2008 人大考研

读考研书 找人大社

2008考研历届数学真题题型解析（数学一）

主编 黄先开 曹显兵

- 囊括21年全部真题
- 名师归纳总结127题型

全书按大纲考试要求设置结构，每章下归纳题型分类解析1987～2007年真题

题题精解，有分析，有评注，多种解法、多种思路

章章总结，将历年试题题型、分值分布情况分别列表，考试重点清晰可见

每章后附自测练习题，全部来自数二、三、四的历年真题，互相借鉴，触类旁通

21年真题原样附录在后，供考生自测之用，其解析在正文的位置全部标明

中国人民大学出版社

考研历届数学真题题型解析(数学一)

▶ 主　编　黄先开　曹显兵
▶ 编　者　黄先开　曹显兵
施明存　殷先军

2008

中国人民大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研历届数学真题题型解析(数学一)/黄先开,曹显兵主编.2版
北京:中国人民大学出版社,2007
ISBN 978-7-300-07360-6

Ⅰ.考…
Ⅱ.①黄…②曹…
Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-解题
Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第017656号

考研历届数学真题题型解析(数学一)

主　编　黄先开　曹显兵

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街31号	**邮政编码**	100080
电　　话	010-62511242(总编室)		010-62511398(质管部)
	010-82501766(邮购部)		010-62514148(门市部)
	010-62515195(发行公司)		010-62515275(盗版举报)
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.1kao.net(中国1考网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京新丰印刷厂		
规　　格	210 mm×285 mm　16开本	**版　　次**	2006年6月第1版
			2007年2月第2版
印　　张	28	**印　　次**	2007年2月第1次印刷
字　　数	855 000	**定　　价**	35.00元

前 言

自从 1987 年全国工学、经济学硕士研究生入学数学实行统一考试以来，至今已 21 年，共命制试卷近百份，有上千道试题。这些试题是参加命题的专家、教授的智慧和劳动的结晶，它既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力和水平的要求，展示出统考以来数学考试的全貌，又蕴涵着命题专家在《数学考试大纲》要求下的命题指导思想、原则、特点和趋势，是广大考生和教师了解试题信息、分析命题动态、总结命题规律最直接、最宝贵的第一手资料。

拥有一套内容完整、编排合理、分析透彻、解答规范、总结到位的数学历年真题，是广大准备考研学子的期盼。通过认真分析研究、了解、消化和掌握历年试题，可以发现命题的特点和趋势，找出知识之间的有机联系，总结每部分内容的考查重点、难点，归纳常考典型题型，凝练解题思路、方法和技巧，明确复习方向，从而真正做到有的放矢、事半功倍地进行复习。本书是作者在十多年收集、整理资料和进行考研数学辅导的基础上，通过对历年试题的精心分析研究，并结合授课体会和学生的需要全新编写而成的，相信能够满足考生的要求。

我们认为本书具有以下特点：

1. 内容最全面。汇集了统考以来 21 年的所有试题，便于考生全面系统地把握历年试题的动态变化。在**每章后面还将其余三类试卷的相关典型真题作为习题提供**（如数学一每章后面精选了数学二、数学三和数学四的同类型考题），以便考生进一步巩固相关知识，**考生有了本书后，也就相当于拥有了其余三类试卷的资料。**

2. 题型最丰富。根据考试大纲的要求，**每一章节均按题型进行归类，并对每一题型进行了分析、归纳和总结。**这样考生可通过题型研究，把握命题特点和命题思路，做到举一反三，触类旁通。

3. 解析最详尽。先分析——解题的思路、方法，然后详解——详细、规范的解答过程，再就是评注——解题思路、方法和技巧的归纳总结，所涉及的知识点、命题意图和可能延伸的考查情形。对命题思路、解题的重点难点进行这样深入细致的解析，相信有助于考生把握解题规律、拓展分析思路、提炼答题技巧，从而大大提高应试水平。

4. 对照最直接。本书在每部分的开头，先列出了考试大纲规定的内容与要求，与此相对照再进行**题型归类和分析总结，顺序与考试大纲和一般教材一致，**便于考生对照复习。

5. 总结最完整。除每类题型均有归纳总结外，**每章还有历年考研试题按题型分布和分数的总结，**这样可以帮助考生了解每类题型考查的频率、所占的比重，从而发现命题的重点、最常考的题型，以便更有针对性地进行复习。

本书既根据考试内容按章节编排，又提供成套试卷。复习前期建议考生按章节内容与教材、复习指导书同步进行，后期可将本书作为模拟训练套题使用。尽管本书每题均有详尽的解析，但希望读者不要轻易去查看分析、详解和评注，而一定要自己先动手去进行演练。在每题做完之后，再去看书中的分析、详解和评注，仔细回顾、研究一下自己的分析、思路和解答过程与书中有什么异同；如果存在问题，应尽量查清原因，看看自己是在基本理论、基本概念与基本方法等方面有欠缺，还是在做题技巧、知识的综合与灵活运用等方面掌握不够。**注意，这**

样的归纳总结过程是必不可少的，其重要性甚至超过做题本身。整本书都这样复习下来，在掌握基本理论、基本概念和基本方法上，在综合、灵活运用知识和思维能力的训练上，相信读者一定会有质的提高。

本书一方面保留了我们过去编写的历年试题解析图书的优点，同时在这次编写完善过程中，参考了众多相关的教材和复习指导书，在此不一一提及，谨对所有相关的作者表示真诚的谢意。

由于时间比较仓促，加上编者水平所限，书中难免还有不足之处，恳请广大读者批评指正。

成功来源于自信，只要广大考生充满信心，通过脚踏实地的艰苦努力，就一定能够心想事成。

编者

2007 年 2 月于北京

目　录

第一部分　高等数学

第二部分 线性代数

第三部分　概率论与数理统计

附 录

PART ONE

第一部分

高等数学

第一章　函数、极限、连续

考试内容与要求

考试内容

函数的概念及表示法，函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性，复合函数、反函数、分段函数和隐函数，基本初等函数的性质及其图形，初等函数，函数关系的建立，数列极限与函数极限的定义及其性质，函数的左极限和右极限，无穷小量和无穷大量的概念及其关系，无穷小量的性质及无穷小量的比较，极限的四则运算，极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则，两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e},$$

函数连续的概念，函数间断点的类型，初等函数的连续性，闭区间上连续函数的性质.

考试要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立应用问题的函数关系.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.
5. 理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.
6. 掌握极限的性质及四则运算法则.
7. 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法.
8. 理解无穷小量、无穷大量的概念，掌握无穷小量的比较方法，会用等价无穷小量求极限.
9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)，会判别函数间断点的类型.
10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)，并会应用这些性质.

题型 1.1　函数的概念及其特性

1. (88，5分)* 设 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

【分析】 先由 $f[\varphi(x)]=1-x$ 确定 $\varphi(x)$ 的表达式，再求 $\varphi(x)$ 的定义域.

【详解】 由 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，有 $\mathrm{e}^{[\varphi(x)]^2}=1-x$，解得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$. 其定义域为 $\ln(1-x)\geqslant 0$，得 $1-x\geqslant 1$，即 $x\leqslant 0$.

【评注】 假设有关系式 $f[g(x)]=\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 的表达式已知，有两种情况：

(1) 已知 f，求 g：相当于求反函数 $g(x)=f^{-1}[\varphi(x)]$.

(2) 已知 g，求 f：一般作变量代换 $g(x)=u\Rightarrow x=g^{-1}(u)$，于是有 $f(u)=\varphi[g^{-1}(u)]$，再根据函数关系与变量字母无关，得知 $f(x)=\varphi[g^{-1}(x)]$.

---

* (88，5分)表示该题为1988年考研数学一真题，其分值为5分，下同.

2.（90，3分） 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则函数 $f[f(x)]=$ ________.

【答案】 应填 1.

【分析】 直接按复合函数的定义计算即可，注意 $|f(x)|\leqslant 1$.

【详解】 由 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 知 $|f(x)|\leqslant 1$. 因此有 $f[f(x)]=1$.

【评注】 已知 $f(x)$，$g(x)$，求复合函数 $f[g(x)]$（或 $g[f(x)]$），一般用代入法逐次复合即可，应特别注意的是 $g(x)$ 的值域与 $f(x)$ 的定义域的对应关系.

3.（05，4分） 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数，"$M\Leftrightarrow N$"表示"M 的充分必要条件是 N"，则必有

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数.

(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数.

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数.

(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数. 【 】

【答案】 应选(A).

【分析】 本题可直接推证，但最简便的方法还是通过反例用排除法找到答案.

【详解 1】 任一原函数可表示为 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt+C$，且 $F'(x)=f(x)$.

当 $F(x)$ 为偶函数时，有 $F(-x)=F(x)$，于是 $F'(-x)\cdot(-1)=F'(x)$，即 $-f(-x)=f(x)$，也即 $f(-x)=-f(x)$，可见 $f(x)$ 为奇函数；

反过来，若 $f(x)$ 为奇函数，则 $\int_0^x f(t)\,dt$ 为偶函数，从而 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt+C$ 为偶函数，可见(A)为正确选项.

【详解 2】 令 $f(x)=1$，则取 $F(x)=x+1$，可排除(B)，(C)；

令 $f(x)=x$，则取 $F(x)=\frac{1}{2}x^2$，可排除(D).

故应选(A).

【评注】 请读者思考 $f(x)$ 与其原函数 $F(x)$ 的有界性之间有何关系？

4.（99，3分） 设 $f(x)$ 是连续函数，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时，$F(x)$ 必是偶函数.

(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时，$F(x)$ 必是奇函数.

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时，$F(x)$ 必是周期函数.

(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时，$F(x)$ 必是单调增函数. 【 】

【答案】 应选(A).

【分析】 本题涉及原函数的基本特性，由于原函数有无穷多个，如何表示它是问题的关键. 实际上，只要找出一个原函数，则所有的原函数就可表示出来，而 $\int_0^x f(t)\,dt$ 正好就是所需要的一个原函数.

【详解】 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 可以表示为 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt+C$，于是

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\,dt+C \xlongequal{u=-t} \int_0^x f(-u)\,d(-u)+C.$$

当 $f(x)$ 为奇函数时，$f(-u)=-f(u)$，从而有

$$F(-x)=\int_0^x f(u)\,du+C=\int_0^x f(t)\,dt+C=F(x),$$

即 $F(x)$ 为偶函数，

故应选(A).

至于选项(B)、(C)、(D),可分别举反例如下:$f(x)=x^2$ 是偶函数,但其原函数 $F(x)=\frac{1}{3}x^3+1$,不是奇函数,可排除(B);$f(x)=\cos^2 x$ 是周期函数,但其原函数 $F(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x$,不是周期函数,可排除(C);$f(x)=x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增函数,但其原函数 $F(x)=\frac{1}{2}x^2$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内非单调增函数,可排除(D).

【评注 1】 有些考生将原函数写成形如 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+C$,结果推导 $F(-x)=F(x)$ 时遇到困难,因此特殊形式的原函数 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是值得注意的.

【评注 2】 函数的基本性质有:奇偶性、周期性、单调性和有界性,当 $f(x)$ 具有相应的性质时,$F(x)$ 是否也具有相应的性质?或反过来考虑,当 $F(x)$ 具有相应的性质时,$f(x)$ 是否也具有同样的性质?本题也可变形为考虑 $f(x)$ 与 $f'(x)$(或 $f'(x)$ 与 $f(x)$)的性质之间的关系,对于常见的结论与反例应做到心中有数.

小结

函数的概念及函数的复合,包括分段函数的复合,本质上是函数关系的建立问题,而建立函数关系是进一步研究函数性质的基础.对于函数的四个主要特性的研究:奇偶性和周期性一般用定义检验;单调性则大多用导数符号分析;有界性往往需要结合极限与连续的性质来确定.

题型 1.2 极限的概念与性质

(03,4 分) 设 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$ 均为非负数列,且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,则必有

(A) $a_n<b_n$ 对任意 n 成立. (B) $b_n<c_n$ 对任意 n 成立.

(C) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在. (D) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在. 【 】

【答案】 应选(D).

【详解 1】 本题考查极限的概念,极限值与数列前面有限项的大小无关,可立即排除(A),(B);而极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 是"$0\cdot\infty$"型未定式,可能存在也可能不存在,举反例说明即可;极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 属"$1\cdot\infty$"型,必为无穷大量,即不存在.故应选(D).

【详解 2】 用举反例法,取 $a_n=\frac{2}{n}$,$b_n=1$,$c_n=\frac{1}{2}n(n=1,2,\cdots)$,则可立即排除(A),(B),(C),因此正确选项为(D).

小结

关于极限的存在性,以下几点是值得注意的:

1. 若 $\lim f$ 存在,$\lim g$ 不存在,则 $\lim(f\pm g)$ 一定不存在,但 $\lim fg$,$\lim\frac{f}{g}$ 可能存在,也可能不存在.
2. 若 $\lim f=l\neq 0$, $\lim g=\infty$,则 $\lim fg=\infty$.
3. 若 f 有界,$\lim g=\infty$,则 $\lim(f\pm g)=\infty$,但 $\lim fg$ 不一定为 ∞.

题型 1.3 函数极限的计算

一、利用左、右极限求函数极限

1. (92,3 分) 当 $x \to 1$ 时,函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限

(A) 等于 2. (B) 等于 0. (C) 为 ∞. (D) 不存在但不为 ∞. 【 】

【答案】 应选(D).

【分析】 本题的关键是注意 $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x-1}=-\infty, \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$.

【详解】 因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$,而 $\lim\limits_{x\to 1^-}e^{\frac{1}{x-1}}=0, \lim\limits_{x\to 1^+}e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$,故有

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=0, \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty,$$

可见,$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 不存在但不为 ∞.

【评注】 $\lim\limits_{x\to x_0}a^{\frac{1}{x-x_0}}, \lim\limits_{x\to x_0}\arctan\dfrac{1}{x-x_0}$ 等均是极限不存在的情形,遇此情形一般应通过左、右极限进行讨论.

---

2. (00,5 分) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

【分析】 本题函数关系式中含有绝对值,本质上是一分段函数,在分段点的极限应通过左、右极限来讨论.

【详解】 因为

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{2}{1}-1=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=0+1=1,$$

可见,原式 $=1$.

【评注】 形如 $|f(x)|, \max\{f(x),g(x)\}$ 的函数,本质上是分段函数,在求极限、导数和积分时一般均应分段讨论.

小结

> 在讨论分段函数极限时一般用结论 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$,因此,当左、右极限 $f(x_0^-), f(x_0^+)$ 有一个不存在或都存在但不相等时,极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在.

二、求未定式 $\left(\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty},0\cdot\infty,1^\infty,0^0,\infty^0\right)$ 的极限

1. (90,3 分) 设 a 为非零常数,则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=$ ________.

【答案】 应填 e^{2a}.

【分析】 本题为"1^∞"型未定式,直接按第二类重要极限或化为指数函数求极限即可.

【详解 1】 $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left\{\left[1+\left(\frac{2a}{x-a}\right)\right]^{\frac{x-a}{2a}}\right\}^{\frac{2ax}{x-a}}=e^{2a}.$$

【详解 2】 本题化为指数函数求极限为：

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}e^{x\ln\frac{x+a}{x-a}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)}=e^{2a}.$$

【评注】 本题也可考虑先作变量代换 $x=\frac{1}{t}$，再求极限.

---

2. (91,5 分) 求 $\lim\limits_{x\to0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}$.

【详解 1】 $$\lim_{x\to0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}=\lim_{x\to0^+}[1+(\cos\sqrt{x}-1)]^{\frac{1}{\cos\sqrt{x}-1}\cdot\frac{\pi(\cos\sqrt{x}-1)}{x}}=e^{\pi\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}}=e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

【详解 2】 $$\lim_{x\to0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}=\lim_{x\to0^+}e^{\frac{\pi}{x}\ln\cos\sqrt{x}}=e^{\pi\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln\cos\sqrt{x}}{x}}=e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

---

3. (92,5 分) 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-\sin x-1}{1-\sqrt{1-x^2}}$.

【分析】 本题为常规题型，可通过分母有理化、无穷小量的等价代换以及洛必塔法则等方法求解.

【详解 1】 分母有理化：

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{(e^x-\sin x-1)(1+\sqrt{1-x^2})}{x^2}=2\lim_{x\to0}\frac{e^x-\sin x-1}{x^2}$$
$$=2\lim_{x\to0}\frac{e^x-\cos x}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x+\sin x}{1}=1.$$

【详解 2】 用洛必塔法则：

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x^2}(e^x-\cos x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-\cos x}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x+\sin x}{1}=1.$$

【详解 3】 无穷小量等价代换：

因为当 $x\to0$ 时，$1-\sqrt{1-x^2}\sim\frac{1}{2}x^2$，所以

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{e^x-\sin x-1}{\frac{1}{2}x^2}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-\cos x}{x}=1.$$

---

4. (93,5 分) 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$.

【详解 1】 $$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x\xlongequal{\frac{1}{x}=t}\lim_{t\to0}(\sin2t+\cos t)^{\frac{1}{t}}$$
$$=\lim_{t\to0}\{[1+(\sin2t+\cos t-1)]^{\frac{1}{\sin2t+\cos t-1}}\}^{\frac{\sin2t+\cos t-1}{t}}$$
$$=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin2t+\cos t-1}{t}}=e^2.$$

【详解 2】 $$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x\xlongequal{\frac{1}{x}=t}\lim_{t\to0}(\sin2t+\cos t)^{\frac{1}{t}}$$
$$=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{\ln(\sin2t+\cos t)}{t}}=e^2.$$

---

5. (94,3 分) $\lim\limits_{x\to0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=$ ________.

【答案】 应填$\dfrac{1}{6}$.

【分析】 先将 $\cot x$ 化为$\dfrac{\cos x}{\sin x}$,再整理为分式函数,然后结合无穷小量的等价代换和洛必塔法则进行求解.

【详解】

$$\lim_{x\to0}\cot x\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\cos x\cdot\frac{x-\sin x}{x\sin^2 x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}.$$

【评注】 一般地,在求极限的表达式中若含有 $\tan x$、$\cot x$、$\sec x$、$\csc x$ 等函数时,先将其化为 $\sin x$、$\cos x$ 的表达式后再求极限是方便的.

6. (95,3 分) $\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$ ________.

【答案】 应填 e^6.

【详解 1】 用第二类重要极限:

$$\lim_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=\lim_{x\to0}\left[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right]^{\frac{6x}{\sin x}}=e^6.$$

【详解 2】 化为指数函数求极限:

$$\lim_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2}{\sin x}\ln(1+3x)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{6\ln(1+3x)}{3x}}=e^6.$$

7. (96,3 分) 设$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$,则 $a=$ ________.

【答案】 应填 $\ln2$.

【详解】 因为$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a}}\right]^{\frac{3ax}{x-a}}=e^{3a}$,

于是有 $e^{3a}=8$,解得 $a=\ln2$.

8. (97,3 分) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$ ________.

【答案】 应填$\dfrac{3}{2}$.

【分析】 先用无穷小量的等价代换进行化简,再结合重要极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}$ 以及无穷小量与有界变量的乘积仍为无穷小量进行计算.

【详解】 原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{2x}=\dfrac{3}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{2}x\cos\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{2}+0=\dfrac{3}{2}$.

【评注】 本题若直接用洛必塔法则求极限,求导后分子的极限不存在,从而无法求出极限. 一般来说,当 $x\to0$ 时,若待求极限的函数关系式中含有 $\sin\dfrac{1}{x}$,$\cos\dfrac{1}{x}$ 等时,用洛必塔法则往往是失效的,此时可改用无穷小量与有界变量的乘积仍为无穷小量进行计算.

9. (98,3 分) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$ ________.