

xinhao yu  
xianxing xitong fenxi

第二版

# 信号与 线性系统分析

孙国霞 郭予瑾 高骏 刘孝贤 编著

## 图书在版编目(CIP)数据

信号与线性系统分析/孙国霞,郭予瑾,高俊编著.—2版.—济南:  
山东大学出版社,2007.2  
ISBN 978-7-5607-2480-5

- I. 信...
- II. ①孙...②郭...③高...
- III. ①信号理论  
②线性系统—系统分析
- IV. TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 017015 号

山东大学出版社出版发行  
(山东省济南市山大南路 27 号 邮政编码:250100)  
山东省新华书店经销  
山东旅科印务有限公司印刷  
787×1092 毫米 1/16 20.5 印张 472 千字  
2007 年 2 月第 2 版 2007 年 2 月第 2 次印刷  
定价:35.00 元

**版权所有,盗印必究**

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部负责调换

## 内容提要

本书系统地讨论了信号与线性系统的基本概念,信号经过线性时不变系统传输与处理的基本理论和基本分析方法。主要介绍确定性信号的分析方法,本书是按照先输入输出分析法(第一章到第五章)、后状态变量分析法(第六章)、先连续后离散、先时域后变换域分析的顺序进行讨论的。

配合正文,各章均附有丰富的例题与习题,便于自学。

本书可作为电子工程、通信技术、自动控制及机电类有关专业本科及专科《信号与线性系统分析》课程的教材。本书也是信号与信息处理、电路与系统、通信与信息系统等专业《信号与线性系统分析》专业课研究生入学考试的参考书。

## 再版说明

进入 21 世纪以来,随着社会的进步、科学技术的发展和高等教育水平的不断提高,信号与信息处理已渗透到自然科学、经济、金融、社会等各个领域,影响到科技发展和社会进步的方方面面。有关信息的产生与提取、变换与处理、传输或重现等基本理论与技术,信号与系统的特征与性能分析,已成为信息学科中重要而必备的基本知识。《信号与线性系统分析》作为信息科学、通信工程、电气工程、生物医学工程、自动化和计算机类等专业的一门主要技术基础课程,其重要性与作用日益提高。在这种大环境下,为充分体现现代教育思想,满足本科教学体系改革发展新形势的需求,我们在保留第一版教材特点的基础上,参考吸收目前国内外同类教材的优点和最新内容,在材料和内容的组织编排上,在概念与原理的完整性和应用方面作了改进,再版后的教材主要有以下特点:

- 在内容体系方面,注意经典与现代的关系,尽量用清晰、严谨且易懂的方式,全面而系统地论述信号与线性系统分析的基本理论和分析方法,进一步强调了理论运用所需要的数学步骤以及性质使用应遵循的约束条件,以体现教学内容的先进性及体系结构的合理性。

- 在教学材料组织方面:除论述滤波、调制、抽样、反馈、失真、Hilbert 变换、时分复用、频分复用、系统的可控性、可观性等工程基本概念、基本方法的同时,进一步强调其实际应用;对相关科学前沿研究作了入门性介绍,如小波变换、主分量分析和独立分量分析。让学生在学基础知识、加深问题理解的同时,了解所学内容的实际应用、前沿发展和进一步研究的方向,为下一步的深入学习注入动力。

- 调整设置合理的内容间衔接梯度,分类精选并补充了一些例题,便于学生的理解与自学,以期调动学生的学习主动性和积极性。

本书在修订过程中吕亚靖、梁军、刘友民、王玉莲、朱桂萍、李燕、李伟、王晓梅等老师提出了许多宝贵意见,在此向他们表示衷心的感谢。孙兴华、乔建平、闫华、徐强、刘炳旭、于强、李杰、吴苏等同学在绘图、计算机程序编写过程中做了大量工作,在此也向他们表示衷心的感谢!

限于编者的学术水平,书中疏漏、不妥甚至差错之处在所难免,敬请读者不吝指正。

编者  
2007 年 1 月

## 前 言

《信号与线性系统分析》是电子工程、通信技术、信号与信息处理等专业的主要技术基础课程之一。近年来,信号与信息处理方法更是逐渐扩大了在其他学科中的应用,如计算机、机械、材料、天文、经济、电力、过程控制等,《信号与线性系统分析》课程也成为高等院校中这些专业的必修课程。

原山东大学、山东工业大学和山东医科大学都有信号与信息处理教学科研体系,并有各自使用的信号与线性系统分析方面的教材。2000年三校合并后,相关专业合并在一起,为了适应新的形势和要求,在原有相关教材基础上,重新编写了这本教材。

《信号与线性系统分析》全书内容共分为七章,全面阐述了信号与线性系统的特性和分析方法。内容按照由时域分析到变换域分析、由连续时间系统到离散时间系统、由输入—输出分析到状态变量分析的顺序安排,基本分析方法和基本概念逐步引出并加以扩充,有利于使用者接受。

《信号与线性系统分析》课程是在假定系统为线性系统的条件下,研究信号的分解、线性系统的响应、信号与系统相互作用等问题,同时研究由此而引出的各种物理概念和重要应用。学习《信号与线性系统分析》应当具备较好的数学、电路分析和物理学基础。慎密的思考习惯、良好的逻辑思维能力和清晰的思路会有助于更好地掌握本课程的主干内容。

本书使用数学工具较多,对问题的讨论又涉及较多的物理概念,因而本书内容兼有数学和物理课程的特点。学好本课程的标志首先是能用其概念体系解释各种涉及课程内容的物理现象,其次要准确而简练地解决相应的分析和计算问题。信号分解的条件及方法,不但在各种域中推导求解系统的方法思路统一,同时也是诠释许多物理现象和概念的根本依据。要学会将复杂的问题分解为简单问题,并用叠加的方法求解的思维方式和技巧。从学习知识的较高的层次看,《信号与线性系统分析》课程的核心是处理问题的思想方法和严谨的科学态度。

我国高等学校教学中存在的较普遍的问题之一是课堂灌输偏多,对于学生自己去掌握知识的积极性则发挥得不够。我们不主张在使用本书时逐章逐节地依次在课堂上讲一遍。本书重视基本概念的理解、各种性质和定律的物理解释和应用、数学方法的活用和运算的准确性。在符合教学大纲基本要求的前提下,教师完全可以根据自己的经验和观点,在内容的取舍、讲解的次序和讲解问题的方法上采取不同的做法,而不必过多地受教材的约束。比如,可以减少一点讲课时数,留一部分内容让学生自学并组织讨论,以培养学生独立学习的能力。学生也应当懂得,学习一门课程不能只依靠教科书,应当尽量接触科学和工程实际中出现的信号与系统分析的问题,通过具体问题的分析巩固理论知识。

由于本书内容是信号与系统分析的基础内容,学习者应当通过本书内容的学习集中力量掌握有关的基本理论和基本分析方法。所以,《信号与线性系统分析》不可能也不应

当把信号与线性系统方面的内容包罗无遗。例如随机信号、反馈系统、综合理论等内容,本书基本上未涉及或未作深入讨论。

信号与线性系统这一学科的内容极为丰富,有各种可能的途径和方式来进行取材以形成该方面一门基本课程的内容。在组织该方面课程教学时,为使该教材对教师具有这样的灵活性和最大的可用性,适当深度地选用本教材的一部分内容,可以构成为弱电专业以外的专业开设《信号与线性系统分析》的课程。例如,对于学习过自动控制课程的专业来说,本教材中有关拉普拉斯变换的讨论就可以少讲或不讲。

本书得到山东大学出版基金资助。在重新编写本书过程中,参考了其他高等院校的同类教材及引进的国外教材,并从中获得许多教益和启迪,一些同行专家还提出有益的建议,在此一并致谢。作者希望在使用本书过程中提出宝贵建议和意见,并期望与其他院校师生进行交流,以提高信号与系统理论的教学质量。

作者

2002年5月于山东大学

# 目 录

<b>第一章 信号与系统的基本概念</b> .....	(1)
§ 1.1 信号与系统 .....	(1)
§ 1.2 信号的描述与分类 .....	(2)
§ 1.3 典型信号 .....	(5)
§ 1.4 信号的分解.....	(11)
§ 1.5 信号的运算.....	(14)
§ 1.6 系统的分类.....	(22)
习 题 .....	(26)
<b>第二章 连续时间系统的时域分析</b> .....	(30)
§ 2.1 线性非时变系统分析方法概述.....	(30)
§ 2.2 线性连续系统的数学模型及算子表示法.....	(31)
§ 2.3 微分方程的经典解法.....	(34)
§ 2.4 线性系统的零输入响应与零状态响应.....	(37)
§ 2.5 线性系统的模拟.....	(42)
习 题 .....	(45)
<b>第三章 傅里叶变换、连续信号与系统的频域分析</b> .....	(50)
§ 3.1 引 言.....	(50)
§ 3.2 周期信号的傅里叶级数.....	(50)
§ 3.3 周期信号的频谱.....	(53)
§ 3.4 周期信号傅氏级数的性质.....	(55)
§ 3.5 非周期信号的频域分析——傅里叶变换.....	(60)
§ 3.6 典型非周期信号的频谱.....	(62)
§ 3.7 傅里叶变换的性质.....	(66)
§ 3.8 周期信号的傅里叶变换.....	(79)
§ 3.9 能量密度与功率密度谱,维纳-欣钦定理.....	(80)
§ 3.10 连续信号与系统的傅里叶分析方法 .....	(85)
§ 3.11 周期信号激励下系统的响应 .....	(87)
§ 3.12 脉冲信号激励下系统的响应 .....	(89)
§ 3.13 无失真传输与理想滤波器 .....	(91)

§ 3.14	系统的物理可实现性	(96)
§ 3.15	信号时间变化速率与其频带宽度的关系	(97)
§ 3.16	抽样定理	(100)
§ 3.17	调制与解调	(104)
§ 3.18	能量与功率的传输问题	(109)
	习 题	(111)
<b>第四章</b>	<b>连续时间系统的复频域分析</b>	(121)
§ 4.1	引 言	(121)
§ 4.2	拉普拉斯变换及其收敛域	(122)
§ 4.3	常用函数的拉普拉斯变换	(128)
§ 4.4	拉普拉斯变换的基本性质	(131)
§ 4.5	拉普拉斯反变换	(140)
§ 4.6	线性系统的复频域分析法	(147)
§ 4.7	傅里叶变换与拉普拉斯变换的关系	(161)
§ 4.8	系统频谱图的画法	(164)
	习 题	(174)
<b>第五章</b>	<b>离散时间系统的分析</b>	(182)
§ 5.1	离散时间信号——序列	(182)
§ 5.2	离散时间系统的基本概念与数学模型	(191)
§ 5.3	常系数线性差分方程的时域求解法	(195)
§ 5.4	$Z$ 变换	(203)
§ 5.5	$Z$ 反变换	(211)
§ 5.6	$Z$ 变换的性质	(218)
§ 5.7	利用 $Z$ 变换解差分方程	(226)
§ 5.8	$Z$ 域分析系统的特性	(228)
§ 5.9	离散时间系统的频率响应——傅氏变换分析	(232)
§ 5.10	序列傅氏变换的性质	(235)
§ 5.11	频率响应的几何确定方法	(237)
§ 5.12	连续时间信号拉氏变换与其抽样信号 $Z$ 变换间的关系	(239)
§ 5.13	数字滤波器的实现	(242)
	习 题	(247)
<b>第六章</b>	<b>线性系统的状态变量分析</b>	(255)
§ 6.1	引 言	(255)
§ 6.2	连续时间系统状态变量分析的数学模型	(256)
§ 6.3	连续时间系统状态方程的求解	(265)



---

§ 6.4 离散时间系统状态方程的建立 .....	(277)
§ 6.5 离散系统状态方程的求解 .....	(281)
§ 6.6 状态矢量的线性变换 .....	(286)
§ 6.7 由状态方程判断系统的稳定性 .....	(290)
§ 6.8 系统的可控制性与可观测性 .....	(293)
* § 6.9 状态方程的数值解法 .....	(297)
习 题 .....	(300)
<b>第七章 尾 声</b> .....	<b>(304)</b>
§ 7.1 线性系统的理论与进展 .....	(304)
§ 7.2 非线性系统的理论与进展 .....	(311)
<b>参考文献</b> .....	<b>(317)</b>

# 第一章 信号与系统的基本概念

## § 1.1 信号与系统

自然界中,信号总是以其特有的形式存在。

19世纪,人们利用电磁波方式传输携带信息的信号,开始了通信发展的辉煌历程。现在,利用移动通信、广播、视频电视等信号载体,人们可以发送和获取所需要的信息;借助于功能强大的互联网、电子邮件这些信号载体,人们可以实现资料搜集、信息查寻、远程教育、网上购物及娱乐游戏等方面的应用。

要产生信号,并对信号进行加工处理,完成信息传递的任务,需要一定的物理装置,即系统。信号可谓系统中传输、涌动的某种物理量,信号与系统相互依存,不同信号对应着不同的系统。

大型复杂系统包括:天文学中的太阳系,关系人类生存的生态系统,动物神经网络等自然系统;交通运输、工业监控、宇宙探测、互联网等人工系统;电气、机械、声学、光学等物理系统;政治体制、经济结构、生产管理等非物理系统。系统也可能是极其简单的小型系统,如仅由电池、开关和灯泡组成的照明电路。显然不同领域出现的系统,具有不同的物理性质。一般系统框图如图 1.1—1 所示。

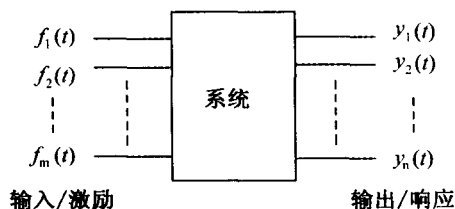


图 1.1—1 系统框图

图中,将系统的外界条件、影响因素称之为输入信号或激励,用  $f_i(t)$  (设  $i = 1, 2, \dots, m$ ) 表示;将系统的结果称之为输出信号或响应,用  $y_j(t)$  (设  $j = 1, 2, \dots, n$ ) 表示。当  $m = n = 1$  时,所对应的系统称之为单输入-单输出 (Single - Input Single - Output, SISO) 系统;否则称之为多输入-多输出 (Multiple - Input Multiple - Output, MIMO) 系统。从集合论的观点来看,系统是指输入集合至输出集合的一个映射或变换机构。信号处理就是通过时间、空间或者频率在不同坐标轴上进行变换,以便更容易掌握信号的特征与性质。

在这个信息高度膨胀的现代社会中,信息科学已渗透到所有自然科学和社会科学领域。可以说,凡是需要数据处理的地方,都将是信号与信息处理的用武之地,只有将新技术

和现代信号处理方法日益融入重要的基础理论课程,才能更好地发挥传统信号处理的作用。

由以上简略的叙述可以看出,信号和系统的基本特性与分析方法,是研究工作者和工程技术人员必须具备的基础知识。本教材就是为研究这方面的基本理论而设置的,它抽去系统的具体物理及社会意义,宏观研究信号作用于系统的运动变化规律,从而揭示信号与系统的一般性能。

## § 1.2 信号的描述与分类

在信号变换和传输系统中,所要处理的主体是信号。信号(Signal)是消息的表现形式与运送载体。所谓消息,是指主观感受到的语言、文字、数据、图像等的总称。而信息则是一个使用更加宽泛的名词,定义为人们对客观世界认识的反映。凡是物质的形态、特性在时间和空间上的变化,以及人类社会的各种活动都会产生信息。千百年来,人类用自己的感觉器官去感受自然界中的各种信息,从而达到认识世界改造世界的目的。可以说,我们生活在信息的海洋中,获取信息是人类的最基本活动之一。

具体在专业应用方面,信息常常是指对消息统计特性的一种定量描述。信号是带有信息的、随时间或空间变化的某种物理量。例如,地球物理学中常常研究密度、气隙度、电阻率等随地球深度变化的信号。气象学则研究大气压、温度、风速等随高度变化的信号。信号所含信息总是寄予于某种变化形式的波形中,依据信号所拥有的这个共性,工程分析时可借助于波形图对信号进行描述。

共享性是信息的一个基本属性。如果信息不能共享,就不能发挥信息的作用,因此传递信息就成为一个非常重要的问题。从古老的烽火台到现代移动通信、互联网,信息传递走过了艰辛而漫长的道路。我国唐代诗人的名句“烽火连三月,家书抵万金”,可谓是对信息传递速度和难度的一种最有想象力的描述。

信息要用某种物理方式表达出来,除了使用文字、图像或声音来表达外,还可以用发送、接收双方事先约定的其他形式的编码来表达。这些语言、文字、图画、编码等等,都是按照各自制定的规则组织起来的,构成含有信息的消息。通常情况下,消息不便于直接传输,所以要利用合适的转换设备,把各种不同的消息转变成为便于携带或传输的信号。由于电信号具有易于测量、变换、处理、传输等特性,工程上,常常将非电信号通过传感器转换为电信号。本教材将主要讨论电信号,电信号指随时间变化的电量,它们通常是电压或电流,在某些情况下,也可以是电荷或磁通。

在数学上,信号可以表示为一个或多个独立变量的函数。例如,语音信号可以表示成声音强度随时间变化的一维函数关系;静态彩色图像信号可以用二维空间一像素点上,红、绿、蓝三个不同波段上的亮度值来表示;常规心电图检查使用12个电极同时提供12路导联信号,医生根据每路的心电图形态及各路间导联关系进行检查与诊断。在本教材的信号分析中,信号和函数二词常相互通用。

### 1.2.1 信号的描述

一般有三种方法描述信号。

- (1) 写出数学表达式:例如:  $f(t) = a\cos\omega t$ 。
- (2) 绘出信号的波形图:这种方法的优点是比较直观。例如:

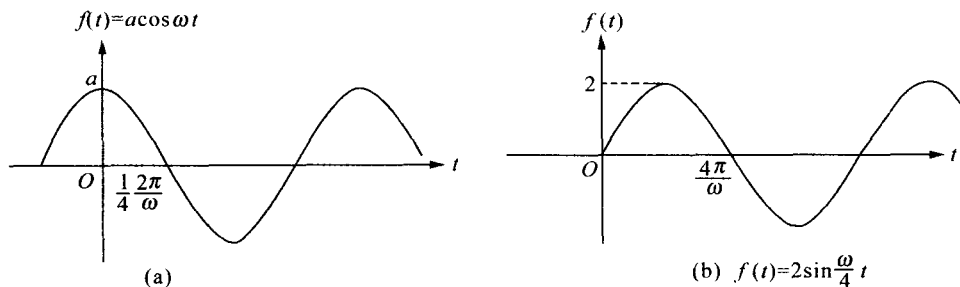


图 1.2-1 (a) 由数学表达式画波形图 (b) 由波形写数学表达式

- (3) 频谱分析或其他正交变换的方法描述信号。

### 1.2.2 信号的分类

对各种信号,可以从不同的角度进行分类。

#### 1.2.2.1 确定性信号和随机信号

从信号参量的确知性角度可把信号分为确定性信号和随机信号两大类。若信号被表示为一确定的时间函数,对于指定的某一时刻,可确定一相应的函数值,这种信号称为确定性信号。如指数信号及矩形脉冲信号等。若没有一个确定的时间函数与信号相对应,信号在某时刻的取值是随机的,只能知道某取值的几率,这类信号称为随机信号。如热噪声和各种不规则的干扰等。在通信系统中传输的信号大都是不确定信号,若传输的信号都是确定的时间函数,接收者就得不到任何新的信息,这样就失去了通信的意义。但理论上应先研究确定性信号,然后再由统计规律进一步研究随机信号的性质。本书只讨论确定性信号。

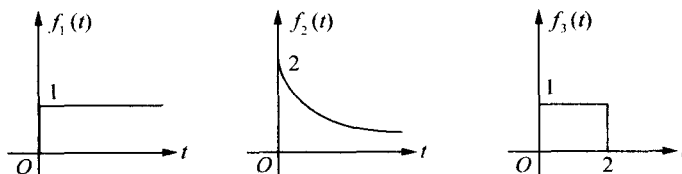


图 1.2-2 确定信号

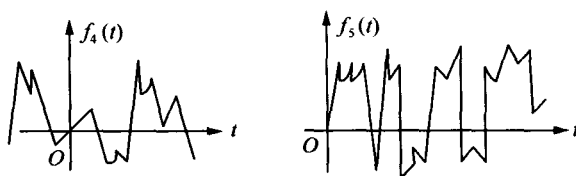


图 1.2-3 随机信号

### 1.2.2.2 周期信号与非周期信号

从信号的周期性上又可将信号分为周期信号和非周期信号。对周期信号有

$$f(t) = f(t + nT) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

其中  $T$  为信号周期。如果令周期信号的周期  $T$  趋于无穷大, 则周期信号就变为非周期信号。

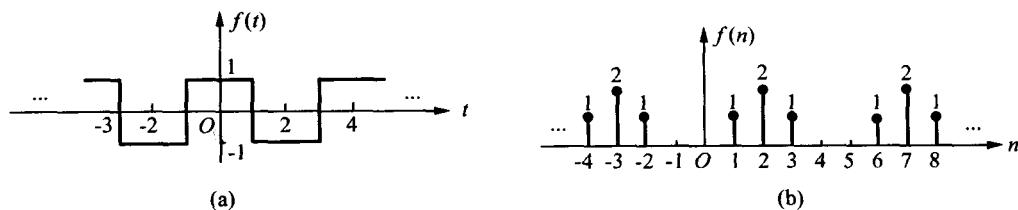


图 1.2-4 周期信号

(a) 连续周期信号 (b) 离散周期信号

需要说明的是, 严格数学意义上的周期信号, 是无始无终地重复着某一变化规律的信号。这样的信号实际上是不存在的, 实际周期信号只是指在较长时间内按照某一规律重复变化的信号。

### 1.2.2.3 有始信号和无始信号

从信号起始时间上可将信号分为有始信号和无始信号。所谓有始信号是指当  $t \geq t_0$  时信号才有值, 其余时间信号之值为零。当  $t_0 = 0$  时, 我们称其为因果信号。当  $t_0 = -\infty$ , 称这类信号为无始信号。实际的信号都是有始信号, 但引入无始信号的概念可给我们分析问题带来许多方便。

### 1.2.2.4 连续时间信号和离散时间信号

从时间的连续性来划分, 又可将信号分为连续时间信号与离散时间信号。如果在所讨论的时间间隔内, 对于任意时间值(除可数不连续点)都可给出确定的函数值, 这类信号称为连续时间信号。例如, 正弦波、三角波等都是连续信号。连续信号的幅值可以是连续的, 也可以是离散的(只取某些规定值)。对于时间和幅值都连续的信号称为模拟信号; 对于时间连续, 幅值离散的信号称为脉冲信号。离散信号在时间上是离散的, 只在某些不连续的规定瞬时给出函数值, 在其他时间没有定义。

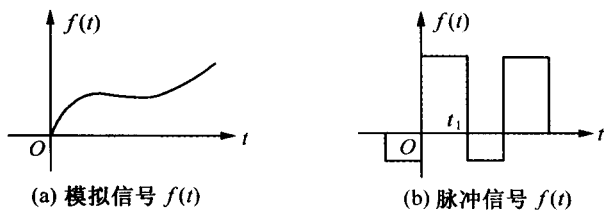


图 1.2—5 连续信号  
(a) 模拟信号  $f(t)$  (b) 脉冲信号  $f(t)$

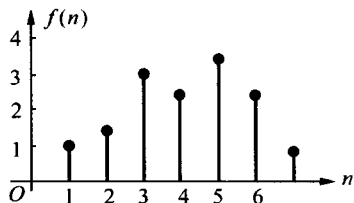


图 1.2—6 离散信号

### 1.2.2.5 能量信号和功率信号

除以上划分外,信号还可从其能量特点分为能量信号和功率信号。在一定的时间间隔  $T$  内,把信号施加在一负载上,负载中就消耗一定的信号能量,把负载归一化,在  $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$  内负载消耗的能量为  $E = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt$ 。将此能量对时间间隔取平均,得此时间间隔内信号的平均功率  $P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt$ 。令  $T \rightarrow \infty$ ,则一般信号属于下述两种情况之一:

能量信号:信号总能量  $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt < \infty$ ; 平均功率  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt = 0$ 。

功率信号:信号总能量  $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt \rightarrow \infty$ ; 平均功率  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt < \infty$ 。

不难看出,周期信号都是功率信号,存在于有限时间内的信号都是能量信号;存在于无限时间内的非周期信号可以是能量信号,也可以是功率信号,要根据信号的具体形式和特点来确定。

## § 1.3 典型信号

本节给出一些典型连续信号的数学表达式和波形图,以后我们经常会遇到这些信号。

### 1.3.1 指数信号

#### 1.3.1.1 数学表达式

$$f(t) = ke^{at} \quad (1.3-1)$$

其中  $\alpha$  为实数, 若  $\alpha > 0$ , 信号随  $t$  增长; 若  $\alpha < 0$ , 信号随  $t$  衰减; 若  $\alpha = 0$ , 信号不随时间变化——直流信号。 $k$  表示指数信号在  $t = 0$  点的初始值。 $|\alpha|$  越大, 函数增长或衰减的速度越快;  $|\alpha|$  越小, 则反之。通常令  $\tau = \frac{1}{|\alpha|}$ ——时间常数, 显然  $\tau$  越大函数增长或衰减的越慢。

1.3.1.2 波形图

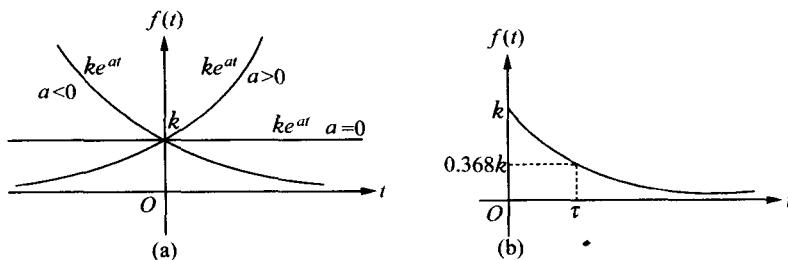


图 1.3—1 指数信号  
(a) 双边指数信号 (b) 单边指数信号

实际中常遇到单边衰减的指数信号, 其数学表达式

$$f(t) = ke^{-\alpha t} \quad t \geq 0, \alpha > 0 \tag{1.3-2}$$

显然  $t = \tau$  时,  $f(\tau) = ke^{-1} = 0.368k$ 。

1.3.1.3 性质

指数信号对时间的微分和积分仍然是指数形式的信号。

1.3.2 正弦信号

正弦信号和余弦信号仅在相位上相差  $\frac{\pi}{2}$ , 在此通称为正弦信号。

1.3.2.1 数学表达式

$$f(t) = k\sin(\omega t + \theta) \tag{1.3-3}$$

式中  $k$  为振幅,  $\omega$  为角频率,  $\theta$  为初相位。

1.3.2.2 波形图

正弦信号是周期信号, 其周期  $T$  与角频率  $\omega$  和频率  $f$  满足以下关系

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$$

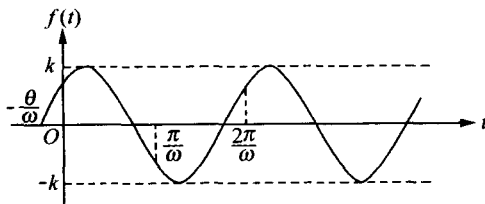


图 1.3—2 正弦信号

正弦信号和余弦信号常借助复指数信号来表示。由欧拉公式：

$$\begin{aligned} e^{j\omega t} &= \cos\omega t + j\sin\omega t \\ e^{-j\omega t} &= \cos\omega t - j\sin\omega t \end{aligned} \quad (1.3-4)$$

所以有

$$\begin{aligned} \sin\omega t &= \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \\ \cos\omega t &= \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \end{aligned} \quad (1.3-5)$$

由于指数函数便于运算，而三角函数便于画图，今后会经常用到上述两对应关系。

### 1.3.2.3 性质

和指数信号类似，正弦信号对时间的微分与积分仍是同频率的正弦信号。

### 1.3.3 复指数信号

若指数信号的指数因子为复数，则称之为复指数信号。其数学表达式为：

$$f(t) = ke^{st} \quad (1.3-6)$$

其中  $s = \sigma + j\omega$ 。

$\sigma$  为复数  $s$  的实部， $\omega$  为虚部。由欧拉公式可将式(1.3-6)展开为

$$ke^{st} = ke^{(\sigma + j\omega)t} = ke^{\sigma t} \cos\omega t + jke^{\sigma t} \sin\omega t \quad (1.3-7)$$

此式表明，一个复指数信号可以分解为实、虚两部分。其中实部包含余弦信号，虚部则为正弦信号。指数因子实部  $\sigma$  表征了正弦与余弦函数振幅随时间变化的情况。若  $\sigma > 0$ ，它们都是增幅振荡；若  $\sigma < 0$ ，则均为衰减振荡。指数因子的虚部  $\omega$  表示正弦与余弦信号的角频率。当  $\sigma = 0$  时，即  $s$  为纯虚数，则正弦和余弦信号都是等幅振荡；当  $\omega = 0$  时，即  $s$  为实数，则复指数信号描述的是一般的指数信号；当  $\sigma = 0, \omega = 0$ ，即  $s$  为零时，则复指数信号表示的是直流信号。

虽然在实际中并不能产生复指数信号，但它概括了多种情况，因此在信号分析理论中是一种非常重要的基本信号。

### 1.3.4 抽样函数

#### 1.3.4.1 数学表达式

$$\text{Sa}(t) = \frac{\sin t}{t} \quad (1.3-8)$$

#### 1.3.4.2 波形图

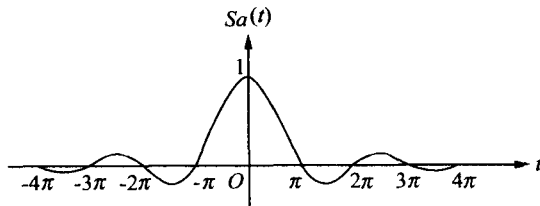


图 1.3-3  $\text{Sa}(t)$  函数



显然其为一偶函数,在  $t$  的正负两个方向上振幅都逐渐衰减。当  $t = \pm\pi, \pm 2\pi, \dots, \pm n\pi$  时函数值等于零。从波形图中我们还可看出信号的能量绝大部分集中在  $-\pi$  到  $\pi$  之间,称  $t = \pm\pi$  为抽样函数的第一对零点。

### 1.3.4.3 性质

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Sa}(t) dt = \pi$$

$$\int_0^{\infty} \text{Sa}(t) dt = \frac{\pi}{2} \quad (1.3-9)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Sa}(kt) dt = \frac{\pi}{k}$$

$$\int_0^{\infty} \text{Sa}(kt) dt = \frac{\pi}{2k} \quad (1.3-10)$$

### 1.3.5 奇异信号

在信号与系统分析中,经常遇到函数本身或其导数有不连续点的情况,这类函数统称为奇异函数或奇异信号。

#### 1.3.5.1 单位阶跃信号 $u(t)$

(1) 定义

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (1.3-11)$$

在跳变点  $t = 0$  处,函数值  $u(0)$  没有定义或规定  $u(0) = \frac{1}{2}$ 。

(2) 波形图

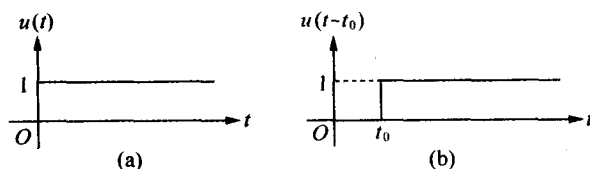


图 1.3-4 (a) 单位阶跃信号 (b) 延时单位阶跃信号

其物理模型为:在  $t = 0$  时接入单位直流电源并一直持续下去。如接入电源的时间推迟到  $t = t_0 (t_0 > 0)$ ,则表示一个“延时单位阶跃信号”其表示式为:

$$u(t-t_0) = \begin{cases} 1, & t > t_0 \\ 0, & t < t_0 \end{cases} \quad (1.3-12)$$

(3) 常用  $u(t)$  表示信号的单边性

如:  $\sin \omega t, 0 < t < \infty$  可表为  $f(t) = \sin \omega t \cdot u(t)$ 。

#### 1.3.5.2 单位斜变信号 $R(t)$

(1) 定义

$$R(t) = \begin{cases} 0, & (t \leq 0) \\ t, & (t \geq 0) \end{cases} \quad (1.3-13)$$