



读考研书 找人大社

2008 考研

历届数学真题题型解析(数学一)

主编 黄先开 曹显兵

● 囊括**21年**全部真题 ● 名师归纳总结**127**题型

全书按大纲考试要求设置结构，每章下归纳题型分类解析1987~2007年真题
题题精解，有分析，有评注，多种解法、多种思路

章章总结，将历年试题题型、分值分布情况分别列表，考试重点清晰可见

每章后附自测练习题，全部来自数二、三、四的历年真题，互相借鉴，触类旁通

21年真题原样附录在后，供考生自测之用，其解析在正文的位置全部标明



中国人民大学出版社

考研历届数学真题 题型解析(数学一)

► 主 编 黄先开 曹显兵
► 编 者 黄先开 曹显兵
施明存 殷先军

正版
查询及
服务
程序



← 刮 开 涂 层



← 获 取 20 位 数 字 编 码



← 上 www.1kao.net 注 册



← 登 录 增 值 服 务 进 免 费 课 堂

2008

图书在版编目(CIP)数据

考研历届数学真题题型解析(数学一)/黄先开,曹显兵主编.2版

北京:中国人民大学出版社,2007

ISBN 978-7-300-07360-6

I. 考…

II. ①黄…②曹…

III. 高等数学-研究生-入学考试-解题

IV. O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 017656 号

考研历届数学真题题型解析(数学一)

主 编 黄先开 曹显兵

出版发行 中国人民大学出版社

社 址 北京中关村大街 31 号

邮政编码 100080

电 话 010-62511242(总编室)

010-62511398(质管部)

010-82501766(邮购部)

010-62514148(门市部)

010-62515195(发行公司)

010-62515275(盗版举报)

网 址 <http://www.crup.com.cn>

<http://www.lkao.net>(中国 1 考网)

经 销 新华书店

印 刷 北京新丰印刷厂

规 格 210 mm×285 mm 16 开本

版 次 2006 年 6 月第 1 版

2007 年 2 月第 2 版

印 张 28

印 次 2007 年 2 月第 1 次印刷

字 数 855 000

定 价 35.00 元

版权所有 侵权必究 印装差错 负责调换

前言

自从1987年全国工学、经济学硕士研究生入学数学实行统一考试以来,至今已21年,共命制试卷近百份,有上千道试题。这些试题是参加命题的专家、教授的智慧 and 劳动的结晶,它既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力和水平的要求,展示出统考以来数学考试的全貌,又蕴涵着命题专家在《数学考试大纲》要求下的命题指导思想、原则、特点和趋势,是广大考生和教师了解试题信息、分析命题动态、总结命题规律最直接、最宝贵的第一手资料。

拥有一套内容完整、编排合理、分析透彻、解答规范、总结到位的数学历年真题,是广大准备考研学子的期盼。通过认真分析研究、了解、消化和掌握历年试题,可以发现命题的特点和趋势,找出知识之间的有机联系,总结每部分内容的考查重点、难点,归纳常考典型题型,凝练解题思路、方法和技巧,明确复习方向,从而真正做到有的放矢、事半功倍地进行复习。本书是作者在十多年收集、整理资料 and 进行考研数学辅导的基础上,通过对历年试题的精心分析研究,并结合授课体会和学生的需要全新编写而成的,相信能够满足考生的要求。

我们认为本书具有以下特点:

1. 内容最全面。汇集了统考以来21年的所有试题,便于考生全面系统地把握历年试题的动态变化。在每章后面还将其余三类试卷的相关典型真题作为习题提供(如数学一每章后面精选了数学二、数学三和数学四的同类型考题),以便考生进一步巩固相关知识,考生有了本书后,也就相当于拥有了其余三类试卷的资料。

2. 题型最丰富。根据考试大纲的要求,每一章节均按题型进行归类,并对每一题型进行了分析、归纳和总结。这样考生可通过题型研究,把握命题特点和命题思路,做到举一反三,触类旁通。

3. 解析最详尽。先分析——解题的思路、方法,然后详解——详细、规范的解答过程,再就是评注——解题思路、方法和技巧的归纳总结,所涉及的知识、命题意图和可能延伸的考查情形。对命题思路、解题的重点难点进行这样深入细致的解析,相信有助于考生把握解题规律、拓展分析思路、提炼答题技巧,从而大大提高应试水平。

4. 对照最直接。本书在每部分的开头,先列出了考试大纲规定的内容与要求,与此相对照再进行题型归类和总结,顺序与考试大纲和一般教材一致,便于考生对照复习。

5. 总结最完整。除每类题型均有归纳总结外,每章还有历年考研试题按题型分布和分数的总结,这样可以帮助考生了解每类题型考查的频率、所占的比重,从而发现命题的重点、最常考的题型,以便更有针对性地进行复习。

本书既根据考试内容按章节编排,又提供成套试卷。复习前期建议考生按章节内容与教材、复习指导书同步进行,后期可将本书作为模拟训练套题使用。尽管本书每题均有详尽的解析,但希望读者不要轻易去查看分析、详解和评注,而一定要自己先动手去进行演练。在每题做完之后,再去看书书中的分析、详解和评注,仔细回顾、研究一下自己的分析、思路 and 解答过程与书中有什么异同;如果存在问题,应尽量查清原因,看看自己是在基本理论、基本概念与基本方法等方面有欠缺,还是在做题技巧、知识的综合与灵活运用等方面掌握不够。注意,这



样的归纳总结过程是必不可少的，其重要性甚至超过做题本身。整本书都这样复习下来，在掌握基本理论、基本概念和基本方法上，在综合、灵活运用知识和思维能力的训练上，相信读者一定会有质的提高。

本书一方面保留了我们过去编写的历年试题解析图书的优点，同时在这次编写完善过程中，参考了众多相关的教材和复习指导书，在此不一一提及，谨对所有相关的作者表示真诚的谢意。

由于时间比较仓促，加上编者水平所限，书中难免还有不足之处，恳请广大读者批评指正。

成功来源于自信，只要广大考生充满信心，通过脚踏实地的艰苦努力，就一定能够心想事成。

编者

2007年2月于北京

目 录

第一部分 高等数学

第一章 函数、极限、连续 3

- 题型 1.1 函数的概念及其特性 3
- 题型 1.2 极限的概念与性质 5
- 题型 1.3 函数极限的计算 6
- 题型 1.4 函数极限的逆问题 11
- 题型 1.5 数列的极限 13
- 题型 1.6 无穷小量的比较 14
- 本章总结 17
- 自测练习题 17
- 自测练习题答案或提示 21

第二章 一元函数微分学 22

- 题型 2.1 导数的定义 22
- 题型 2.2 利用导数求曲线的切线、
法线方程 25
- 题型 2.3 一般导函数的计算 26
- 题型 2.4 可导、连续与极限的关系 28
- 题型 2.5 微分的概念与计算 29
- 题型 2.6 利用导数确定单调区间与
极值 29
- 题型 2.7 求函数曲线的凹凸区间与
拐点 33
- 题型 2.8 求函数曲线的渐近线 34
- 题型 2.9 确定函数方程
 $f(x) = 0$ 的根 36
- 题型 2.10 确定导函数方程
 $f'(x) = 0$ 的根 37
- 题型 2.11 微分中值定理的综合应用 39
- 题型 2.12 利用导数证明不等式 41
- 本章总结 45
- 自测练习题 45
- 自测练习题答案或提示 49

第三章 一元函数积分学 51

- 题型 3.1 原函数与不定积分的概念 51

- 题型 3.2 定积分的基本概念与性质 52
- 题型 3.3 不定积分的计算 53
- 题型 3.4 定积分的计算 55
- 题型 3.5 变限积分 57
- 题型 3.6 定积分的证明题 62
- 题型 3.7 广义积分 66
- 题型 3.8 应用题 66
- 本章总结 72
- 自测练习题 72
- 自测练习题答案或提示 76

第四章 向量代数与空间解析几何 78

- 题型 4.1 向量运算 78
- 题型 4.2 建立直线或平面的方程 79
- 题型 4.3 求点到直线和点到平面的
距离 81
- 题型 4.4 确定直线、平面之间的
几何关系 81
- 题型 4.5 建立旋转曲面的方程 82
- 题型 4.6 杂 题 84
- 本章总结 86

第五章 多元函数微分学 87

- 题型 5.1 基本概念题 87
- 题型 5.2 求多元复合函数的偏导数和
全微分 89
- 题型 5.3 求隐函数的偏导数和
全微分 93
- 题型 5.4 利用变量代换将方程变形 96
- 题型 5.5 利用偏导或全微分
确定常数 98
- 题型 5.6 求函数的方向导数和梯度 99
- 题型 5.7 多元函数微分学的
几何应用 100
- 题型 5.8 求多元函数的极值与最值 103
- 本章总结 107

自测练习题	108
自测练习题答案或提示	110
第六章 重积分	112
题型 6.1 交换积分顺序	112
题型 6.2 利用区域的对称性和函数的 奇偶性求积分	114
题型 6.3 分块积分	118
题型 6.4 选择适当坐标系计算 重积分	119
题型 6.5 重积分的应用	122
本章总结	125
自测练习题	126
自测练习题答案或提示	127
第七章 曲线、曲面积分	129
题型 7.1 计算第一类曲线积分	129
题型 7.2 计算第二类平面曲线积分	131
题型 7.3 有关曲线积分与路径 无关的问题	135
题型 7.4 计算第二类空间曲线积分	142
题型 7.5 计算第一类曲面积分	144
题型 7.6 计算第二类曲面积分	146
题型 7.7 曲线、曲面积分的应用	156
题型 7.8 计算向量场的散度及旋度	159
本章总结	160

第八章 无穷级数	161
题型 8.1 判定数项级数的敛散性	161
题型 8.2 证明数项级数的敛散性	167
题型 8.3 求幂级数的收敛半径、 收敛区间及收敛域	170
题型 8.4 求幂级数的和函数	173
题型 8.5 求数项级数的和	176
题型 8.6 求函数的幂级数展开式	178
题型 8.7 傅里叶级数	182
本章总结	186
自测练习题	186
自测练习题答案或提示	188

第九章 常微分方程	190
题型 9.1 一阶微分方程	190
题型 9.2 可降阶方程	194
题型 9.3 高阶常系数线性微分方程	195
题型 9.4 求解含变限积分的 函数方程	199
题型 9.5 微分方程的应用	200
题型 9.6 欧拉方程	205
本章总结	206
自测练习题	207
自测练习题答案或提示	210

第二部分

线性代数

第一章 行列式	215
题型 1.1 利用行列式的性质和按行(列) 展开定理计算行列式	215
题型 1.2 利用行列式和矩阵的运算 性质计算行列式	216
题型 1.3 利用秩、特征值和相似矩阵等 计算行列式	219
本章总结	221
自测练习题	221
自测练习题答案或提示	223
第二章 矩阵	224
题型 2.1 有关逆矩阵的计算与证明	224

题型 2.2 矩阵的乘法运算	227
题型 2.3 解矩阵方程	228
题型 2.4 与初等变换有关的命题	230
题型 2.5 与伴随矩阵 A^* 有关的 命题	232
题型 2.6 矩阵秩的计算与证明	233
本章总结	235
自测练习题	236
自测练习题答案或提示	240

第三章 向量	241
题型 3.1 向量的线性组合与 线性表示	241
题型 3.2 向量组的线性相关性	243

题型 3.3	求向量组的秩与矩阵的秩	248
题型 3.4	有关向量空间的命题	249
本章总结		250
自测练习题		251
自测练习题答案或提示		254
第四章	线性方程组	256
题型 4.1	解的判定、性质和结构	256
题型 4.2	求齐次线性方程组的 基础解系、通解	258
题型 4.3	求非齐次线性方程组的 通解	260
题型 4.4	抽象方程组的求解问题	263
题型 4.5	有关基础解系的命题	264
题型 4.6	讨论两个方程组解之间的 关系(公共解、同解)	265
题型 4.7	与 $AB = 0$ 有关的命题	268
题型 4.8	线性方程组的综合应用	268
本章总结		271
自测练习题		271
自测练习题答案或提示		275
第五章	特征值与特征向量	277
题型 5.1	求数字矩阵的特征值和 特征向量	277

题型 5.2	求抽象矩阵的特征值	279
题型 5.3	特征值、特征向量的 逆问题	281
题型 5.4	相似矩阵的判定及其 逆问题	282
题型 5.5	可对角化的判定及其 逆问题	285
题型 5.6	实对称矩阵的性质	286
题型 5.7	特征值、特征向量的应用	289
本章总结		292
自测练习题		293
自测练习题答案或提示		295
第六章	二次型	298
题型 6.1	二次型的矩阵、秩和正负 惯性指数	298
题型 6.2	化二次型为标准形	299
题型 6.3	化二次型为标准形的 逆问题	300
题型 6.4	合同变换与合同矩阵	303
题型 6.5	正定二次型与正定矩阵	304
本章总结		305
自测练习题		305
自测练习题答案或提示		306

第三部分 概率论与数理统计

第一章	随机事件与概率	311
题型 1.1	事件关系与概率的性质	311
题型 1.2	古典概型与几何概型	312
题型 1.3	乘法公式、条件概率公式	315
题型 1.4	全概率公式、贝叶斯公式	316
题型 1.5	事件的独立性	317
题型 1.6	贝努利概型	319
本章总结		320
自测练习题		321
自测练习题答案或提示		323
第二章	随机变量及其分布	324
题型 2.1	分布函数的概念及其性质	324
题型 2.2	求随机变量的分布律,	

	分布函数	325
题型 2.3	利用常见分布计算概率	327
题型 2.4	常见分布的逆问题	328
题型 2.5	随机变量函数的分布	330
本章总结		333
自测练习题		334
自测练习题答案或提示		336
第三章	多维随机变量及其分布	338
题型 3.1	二维离散型随机变量的联合 分布、边缘分布、条件分布	338
题型 3.2	二维连续随机变量的联合分 布、边缘分布、条件分布	341
题型 3.3	二维随机变量函数的分布	343
题型 3.4	二维随机变量取值的	

概率计算	349
题型 3.5 随机变量的独立性	350
本章总结	352
自测练习题	352
自测练习题答案或提示	354
第四章 随机变量的数字特征	356
题型 4.1 数学期望与方差的计算	356
题型 4.2 一维随机变量函数的期望与 方差	358
题型 4.3 二维随机变量函数的期望与 方差	360
题型 4.4 协方差与相关系数的计算	361
题型 4.5 随机变量的独立性与 不相关性	364
本章总结	366
自测练习题	367
自测练习题答案或提示	370
第五章 大数定律和中心极限定理	373
题型 5.1 切比雪夫不等式	373
本章总结	374
自测练习题	374

自测练习题答案或提示	375
第六章 数理统计的基本概念	376
题型 6.1 求统计量的数字特征	376
题型 6.2 求统计量的分布或取值的 概率	379
本章总结	381
自测练习题	382
自测练习题答案或提示	383
第七章 参数估计	384
题型 7.1 求参数的矩估计和最大 似然估计	384
题型 7.2 估计量的评价标准	389
题型 7.3 区间估计	390
本章总结	391
自测练习题	392
自测练习题答案或提示	393
第八章 假设检验	394
题型 8.1 单正态总体均值 μ 的 假设检验	394
本章总结	395

附 录

附录一	1987 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	396
附录二	1988 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	397
附录三	1989 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	399
附录四	1990 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	401
附录五	1991 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	403
附录六	1992 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	404
附录七	1993 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	406
附录八	1994 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	408
附录九	1995 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	409
附录十	1996 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	411
附录十一	1997 年全国硕士研究生入学	

	统一考试数学一试题	413
附录十二	1998 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	415
附录十三	1999 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	417
附录十四	2000 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	419
附录十五	2001 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	421
附录十六	2002 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	423
附录十七	2003 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	425
附录十八	2004 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	427
附录十九	2005 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	429
附录二十	2006 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	432
附录二十一	2007 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	434

P A R T O N E

第一部分

高等数学

第一章 函数、极限、连续

考试内容与要求

考 试 内 容

函数的概念及表示法,函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性,复合函数、反函数、分段函数和隐函数,基本初等函数的性质及其图形,初等函数,函数关系的建立,数列极限与函数极限的定义及其性质,函数的左极限和右极限,无穷小量和无穷大量的概念及其关系,无穷小量的性质及无穷小量的比较,极限的四则运算,极限存在的两个准则:单调有界准则和夹逼准则,两个重要极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

函数连续的概念,函数间断点的类型,初等函数的连续性,闭区间上连续函数的性质.

考 试 要 求

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法,会建立应用问题的函数关系.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.
5. 理解极限的概念,理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.
6. 掌握极限的性质及四则运算法则.
7. 掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限,掌握利用两个重要极限求极限的方法.
8. 理解无穷小量、无穷大量的概念,掌握无穷小量的比较方法,会用等价无穷小量求极限.
9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.
10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质.

题型 1.1 函数的概念及其特性

1. (88,5分)* 设 $f(x) = e^{x^2}$, $f[\varphi(x)] = 1-x$, 且 $\varphi(x) \geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

【分析】 先由 $f[\varphi(x)] = 1-x$ 确定 $\varphi(x)$ 的表达式,再求 $\varphi(x)$ 的定义域.

【详解】 由 $f(x) = e^{x^2}$, $f[\varphi(x)] = 1-x$, 有 $e^{[\varphi(x)]^2} = 1-x$, 解得 $\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)}$.
其定义域为 $\ln(1-x) \geq 0$, 得 $1-x \geq 1$, 即 $x \leq 0$.

【评注】 假设有关系式 $f[g(x)] = \varphi(x)$, 其中 $\varphi(x)$ 的表达式已知, 有两种情况:

(1) 已知 f , 求 g : 相当于求反函数 $g(x) = f^{-1}[\varphi(x)]$.

(2) 已知 g , 求 f : 一般作变量代换 $g(x) = u \Rightarrow x = g^{-1}(u)$, 于是有 $f(u) = \varphi[g^{-1}(u)]$, 再根据函数关系与变量字母无关, 得知 $f(x) = \varphi[g^{-1}(x)]$.

* (88,5分) 表示该题为 1988 年考研数学一真题, 其分值为 5 分, 下同.

2. (90, 3分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ 则函数 $f[f(x)] = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 应填 1.

【分析】 直接按复合函数的定义计算即可, 注意 $|f(x)| \leq 1$.

【详解】 由 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ 知 $|f(x)| \leq 1$. 因此有 $f[f(x)] = 1$.

【评注】 已知 $f(x), g(x)$, 求复合函数 $f[g(x)]$ (或 $g[f(x)]$), 一般用代入法逐次复合即可, 应特别注意的是 $g(x)$ 的值域与 $f(x)$ 的定义域的对应关系.

3. (05, 4分) 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数, “ $M \Leftrightarrow N$ ” 表示 “ M 的充分必要条件是 N ”, 则必有

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数.

(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数.

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数.

(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数. 【 】

【答案】 应选 (A).

【分析】 本题可直接推证, 但最简便的方法还是通过反例用排除法找到答案.

【详解 1】 任一原函数可表示为 $F(x) = \int_0^x f(t) dt + C$, 且 $F'(x) = f(x)$.

当 $F(x)$ 为偶函数时, 有 $F(-x) = F(x)$, 于是 $F'(-x) \cdot (-1) = F'(x)$, 即 $-f(-x) = f(x)$, 也即 $f(-x) = -f(x)$, 可见 $f(x)$ 为奇函数;

反过来, 若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $\int_0^x f(t) dt$ 为偶函数, 从而 $F(x) = \int_0^x f(t) dt + C$ 为偶函数, 可见 (A) 为正确选项.

【详解 2】 令 $f(x) = 1$, 则取 $F(x) = x + 1$, 可排除 (B), (C);

令 $f(x) = x$, 则取 $F(x) = \frac{1}{2}x^2$, 可排除 (D).

故应选 (A).

【评注】 请读者思考 $f(x)$ 与其原函数 $F(x)$ 的有界性之间有何关系?

4. (99, 3分) 设 $f(x)$ 是连续函数, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数, 则

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时, $F(x)$ 必是偶函数.

(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时, $F(x)$ 必是奇函数.

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时, $F(x)$ 必是周期函数.

(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时, $F(x)$ 必是单调增函数. 【 】

【答案】 应选 (A).

【分析】 本题涉及原函数的基本特性, 由于原函数有无穷多个, 如何表示它是问题的关键. 实际上, 只要找出一个原函数, 则所有的原函数就可表示出来, 而 $\int_0^x f(t) dt$ 正好就是所需要的一个原函数.

【详解】 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 可以表示为 $F(x) = \int_0^x f(t) dt + C$, 于是

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t) dt + C \stackrel{u=-t}{=} \int_0^x f(-u) d(-u) + C.$$

当 $f(x)$ 为奇函数时, $f(-u) = -f(u)$, 从而有

$$F(-x) = \int_0^x f(u) du + C = \int_0^x f(t) dt + C = F(x),$$

即 $F(x)$ 为偶函数,

故应选(A).

至于选项(B)、(C)、(D),可分别举反例如下: $f(x) = x^2$ 是偶函数,但其原函数 $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1$,不是奇函数,可排除(B); $f(x) = \cos^2 x$ 是周期函数,但其原函数 $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$,不是周期函数,可排除(C); $f(x) = x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增函数,但其原函数 $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内非单调增函数,可排除(D).

【评注 1】 有些考生将原函数写成形如 $F(x) = \int_a^x f(t)dt + C$,结果推导 $F(-x) = F(x)$ 时遇到困难,因此特殊形式的原函数 $\int_0^x f(t)dt$ 是值得注意的.

【评注 2】 函数的基本性质有:奇偶性、周期性、单调性和有界性,当 $f(x)$ 具有相应的性质时, $F(x)$ 是否也具有相应的性质?或反过来考虑,当 $F(x)$ 具有相应的性质时, $f(x)$ 是否也具有同样的性质?本题也可变形为考虑 $f(x)$ 与 $f'(x)$ (或 $f'(x)$ 与 $f(x)$)的性质之间的关系,对于常见的结论与反例应做到心中有数.

小结

函数的概念及函数的复合,包括分段函数的复合,本质上是函数关系的建立问题,而建立函数关系是进一步研究函数性质的基础.对于函数的四个主要特性的研究:奇偶性和周期性一般用定义检验;单调性则大多用导数符号分析;有界性往往需要结合极限与连续的性质来确定.

题型 1.2 极限的概念与性质

(03,4分) 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负数列,且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$,则必有

(A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立.

(B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立.

(C) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 不存在.

(D) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在.

【 】

【答案】 应选(D).

【详解 1】 本题考查极限的概念,极限值与数列前面有限项的大小无关,可立即排除(A),(B);而极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 是“ $0 \cdot \infty$ ”型未定式,可能存在也可能不存在,举反例说明即可;极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 属“ $1 \cdot \infty$ ”型,必为无穷大量,即不存在.故应选(D).

【详解 2】 用举反例法,取 $a_n = \frac{2}{n}, b_n = 1, c_n = \frac{1}{2}n (n = 1, 2, \dots)$,则可立即排除(A),(B),(C),因此正确选项为(D).

小结

关于极限的存在性,以下几点是值得注意的:

1. 若 $\lim f$ 存在, $\lim g$ 不存在,则 $\lim(f \pm g)$ 一定不存在,但 $\lim fg, \lim \frac{f}{g}$ 可能存在,也可能不存在.
2. 若 $\lim f = l \neq 0, \lim g = \infty$,则 $\lim fg = \infty$.
3. 若 f 有界, $\lim g = \infty$,则 $\lim(f \pm g) = \infty$,但 $\lim fg$ 不一定为 ∞ .

题型 1.3 函数极限的计算

一、利用左、右极限求函数极限

1. (92, 3 分) 当 $x \rightarrow 1$ 时, 函数 $\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限

(A) 等于 2.

(B) 等于 0.

(C) 为 ∞ .

(D) 不存在但不为 ∞ .

【 】

【答案】 应选(D).

【分析】 本题的关键是注意 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$.

【详解】 因为 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$, 而 $\lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$, 故有

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}} = 0, \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty,$$

可见, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}}$ 不存在但不为 ∞ .

【评注】 $\lim_{x \rightarrow x_0} a^{\frac{1}{x-x_0}}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \arctan \frac{1}{x-x_0}$ 等均是极限不存在的情形, 遇此情形一般应通过左、右极限进行讨论.

2. (00, 5 分) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right)$.

【分析】 本题函数关系式中含有绝对值, 本质上是一分段函数, 在分段点的极限应通过左、右极限来讨论.

【详解】 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} - \frac{\sin x}{x} \right) = \frac{2}{1} - 1 = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}} + e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}} + 1} + \frac{\sin x}{x} \right) = 0 + 1 = 1,$$

可见, 原式 = 1.

【评注】 形如 $|f(x)|$, $\max\{f(x), g(x)\}$ 的函数, 本质上是分段函数, 在求极限、导数和积分时一般均应分段讨论.

小结

在讨论分段函数极限时一般用结论 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$, 因此, 当左、右极限 $f(x_0^-)$, $f(x_0^+)$ 有一个不存在或都存在但不相等时, 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在.

二、求未定式 $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0 \right)$ 的极限

1. (90, 3 分) 设 a 为非零常数, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x =$ _____.

【答案】 应填 e^{2a} .

【分析】 本题为“ 1^∞ ”型未定式, 直接按第二类重要极限或化为指数函数求极限即可.

【详解 1】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left[1 + \left(\frac{2a}{x-a} \right) \right]^{\frac{x-a}{2a}} \right\}^{\frac{2ax}{x-a}} = e^{2a}.$

【详解 2】 本题化为指数函数求极限为:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \ln \frac{x+a}{x-a}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{2a}{x-a} \right)} = e^{2a}.$$

【评注】 本题也可考虑先作变量代换 $x = \frac{1}{t}$, 再求极限.

2. (91, 5 分) 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}.$

【详解 1】 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} [1 + (\cos \sqrt{x} - 1)]^{\frac{1}{\cos \sqrt{x} - 1} \cdot \frac{\pi(\cos \sqrt{x} - 1)}{x}} = e^{\pi \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos \sqrt{x} - 1}{x}} = e^{-\frac{\pi}{2}}.$

【详解 2】 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\pi}{x} \ln \cos \sqrt{x}} = e^{\pi \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \cos \sqrt{x}}{x}} = e^{-\frac{\pi}{2}}.$

3. (92, 5 分) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{1 - \sqrt{1-x^2}}.$

【分析】 本题为常规题型, 可通过分母有理化、无穷小量的等价代换以及洛必塔法则等方法求解.

【详解 1】 分母有理化:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - \sin x - 1)(1 + \sqrt{1-x^2})}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{x^2} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x}{1} = 1. \end{aligned}$$

【详解 2】 用洛必塔法则:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2}(e^x - \cos x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x}{1} = 1. \end{aligned}$$

【详解 3】 无穷小量等价代换:

因为当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \sqrt{1-x^2} \sim \frac{1}{2}x^2$, 所以

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{\frac{1}{2}x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{x} = 1.$$

4. (93, 5 分) 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x.$

【详解 1】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x \stackrel{\frac{1}{x} = t}{=} \lim_{t \rightarrow 0} (\sin 2t + \cos t)^{\frac{1}{t}}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \left[1 + (\sin 2t + \cos t - 1) \right]^{\frac{1}{\sin 2t + \cos t - 1}} \right\}^{\frac{\sin 2t + \cos t - 1}{t}} \\ &= e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t + \cos t - 1}{t}} = e^2. \end{aligned}$$

【详解 2】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x \stackrel{\frac{1}{x} = t}{=} \lim_{t \rightarrow 0} (\sin 2t + \cos t)^{\frac{1}{t}}$

$$= e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin 2t + \cos t)}{t}} = e^2.$$

5. (94, 3 分) $\lim_{x \rightarrow 0} \cot x \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 应填 $\frac{1}{6}$.

【分析】 先将 $\cot x$ 化为 $\frac{\cos x}{\sin x}$, 再整理为分式函数, 然后结合无穷小量的等价代换和洛必塔法则进行求解.

【详解】
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \cot x \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \cdot \frac{x - \sin x}{x \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

【评注】 一般地, 在求极限的表达式中若含有 $\tan x, \cot x, \sec x, \csc x$ 等函数时, 先将其化为 $\sin x, \cos x$ 的表达式后再求极限是方便的.

6. (95, 3 分) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{2}{\sin x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 应填 e^6 .

【详解 1】 用第二类重要极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{2}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} [(1 + 3x)^{\frac{1}{3x}}]^{\frac{6x}{\sin x}} = e^6.$$

【详解 2】 化为指数函数求极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{2}{\sin x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sin x} \ln(1 + 3x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \ln(1 + 3x)}{3x}} = e^6.$$

7. (96, 3 分) 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2a}{x-a} \right)^x = 8$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 应填 $\ln 2$.

【详解】 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2a}{x-a} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{3a}{x-a} \right)^{\frac{x-a}{3a}} \right]^{\frac{3ax}{x-a}} = e^{3a},$

于是有 $e^{3a} = 8$, 解得 $a = \ln 2$.

8. (97, 3 分) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1 + x)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 应填 $\frac{3}{2}$.

【分析】 先用无穷小量的等价代换进行化简, 再结合重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ 以及无穷小量与有界变量的乘积仍为无穷小量进行计算.

【详解】 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{2x} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{x} = \frac{3}{2} + 0 = \frac{3}{2}.$

【评注】 本题若直接用洛必塔法则求极限, 求导后分子的极限不存在, 从而无法求出极限. 一般来说, 当 $x \rightarrow 0$ 时, 若待求极限的函数关系式中含有 $\sin \frac{1}{x}, \cos \frac{1}{x}$ 等时, 用洛必塔法则往往是失效的, 此时可改用无穷小量与有界变量的乘积仍为无穷小量进行计算.

9. (98, 3 分) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$