精品课堂

姜乃斌 代万基◎编著

高等数学习题全解全析

（配同济高等数学第五版） 下册

大连理工大学出版社
Dalian University of Technology Press

高等数学学习辅导教材

高等数学习题全解全析

·精 品 课 堂·

（下册）

（配同济高等数学第五版）

姜乃斌　代万基　编著

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题全解全析·精品课堂(下册) / 姜乃斌,代万基编著 .
大连:大连理工大学出版社，2003.8(2004.3 重印)
ISBN 7-5611-2334-5

Ⅰ.高… Ⅱ.①姜… ②代… Ⅲ.高等数学—高等学校—解题
Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 044652 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市凌水河 邮政编码:116024
电话:0411-4708842 传真:0411-4701466 邮购:0411-4707961
E-mail:dutp@mail.dlptt.ln.cn URL:http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:140mm×203mm 印张:12.25 字数:386 千字
印数:10 001 ~ 20 000
2003 年 8 月第 1 版 2004 年 3 月第 2 次印刷

责任编辑:吴孝东 责任校对:侯 洁
封面设计:孙宝福

定 价:25.60 元(本册 12.80 元)

卷首赠言

·应用更便利·基础更扎实·学习更容易·

妙算还从拙中来，
愚公智叟两分开。
积久方显愚公智，
发白才知智叟呆。

埋头苦干是第一，
熟练生出百巧来。
勤能补拙是良训，
一分辛苦一分才。

——华罗庚

编者的话

·应用更便利·基础更扎实·学习更容易·

近年来，高等数学方面的学习辅导书种类逐渐增多，学生们每人手中持有一种乃至数种。这其中不乏精品之作，但多数又不尽如人意。作为从教多年的教师，看到学生们渴望知识的热情，以及应试的压力，强烈的责任感驱使我们有一种将多年教学经验述于纸面的冲动，同样的责任感又使得我们迟迟没有动笔，生怕在已有的热闹非凡的出版市场上平添平庸之作，浪费时间，浪费纸张，浪费资源。

大连理工大学出版社提出要组织编写一套《高等数学习题全解全析·精品课堂》，编辑们对图书清晰的思路与准确的定位，与我们的想法一拍即合，立即触发了我们的编写欲望。我们多次征求本科生、专科生，乃至研究生的意见，更加坚定了我们写好本书的信心，进一步明确了本书的定位，这就是——像

习题课一样，与学生们一起通过对习题的分析、讨论、求解、总结，扎实掌握高等数学的基础，领悟高等数学的真谛。

这就是我们写作本书的初衷。

全解全析

同济大学《高等数学》，现在已经推出第五版。作为教科书，该书体系完整，层次清晰，叙述深入浅出，在改革教材层出不穷的今天，仍享有其它教材无法比拟的地位，深受广大教师和学生的喜爱。

《高等数学习题全解全析/精品课堂》与同济大学第五版教材配套，这样，学生使用更为方便。

全解：详细给出全部习题的解答。真正从学习者的角度，给出解题的每一个过程与步骤，以免略掉一些看似简单但对有些同学理解解题思路很关键的细节。

全析：在解题过程中，将习题分成三个层次：

第一层次为基本题，直接给出详细解答过程。对于其中的典型题，给出有针对性的提示和点拨。

第二层次为多知识点综合题。解题全过程控制：首先给出思路，题中重点点拨，题后归纳梳理出知识点、解题方法等。

第三层次为灵活题和难题。除给出思路、分析指导外，还给出一题多解，举一反三等，并且提示“如何才能得到答案”，如何寻求“好的解题方法”，从而真正提高学生分析问题和解决问题的能力。

精品课堂

目前同类书大多按“知识点归纳、内容导学、本章知识结构、习题全解”板块书写，解题过程平铺直叙，没有重点提示、难题导引及综合题分析，碰到难题、综合题，学生则需揣摩作者的解题思路，理解起来有一定难度。

市场调查反馈信息说明，许多学生反映已有图书中有的步骤变化弄不懂，再遇到这样类型的题，稍加变化就不知如何下手，甚至咬不准是自己不理解，还是书上答案给错了。

本书在给出习题的详细解答步骤的同时，随时将重点题、难题和综合题给予分析、点拨、总结，帮助学生理解、归纳、上升，如同习题课上教师边讲解、学生边练习一样。从而真正帮助学生彻底掌握所学内容。

因此，此套书辅名为——精品课堂。

学习是一个过程，而过程由环节组成。只有注重环节，控制过程，才能得到良好的学习效果。对学习高等数学来讲，课堂听讲和课后复习是两个重要环节。

我们深信本书将成为您补充课堂听讲、辅助课后复习的好帮手。

2003 年 8 月

目　录

第八章 多元函数微分法及其应用

习题 8-1

1. 判定下列平面点集中哪些是开集、闭集、区域、有界集、无界集？并分别指出它们的聚点所成的点集（称为导集）和边界。

(1) $\{(x,y)\mid x\neq 0,y\neq 0\}$；　　(2) $\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2\leqslant 4\}$；

(3) $\{(x,y)\mid y>x^2\}$；

(4) $\{(x,y)\mid x^2+(y-1)^2\geqslant 1\}\cap\{(x,y)\mid x^2+(y-2)^2\leqslant 4\}$。

解 (1) 开集，无界集，导集为 $\mathbf{R}^2$，边界为 $\{(x,y)\mid x=0$ 或 $y=0\}$；

(2) 既非开集，又非闭集，有界集，导集为 $\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$，边界为 $\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}\cup\{(x,y)\mid x^2+y^2=4\}$；

(3) 开集，区域，无界集，导集为 $\{(x,y)\mid y\geqslant x^2\}$，边界为 $\{(x,y)\mid y=x^2\}$；

(4) 闭集，有界集，导集为集合本身，边界为 $\{(x,y)\mid x^2+(y-1)^2=1\}\cup\{(x,y)\mid x^2+(y-2)^2=4\}$。

2. 已知函数 $f(x,y)=x^2+y^2-xy\tan\dfrac{x}{y}$，试求 $f(tx,ty)$。

解
$$\begin{aligned}f(tx,ty)&=(tx)^2+(ty)^2-t^2(xy)\tan\frac{x}{y}\\&=t^2\left[x^2+y^2-xy\tan\frac{x}{y}\right]\\&=t^2f(x,y)\end{aligned}$$

注　把具有 $f(tx,ty)=t^k f(x,y)$ 性质的函数称为 k 次齐函数。本题中的函数就是一个二次齐函数。

3. 试证函数 $F(x,y)=\ln x\cdot\ln y$ 满足关系式

$$F(xy,uv)=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v)$$

证明　$F(xy,uv)=\ln(xy)\cdot\ln(uv)=(\ln x+\ln y)\cdot(\ln u+\ln v)=\ln x\cdot\ln u+\ln x\cdot\ln v+\ln y\cdot\ln u+\ln y\cdot\ln v=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v)$。

4. 已知函数 $f(u,v,w)=u^w+w^{u+v}$，试求 $f(x+y,x-y,xy)$。

解

$$\begin{aligned}f(x+y,x-y,xy)&=(x+y)^{xy}+(xy)^{(x+y)+(x-y)}\\&=(x+y)^{xy}+(xy)^{2x}\end{aligned}$$

5. 求下列各函数的定义域：

(1) $z=\ln(y^2-2x+1)$；　(2) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$；

(3) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$；　(4) $z=\ln(y-x)+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$；

(5) $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}(R>r>0)$；

(6) $u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$。

解　(1) $y^2-2x+1>0$，函数定义域为 $\{(x,y)\mid y^2-2x+1>0\}$；

(2) $x+y>0,y>-x$；$x-y>0,y<x$，函数定义域为 $\{(x,y)\mid x+y>0,x-y<0\}$，即 $\{(x,y)\mid y>-x,y<x\}$；

(3) $y\geqslant 0$；$x-\sqrt{y}\geqslant 0,x\geqslant\sqrt{y}$，函数定义域为 $\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0,y\leqslant x^2\}$；

(4) $y-x>0,y>x$；$x\geqslant 0$；$1-x^2-y^2>0,x^2+y^2<1$，函数定义域

为$\{(x,y)\mid y>x,x\geqslant 0,x^2+y^2<1\}$；

(5)$x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,x^2+y^2+z^2>r^2$，函数定义域为$\{(x,y,z)\mid r^2<x^2+y^2+z^2\leqslant R^2\}$；

(6)$\left|\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant 1,|z|\leqslant\sqrt{x^2+y^2}$且$x^2+y^2\neq 0$，即$x^2+y^2-z^2\geqslant 0,x^2+y^2\neq 0$，函数的定义域为$\{(x,y,z)\mid x^2+y^2-z^2\geqslant 0,x^2+y^2\neq 0\}$。

---

6. 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$；　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$；

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$；　(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$；

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\sin(xy)}{y}$；　(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$。

解　(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}=\dfrac{1-0\times 1}{0^2+1^2}=1$

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1^2+0^2}}=\ln 2$

注　求多元初等函数$z=f(p)$在点p_0处的极限时，若p_0点在该函数的定义域内，则极限值就是函数在p_0点的函数值，即$\lim\limits_{p\to p_0}f(p)=f(p_0)$。

(3)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$$
$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(2-\sqrt{xy+4})(2+\sqrt{xy+4})}{xy\cdot(2+\sqrt{xy+4})}$$
$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-xy}{xy\cdot(2+\sqrt{xy+4})}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-1}{2+\sqrt{xy+4}}$$
$$=-\frac{1}{4}$$

(4)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{(\sqrt{xy+1}-1)(\sqrt{xy+1}+1)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{xy} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (\sqrt{xy+1}+1) = 2$$

小结 计算(3)、(4)题这样的极限时，要先将分子或分母有理化，然后约去分子和分母中的公因式，再来计算其极限。

(5) 变成单元函数的极限来做，这是求多元函数极限常用的一种方法。

$$\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{\sin(xy)}{y} = \lim_{(x,y)\to(2,0)} x\cdot\frac{\sin(xy)}{xy} = \lim_{x\to 2} x \cdot \lim_{(xy\to 0)} \frac{\sin(xy)}{xy} = 2$$

(6) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2\sin^2\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)}{\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)^2 \dfrac{4}{x^2+y^2}\cdot e^{x^2y^2}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{\sin\dfrac{x^2+y^2}{2}}{\dfrac{x^2+y^2}{2}}\right)^2 \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{2e^{x^2y^2}} = 0$$

---

7. 证明下列极限不存在：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{x-y}$； (2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$。

证明 (1) 让点 (x,y) 沿 Ox 轴趋于 $(0,0)$ 点，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1$$

让点 (x,y) 沿 Oy 轴趋于 $(0,0)$ 点，有

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{-y} = -1$$

因为点 (x,y) 沿两种不同的方式趋于 $(0,0)$ 点时，$\dfrac{x+y}{x-y}$ 的极限值不相等，所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{x-y}$ 不存在。

(2) 让点沿直线 $y=x$ 趋于 $(0,0)$ 点，此时极限为

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4}=1$$

让点沿 Ox 轴趋于 $(0,0)$ 点时，极限为

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2}=\lim_{x\to 0}0=0$$

因为点 (x,y) 沿两种不同的方式趋于 $(0,0)$ 点时，所给函数的极限值不相等，所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ 不存在。

---

8. 函数 $z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$ 在何处是间断的？

解　令 $y^2-2x=0$ 得 $y^2=2x$，可见间断点构成的集合为 $\{(x,y)\mid y^2=2x\}$。

点拨　初等函数的间断点就是使函数没有定义的点。

---

9. 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$。

证明　因为 $x^2+y^2\geqslant 2|xy|$，所以 $0\leqslant\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$，又 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}=0$，依夹逼准则有 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$。

---

10. 设 $F(x,y)=f(x)$，$f(x)$ 在 x_0 处连续，证明：对任意 $y_0\in\mathbf{R}$，$F(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续。

证明　因为 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，所以 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，因为 $F(x,y)=f(x)$，所以 $F(x_0,y_0)=f(x_0)$，又 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}F(x,y)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}F(x,y)=F(x_0,y_0)$，可见对 $\forall\ y_0\in\mathbf{R}$，$F(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续。

习题 8-2

1. 求下列函数的偏导数：

(1)$z=x^3y-y^3x$；　　(2)$s=\dfrac{u^2+v^2}{uv}$；

(3)$z=\sqrt{\ln(xy)}$；　　(4)$z=\sin(xy)+\cos^2(xy)$；

(5)$z=\ln\tan\dfrac{x}{y}$；　　(6)$z=(1+xy)^y$；

(7)$u=x^{\frac{y}{z}}$；　　(8)$u=\arctan(x-y)^z$。

解　(1)$\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2y-y^3,\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^3-3xy^2$

(2)$s=\dfrac{u}{v}+\dfrac{v}{u},\dfrac{\partial s}{\partial u}=\dfrac{1}{v}-\dfrac{v}{u^2},\dfrac{\partial s}{\partial v}=-\dfrac{u}{v^2}+\dfrac{1}{u}$

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{\ln(xy)}}\cdot\dfrac{\partial\ln(xy)}{\partial x}=\dfrac{1}{2\sqrt{\ln(xy)}}\cdot\dfrac{1}{xy}\cdot y=$ $\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln(xy)}}$，同理，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{2y\sqrt{\ln(xy)}}$。

(4) $$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=y\cdot\cos(xy)+2\cos(xy)\cdot[-\sin(xy)]\cdot y\\&=y[\cos(xy)-\sin2(xy)]\end{aligned}$$

依对称性可知，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x[\cos(xy)-\sin2(xy)]$

(5) $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\tan\frac{x}{y}}\cdot\sec^2\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y}=\frac{2}{y}\csc\frac{2x}{y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\tan\frac{x}{y}}\cdot\sec^2\frac{x}{y}\cdot\frac{-x}{y^2}=-\frac{2x}{y^2}\csc\frac{2x}{y}$$

(6) $$\frac{\partial z}{\partial x}=y(1+xy)^{y-1}\cdot y=y^2(1+xy)^{y-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}e^{y\ln(1+xy)}=e^{y\ln(1+xy)}\cdot\left[\ln(1+xy)+y\cdot\frac{x}{1+xy}\right]$$

$$= (1+xy)^y\left[\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}\right]$$

此题也可以用对数微分法做：

$\ln z = y\ln(1+xy)$，两边对 y 求偏导数有

$$\frac{1}{z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\ln(1+xy)+y\cdot\frac{x}{1+xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=(1+xy)^y\left[\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}\right]$$

(7) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{y}{z}\cdot x^{\left(\frac{y}{z}-1\right)}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=x^{\frac{y}{z}}\ln x\cdot\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\cdot\ln x$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=x^{\frac{y}{z}}\ln x\left(-\frac{y}{z^2}\right)=-\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\cdot\ln x$$

点拨　u 对 x 求偏导数时，$u=x^{\frac{y}{z}}$ 应该视为幂函数，u 对 y 和 z 求偏导数时，$u=x^{\frac{y}{z}}$ 应该视为指数函数。

(8) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$，

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{(x-y)^z\ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}$$

点拨　为了计算偏导数 $u=\arctan(x-y)^z$，应该把 u 视为复合函数 $u=\arctan v, v=(x-y)^z$，求 $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 时，v 为幂函数，求 $\dfrac{\partial v}{\partial z}$ 时，v 应视为指数函数。

---

2. 设 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$，求证 $l\dfrac{\partial T}{\partial l}+g\dfrac{\partial T}{\partial g}=0$。

证明　$\dfrac{\partial T}{\partial l}=\pi\cdot\dfrac{1}{\sqrt{g\cdot l}}$，$\dfrac{\partial T}{\partial g}=2\pi\sqrt{l}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}g^{-\frac{3}{2}}\right)=-\pi\dfrac{\sqrt{l}}{g\sqrt{g}}$

所以，$l\dfrac{\partial T}{\partial l}+g\cdot\dfrac{\partial T}{\partial g}=\pi\cdot\sqrt{\dfrac{l}{g}}-\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}=0$。

---

3. 设 $z=e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$，求证 $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z$。

证明　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}\cdot\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$，　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}\cdot\dfrac{1}{y^2}$

所以 $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}+\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}=2\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}=2z$。

4. 设 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$，求 $f_x(x,1)$。

解法 1 因为 $f_x(x,y)=1+(y-1)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x}{y}}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x}{y}}}\cdot\dfrac{1}{y}$，所以，$f_x(x,1)=1+0=1$。

解法 2 依偏导数的定义知，求 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 时，y 是视为常量的，所以 $f_x(x,1)=\dfrac{\partial f(x,1)}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x+(1-1)\arcsin\sqrt{x}\right)=\dfrac{\partial x}{\partial x}=1$。

点拨 遇到类似这种问题用解法 2 简单。

5. 曲线 $\begin{cases} z=\dfrac{x^2+y^2}{4} \\ y=4 \end{cases}$ 在点 $(2,4,5)$ 处的切线对于 x 轴的倾角是多少？

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x}{4}=\dfrac{x}{2}$，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,4,5)}=1$，所以，如果设曲线在点 $(2,4,5)$ 处的切线对 x 轴的倾角为 α，则有 $\tan\alpha=1$，即 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$。

点拨 由偏导数的几何意义可知，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ 表示曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=y_0 \end{cases}$ 在点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处的切线对 x 轴的斜率。

6. 求下列函数的 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$：

(1) $z=x^4+y^4-4x^2y^2$；　(2) $z=\arctan\dfrac{y}{x}$；　(3) $z=y^x$。

解 (1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=4x^3-8xy^2$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2-8y^2$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=4y^3-8x^2y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12y^2-8x^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(4x^3-8xy^2)=-16xy$$

或　$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}(4y^3-8x^2y)=-16xy$

注　若$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$和$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$在区域$D$内连续，则在区域$D$内$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$。

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{-\dfrac{y}{x^2}}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(-\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$

$=-\dfrac{(x^2+y^2)-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

(3)　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=y^x\ln y$，

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^x\cdot\ln y\cdot\ln y=y^x\ln^2 y$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy^{x-1}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x\cdot(x-1)y^{x-2}$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}(y^x\ln y)=xy^{x-1}\cdot\ln y+y^x\cdot\dfrac{1}{y}=y^{x-1}(x\ln y+1)$

或$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}(xy^{x-1})=y^{x-1}+xy^{x-1}\cdot\ln y=y^{x-1}(x\ln y+1)$

---

7. 设$f(x,y,z)=xy^2+yz^2+zx^2$，求$f_{xx}(0,0,1)$，$f_{xz}(1,0,2)$，$f_{yz}(0,-1,0)$及$f_{zzx}(2,0,1)$。

解　因为$f_x(x,y,z)=y^2+2xz$，$f_y(x,y,z)=2xy+z^2$，

$f_z(x,y,z)=2yz+x^2$

所以，$f_{xx}(x,y,z)=2z$，$f_{xz}(x,y,z)=2x$，$f_{yz}(x,y,z)=2z$，

$f_{zzx}(x,y,z)=\dfrac{\partial}{\partial z}(f_{xz}(x,y,z))=0$

所以，$f_{xx}(0,0,1)=2$，$f_{xz}(1,0,2)=2$，$f_{yz}(0,-1,0)=0$，$f_{zzx}(2,0,1)=0$

---

8. 设$z=x\ln(xy)$，求$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$及$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$。

解　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\ln(xy)+x\cdot\dfrac{y}{xy}=\ln(xy)+1$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{1}{xy}\cdot y=\dfrac{1}{x}$，