-y+z)$

$=2y\cdot 2z=4yz.$

【解析】 整式的乘法，特别是多项式相乘时，首先应仔细观察算式，判断题目的组成结构特征是否有可能运用乘法公式，只有根据题目的特点，灵活运用幂的法则及乘法公式，才能简化计算.

【例 8】 已知多项式 $3x^2+2mx-m^2$ 能被 $x-1$ 整除，求 m 的值.

【解】 ∵$(x-1)$ 能整除 $3x^2+2mx-m^2$，则 $(x-1)$ 一定是 $3x^2+2mx-m^2$ 的一个因式.

∴当 $x=1$ 时，代数式 $3x^2+2mx-m^2=0$，

即 $m^2-2m-3=0$，

∴$m=-1$ 或 $m=3$.

∴当 $m=-1$ 或 $m=3$ 时，$x-1$ 整除 $3x^2+2mx-m^2$.

【解析】 本题主要要理解整除的意义，多项式 $3x^2+2mx-m^2$ 能被 $(x-1)$ 整除，则 $(x-1)$ 必定是 $3x^2+2mx-m^2$ 的一个因式，即 $3x^2+2mx-m^2=A\cdot(x-1)$（其中 A 为某一整式），所以当 $x=1$ 时，代数式 $3x^2+2mx-m^2$ 的值为 0.

【例 9】 已知 $a-b=b-c=\frac{3}{5}$，$a^2+b^2+c^2=1$，求 $ab+bc+ca$ 的值.

【解】 $a-b=b-c=\frac{3}{5}$，即 $a-b=\frac{3}{5}$　(1)

$b-c=\frac{3}{5}$　(2)

由(1)+(2)得 $a-c=\frac{6}{5}$.

∵$(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2$

$=a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+a^2-2ac+c^2$

$=2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)$，

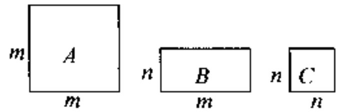
∴$\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{6}{5}\right)^2$

$=2\times1-2(ab+bc+ca)$.

∴$ab+bc+ca=-\frac{2}{25}$.

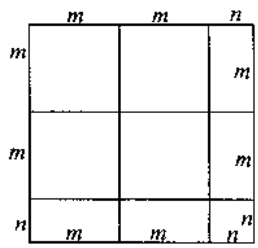
【解析】 本题要求学生有较强的综合运用知识的能力及代数式的恒等变形的能力，一些平时训练中常遇到的恒等变形要求理解并适当记忆.

【例 10】 三种不同类型的矩形地砖长宽如图所示，若现有 A 类 4 块、B 类 4 块，C 类 2 块，要拼成一个正方形，则应多余出一块______型地砖；这样的地砖拼法表示了一个两数和的平方的几何意义，这两数和的平方是______.



【解】 C；$(2m+n)^2=4m^2+4mn+n^2$（答 $(2m+n)^2$ 或 $4m^2+4mn+n^2$ 均可）.

【解析】 (1)4 块 A 类地砖的面积为 $4m^2$，4 块 B 类地砖的面积为 $4mn$，2 块 C 类地砖的面积为 $2n^2$，而要拼成一个正方形，则面积之和应该为一个完全平方式，又要求去掉一块，则只能多余出一块 C 型的，此时的面积之和为 $4m^2+4mn+n^2=(2m+n)^2$，即拼成的正方形的边长为 $2m+n$. 本题利用代数的计算法和几何的面积法相结合，要求学生理解和掌握乘法公式——完全平方公式，了解它的几何背景，而了解乘法公式的几何背景，这正是新课标所要求的.



(2)拼法可如图所示：

1. 选择题.

(1)有下列计算：

①$a^2+a^2=2a^4$；

②$(-x)^2\cdot(-x^3)=-x^5$；

③$a\div b\times\frac{1}{b}=a$；

④$(-a-1)(a-1)=1-a^2$.

其中正确的个数是　(　　)

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

(2)下列各式中，计算正确的是　(　　)

A. $a^2-b^2+2bc+c^2=a^2-(b-c)^2$

B. $5x-\left[6y-\left(\frac{1}{3}-z\right)\right]=5x-6y+z+\frac{1}{3}$

C. $-\{-[-(-a)]\}=-a$

D. $(x-y+z)(x-z+y)=[x-(y-z)][x+(-z+y)]$

(3)若 x、y 为实数，且 $(|x|-1)^2+(2y-1)^2=0$，则 $x-y$ 的值为　(　　)

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{3}{2}$

C. $\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{3}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

(4)计算 $3\times(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$ 的结果为　(　　)

A. 4^8-1　　B. $2^{64}-1$

C. $2^{16}-1$　　D. 2^8-1

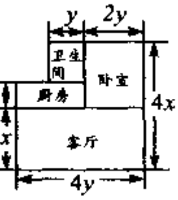
2. 填空题.

(1)若两个单项式 $\frac{1}{4}a^{2}b^{2m-1}$ 与 $\frac{1}{3}a^{2n}b^{3}$ 的和仍是单项式.则 $6mn=$______.

(2)在如图的日历中,任意圈出一竖列上相邻的三个数,设中间的一个数为 a,则这三个数之和为______(用含 a 的代数式表示).

日	一	二	三	四	五	六
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

(3)如图,是某住宅的平面结构示意图,图中标注了有关尺寸(墙体厚度忽略不计,单位:米).房的主人计划把卧室以外的地面都铺上地砖,如果他选用地砖的价格是 a 元/米^2.则买地砖至少需用______元(用含 a、x、y 的代数式表示).



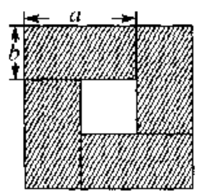
(4)有一大捆粗细均匀的电线,现要确定其长度的值.从中先取出 1 米长的电线,称出它的质量为 a,再称其余电线的总质量为 b.则这捆电线的总长度是______米.

3. 若 $-\frac{1}{2}x^{2}y^{3m-2}$ 是个 6 次单项式,求 m 的值.

4. 已知多项式 $2x^{4}-(m+2)x^{n}y-xy+\frac{1}{4}$,求使此多项式为(1)五次四项式,(2)四次三项式时,m、n 应分别满足的条件.

5. 若 $x^{2}+3x=3$,求代数式 $x^{3}+3x^{2}+3-3x$ 的值.

6. 长、宽分别为 a、b 的矩形硬纸片拼成一个"带孔"正方形,如下图所示,利用面积的不同表示方法,写出一个代数恒等式.



7. 若 $a^{2}+b^{2}=5$,$ab=2$,求 $a+b$ 和 $a-b$ 的值.

8. 某商场 4 月份的营业额为 x 万元,5 月份的营业额比 4 月份多 10 万元.如果第二季度的营业额为 $4x$ 万元,求 6 月份的营业额.这个代数式的实际意义是什么?

能力拾要

9. 选择题.

(1)学校买来钢笔若干支,可以平均分给$(x-1)$名同学,也可以平均分给$(x-2)$名同学(x为正整数).用代数式表示钢笔的数量不可能的是　　(　　)

A. $3(x-1)(x-2)$　　B. x^2+3x+2

C. x^2-3x+2　　D. x^3-3x^2+2x

(2)从边长为a的正方形内去掉一个边长为b的小正方形(如图①所示),然后将剩余部分剪拼成一个矩形(如图②所示).上述操作所能验证的等式是　　(　　)

A. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

B. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

C. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

D. $a^2+ab=a(a+b)$

(3)已知实数a、b、c满足$a^2+b^2=1$,$b^2+c^2=2$,$c^2+a^2=2$,则$ab+bc+ca$的最小值为　　(　　)

A. $\frac{5}{2}$　　B. $\frac{1}{2}+\sqrt{3}$

C. $-\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{2}-\sqrt{3}$

10. 已知$(x^2+ax+3)(x^2-3x+b)$的展开式中不含关于x的二次项和三次项,求代数式$b-3a$的值.

11. 若$x=5$时,代数式$ax^7+bx^5+cx^3+4$的值是7,求当$x=-5$时,代数式$ax^7+bx^5+cx^3+4$的值.

12. 在计算多项式ax^3+bx^2+cx+d的值时,可采用以下的三种计算方法,此时分别统计三种算法中乘法的次数如下:

①直接计算时,共用乘法$3+2+1=6$(次);

②利用幂运算$x^3=x^2\cdot x$的结果去计算,共用乘法$2+2+1=5$(次);

③逐项迭代计算,比如:

原式$=[(ax+b)x+c]x+d$,这样共用3次乘法.

请问:(1)分别使用以上三种算法,统计一下算式$a_0x^{10}+a_1x^9+a_2x^8+\cdots+a_9x+a_{10}$中乘法的次数,并比较三种算法的优劣;

(2)对n次多项式$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$($a_0$、$a_1$、$a_2$、…、$a_n$为系数,$n>1$),分别用以上三种算法,统计其中乘法的次数,并比较三种算法的优劣.

13. 设$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=(x-2)^4$.

求代数式的值:(1)$a+b+c+d+e$;　(2)$a+c$.

第3讲 因式分解

一、知识梳理

1. 因式分解的概念.

因式分解:把一个多项式化成几个整式的积的形式.

整式的因式分解与整式的乘法是互逆的代数式变形.比如:$(m+n)(m-n)\underset{\text{因式分解}}{\overset{\text{整式乘法}}{\rightleftharpoons}}m^2-n^2$

2. 因式分解的常用方法:

(1)提取公因式法:把一个多项式的各项含有的公因式,提取作为多项式的一个因式.例如:$ma+mb+mc=m(a+b+c)$.其中,确定公因式的方法有:

系数——取多项式各项系数的最大公约数;

字母(或多项式的因式)——取各项均含有的字母(或多项式的因式)中的最低次幂.

(2)公式法:运用乘法公式把多项式因式分解的方法.

常用公式:

①平方差公式:$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

②完全平方公式:$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$

3. 因式分解的一般步骤.

(1)先看各项有没有公因式,若有公因式,可先提取公因式.

(2)再考虑能否运用乘法公式:若待分解式是个二项式,则可考虑用平方差公式分解;若是个三项式,则考虑可否用完全平方公式分解;若待分解式多于三项时,一般应先适当地将它们分组,然后分解因式.

(3)最后检查每一个因式是否能继续分解,直到每一个因式都不能再分解为止.

(4)分解因式时,要注意题目所给的范围.题目不作说明的,一般表示在实数范围内因式分解.

二、课标解读

1. 课程内容加强的方面.

没有.

2. 课程内容削弱的方面.

(1)没有十字相乘法和分组分解法、拆项、添项不作要求.

(2)直接用公式不超过两次,指数仅限于正整数.

【例1】 把代数式 xy^2-9x 分解因式,结果正确的是 ( )

A. $x(y^2-9)$　　B. $x(y+3)^2$

C. $x(y+3)(y-3)$　　D. $x(y+9)(y-9)$

【解】 原式$=x(y^2-9)=x(y+3)(y-3)$,故选C.

【解析】 A答案还可以继续分解.因式分解要分解到每一个因式都不能再分解为止;B答案混淆了平方差公式和完全平方公式;D答案用错了平方差公式.

【例2】 (1)分解因式:$x^2-4=$______.

(2)分解因式:$a^2-6a+9=$______.

(3)分解因式:$2x^2+4x+2=$______.

(4)分解因式:$a^3-a=$______.

【解】 (1)$x^2-4=x^2-2^2=(x+2)(x-2)$.

(2)$a^2-6a+9=a^2-2\times 3a+3^2=(a-3)^2$.

(3)$2x^2+4x+2=2(x^2+2x+1)=2(x+1)^2$.

(4)$a^3-a=a(a^2-1)=a(a+1)(a-1)$.

【解析】 (1)两项差可考虑平方差公式,而 a^2+b^2 之类是不能分解的.

(2)运用完全平方公式要注意一次项是否具备两数积的两倍.

(3)提取数字公因式后能用完全平方公式.

(4)提取字母公因式后能用平方差公式.

【例3】 分解下列各式的因式.

(1)$a^3+ab^2-2a^2b$.

(2)$32a^5b-2ab$.

(3)$(x^2-9y^2)+(2x-6y)$.

(4)$(a^2-2ab+b^2)-c^2$.

【解】 (1)$a^3+ab^2-2a^2b=a(a^2+b^2-2ab)=a(a^2-2ab+b^2)=a(a-b)^2$.

(2)$32a^5b-2ab=2ab(16a^4-1)=2ab(4a^2+1)(4a^2-1)=2ab(4a^2+1)(2a+1)(2a-1)$.

(3)$(x^2-9y^2)+(2x-6y)=(x+3y)(x-3y)+2\cdot(x-3y)=(x-3y)(x+3y+2)$.

(4)$(a^2-2ab+b^2)-c^2=(a-b)^2-c^2=(a-b+c)\cdot(a-b-c)$.

【解析】 (1)提取公因式后能用完全平方公式.

(2)提取公因式后能用平方差公式,特别注意应该分解彻底.

(3)两组中一组能用平方差公式,另一组能提取公因式,而分别分解后,又出现了公因式,使得分解能够继续,最终完成.

(4)两组中一组能用完全平方公式,而这组分解后,又能与另一组一起考虑用平方差公式,使得分解能

够完成.

【例 4】 当 $a=3$，$a-b=1$ 时，代数式 a^2-ab 的值是______.

【解法一】 由题意可得 $\begin{cases}a=3,\\a-b=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=3,\\b=2.\end{cases}$

$\therefore a^2-ab=3^2-3\times2=9-6=3.$

【解法二】 $a^2-ab=a(a-b)=3\times1=3.$

【解析】 此题本身比较简单，可用两种解法，看起来这两种解法都比较简单，但解法一的步骤较多，解法二利用了因式分解后直接代入就可求得代数式的值，显然解法二比较好.

【例 5】 (1)已知 a、b、c 为△ABC 的三边，且满足 $a^2c^2-b^2c^2=a^4-b^4$，试判定△ABC 的形状.

(2)已知△ABC 的三条边长分别为 a、b、c，且 $a=m^2-n^2$，$b=2mn$，$c=m^2+n^2$($m>n$，m、n 是正整数)，△ABC 是直角三角形吗？请说明理由.

【解】 (1)$\because a^2c^2-b^2c^2=a^4-b^4$，

$\therefore a^4-b^4-a^2c^2+b^2c^2=0$，

$\therefore (a^2+b^2)(a^2-b^2)-c^2(a^2-b^2)=0$，

即 $(a+b)(a-b)(a^2+b^2-c^2)=0$，

$\therefore a-b=0$ 或 $a^2+b^2-c^2=0$，

即 $a=b$ 或 $a^2+b^2=c^2$.

$\therefore$△ABC 是等腰三角形或直角三角形.

(2)$\because a=m^2-n^2$，$b=2mn$，$c=m^2+n^2$($m>n$，m、n 是正整数)，

$\therefore a^2+b^2=(m^2-n^2)^2+(2mn)^2$

$=m^4-2m^2n^2+n^4+4m^2n^2$

$=m^4+2m^2n^2+n^4=(m^2+n^2)^2=c^2$.

$\therefore$△ABC 是直角三角形.

【解析】 (1)由 $a=b$ 或 $a^2+b^2=c^2$ 不能得到等腰直角三角形，由 $a=b$ 得到等腰三角形，由 $a^2+b^2=c^2$ 得到直角三角形，要注意区分"$a=b$ 或 $a^2+b^2=c^2$"与"$a=b$ 且 $a^2+b^2=c^2$"的区别. 另外本题还应注意不要发生以下错误：

$\because a^2c^2-b^2c^2=a^4-b^4$，

$\therefore c^2(a^2-b^2)=(a^2+b^2)(a^2-b^2)$，

$\therefore c^2=a^2+b^2$，

$\therefore$△ABC 是直角三角形.

(2)能满足 $a^2+b^2=c^2$ 的三个正整数叫做一组勾股数，本例实际上给出了构造勾股数的方法：任意取一对正整数 m、n($m>n$)，代入 $a=m^2-n^2$，$b=2mn$，$c=m^2+n^2$，就能获得一组勾股数，例如，取 $m=2$，$n=1$，就得勾股数 3、4、5；取 $m=4$，$n=1$，就得到勾股数 15、8、17，如此构造可以得到无数组勾股数.

【例 6】 三个男子 A、B、C 和三位妇女 a、b、c 一起去超市购物，他们是三对夫妇. 已知每人花在买商品的钱数(单位：元)恰好等于商品数量的平方，而且每位丈夫都比妻子多花 48 元钱；又知 A 比 b 多买 9 件商品，B 比 a 多买 7 件商品. 请问：究竟谁与谁是夫妻？

【解】 设一对夫妻中，丈夫和妻子分别买了 x、y 件商品，则由题意得 $x^2-y^2=48$，即 $(x+y)(x-y)=48$. 注意到 x、y 均为正整数且 $x+y$ 与 $x-y$ 的奇偶性相同，又 $x+y>x-y$，$48=24\times2=12\times4=8\times6$，

$\therefore \begin{cases}x+y=24,\\x-y=2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+y=12,\\x-y=4,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+y=8,\\x-y=6.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=13,\\y=11,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=8,\\y=4,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=7,\\y=1.\end{cases}$

$\because$ 符合 $x-y=9$ 的只有一种情况，

即 $x=13$，$y=4$.

$\therefore A$ 买了 13 件商品，b 买了 1 件商品；

这样符合 $x-y=7$ 的也只有一种情况，

即 $x=8$，$y=1$.

$\therefore B$ 买了 8 件商品，a 买了 1 件商品；

由此可知，C 买了 7 件商品，c 买了 11 件商品.

$\therefore$ 三对夫妻分别是 A 与 c，B 与 b，C 与 a.

【解析】 本题粗粗一看，似乎无从下手. 但认真审题分析后，可以发现利用因式分解、整数的奇偶性等找到解题的突破口，从而使问题得到顺利解决. 本题的解答也给我们一个启示：有些看似无从下手的问题，要敢于认真审题，敢于动手下笔，勤于尝试方法，难关总可得以突破.

考点精练

1. 若 $x-y=3$，则 $2x-2y=$______.
2. 把下列各式分解因式.

(1)$2x^2-18$.

(2)a^3-2a^2+a.

(3)$3x^3+2x^2+x$.

(4)$a-a^5$.

3. 一次课堂练习，小敏同学做了如下 4 道因式分解题，你认为小敏做得不够完整的一题是　　(　　)

A. $x^3-x=x(x^2-1)$

B. $x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$

C. $x^2y-xy^2=xy(x-y)$

D. $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$