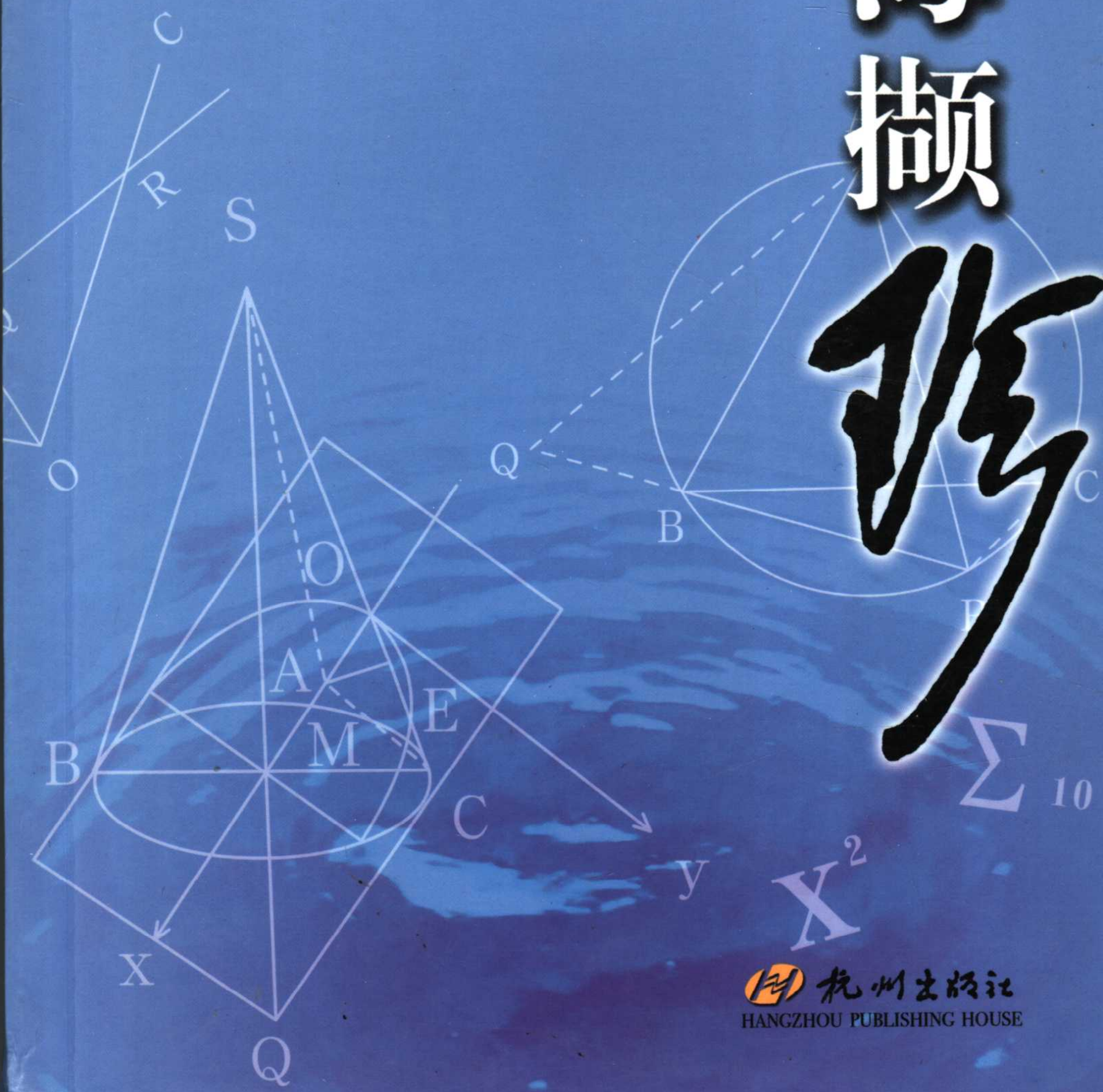
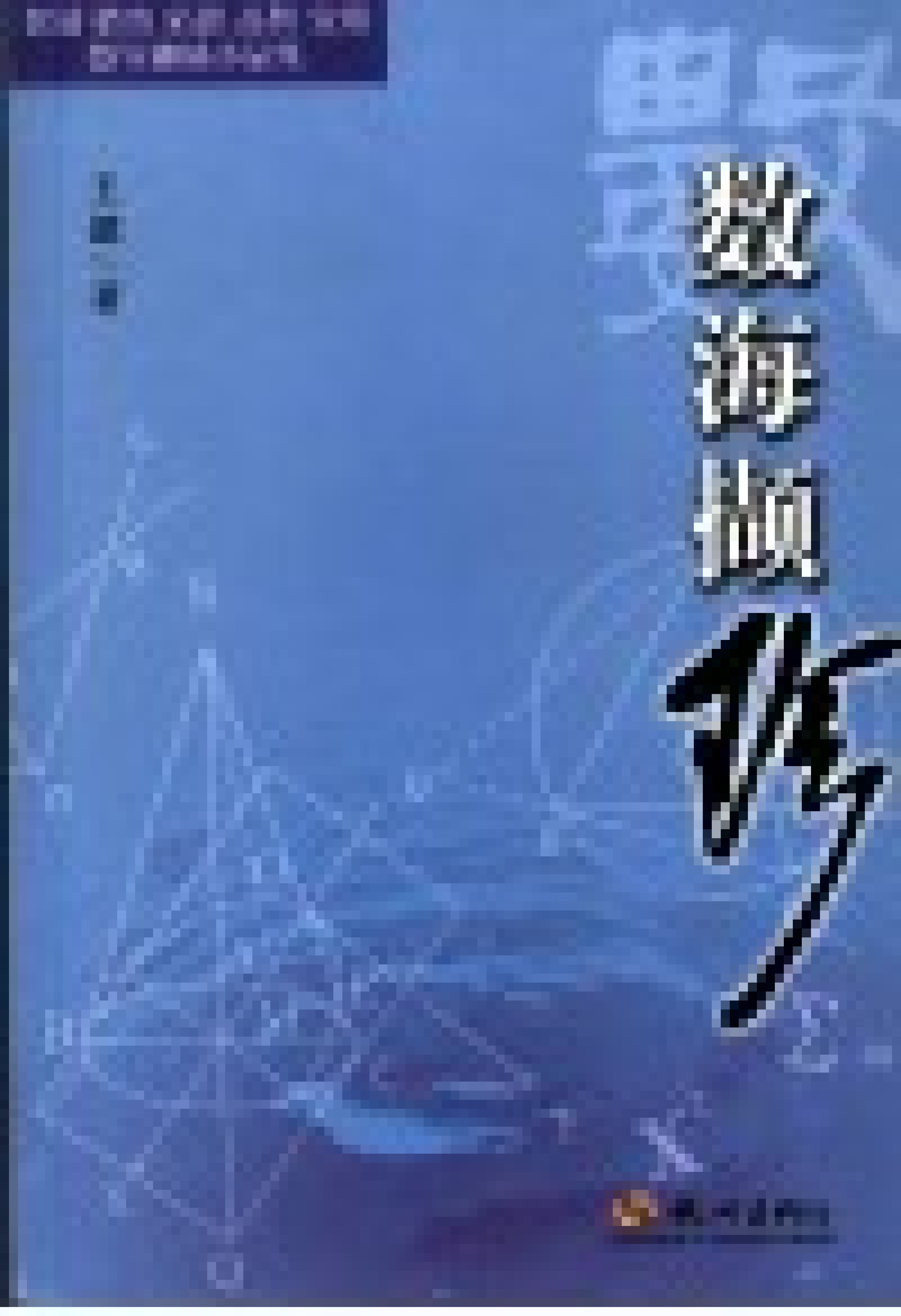
探谜 猎奇 拓思 益智 实用
数学趣味小品集

王勰／著

数海撷珍



杭州出版社
HANGZHOU PUBLISHING HOUSE



数海撷珍

王 韶 著

探秘猎奇拓思益智实用
数学趣味小品集

杭州出版社

图书在版编目(CIP)数据

数海撷珍. / 王勰著. —杭州:杭州出版社,2006.9
ISBN 7-80633-900-0

Ⅰ. 数... Ⅱ. 王... Ⅲ. 数学—文集 Ⅳ. 01—53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 099672 号

数海撷珍

王勰 著

责任编辑	金 波
封面设计	祁睿一
出版发行	杭州出版社(杭州市曙光路 133 号)
	电话:(0571)87997719 邮编:310007
排 版	浙江大学出版社电脑排版中心
印 刷	新雅投资集团有限公司
经 销	新华书店
开 本	880×1230 1/32
字 数	491 千
印 张	17.5
插 页	1
版 次	2006 年 9 月第 1 版 2006 年 9 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 7-80633-900-0/O·11
定 价	20.00 元

序

本书的作者王𩨎(王良法)是我非常敬重的中学老师。在整个高中阶段,我聆听了王老师的谆谆教诲,他的和蔼可亲的形象一直印在我的心田里。受恩师之托,我有幸参与了本书的部分校对工作,并为本书作序。

几十年来,王老师利用教学之余,孜孜不倦地研究数学,取得了丰硕的成果。本书是王老师几十年研究数学的总结。本书是由一篇篇独立的小文章组成,内容丰富,题材广泛。阅读这一篇篇小文章,犹如在阅读一个个有趣的小故事,故事虽小,但情节曲折、新奇,引人入胜,例如,在《求自然数方幂和的简便方法》中,我们看到了代数变换在代数计算中的巨大作用;在《关于 sin9°和 cos9°的几种求法》中,我们看到了计算特殊三角函数是富有技巧性的,需要很好的代数和几何基本功;在《定折线包容最大最小面积问题》中,我们看到了求解这类问题需要敏锐的观察力和良好的归纳、分析能力。

本书的最后二篇是对数论中的两个世界级难题的探讨,虽然证明是不完整的,但是作者敢于挑战世界难题的勇气是令人敬佩的。

本书编排的特点是,各篇文章都是相互独立的,读者可以挑选任何一篇文章来阅读。另外,许多文章的后面,配有名人名言或作者自制的小诗,可以调节阅读的气氛。本书比较适合对数学感兴趣的中学生作为课外书阅读。

现在,王老师虽然已经退休在家,但他研究数学的热情一点也没有减少,依然乐在其中。这种淡泊名利,刻苦钻研的精神,令人感动。我衷心地祝愿王老师身体健康,万事如意。

浙江大学数学系副教授

陈明飞

2006 年 8 月

前　言

我自上中学起就迷上了数学，此后，便与之结下了不解之缘。通过学习数学原理和解答大量习题，领略到数学所具有的无与伦比的特有性质：由抽象共通性而具有应用广泛性。“宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁，无处不用数学”（华罗庚语）。数学是一个原则，无数内容，一种方法，到处可用。只有通过数学，才能彻底了解科学的精髓。因而数学被尊为“科学的皇后”。由于数学的结论是经过千锤百炼、层层严密的逻辑推理而得，因而结论具有非同一般的可靠性、正确性和永久性。在大多数科学中，后一代人往往撕毁了前一代人所建立的成就。但在数学中每一代人都是在老的结构上建立新的成果。五千多年前发现的“勾股定理”至今仍不失其重要性和正确性。完全离开数学知识，那么即使是世界最简单的现象，也无法了解。随着对自然界奥秘的深入探索，因此，也就使得数学充分地发展。

我自上世纪六十年代起，不避寒暑，于教学之余，孜孜不倦研习数学资料，解答疑难杂题，意在创新发现。乐在其中，付出了艰辛，也尝到过甘甜。天道酬勤，收到了丰硕的成果，常受启发而有新的灵感萌动。或产生奇思妙想推广定理、命题，找出别解、简优解；有对计算程序的改进、创新；有对方程特殊解法的探究；有对著名定理的求证、推断。虽不敢说填补了某些空白，也总算添上了几笔新奇色彩。特别对至今悬而未决的世界著名大难题：“在 n^2 和 $(n+1)^2$ 之间必有一素数”及“歌德巴赫猜想”（有皇冠上的明珠的美称）也作了大胆论证和破解。独辟蹊径，开凿了一条用初等数学证明世界级大难题的先河，为彻底解决这两大难题铺砌了路基。异想天开，敢为天下先，定将给有志搞研究探索者一点启示和借鉴。数学犹如浩瀚的大海。我常漫步巡视海滨，寻觅从大海深处漂来的一鳞半爪，偶尔幸运地找到一、二片美丽的贝壳或一颗

光滑的卵石，便如获珍宝。每有心得辄记之以备忘，前后历三、四十年，撰写了六、七十篇数学小品，几易题稿，反复推敲，字数逾三十万。虽非宏篇巨著，精品杰作，亦有一孔之见，千虑一得。内容多属初等数学范畴，只要略具中等数学知识，便可一览无余。最宜广大数学爱好者阅读、浏览，亦可供中学数学教师参考，或作兴趣小组活动内容及数学讲座材料之用。有利于启迪读者睿智，催发灵感，拓展思路，开阔视野，增加识见。抛砖引玉，投石探路，倘能打开读者慧眼，参与研究，且有所得益，是笔者之愿。由于笔者水平有限，知识浅薄，寡闻陋见，谬误之处，在所难免。如蒙学者、读者不吝赐教、指正，不胜感激。

在本书付梓过程中，曾得到浙江大学数学教授陈明飞的热情关怀、支持，自然又受到过我的女儿、中科院博士、数学教授王冠君和儿子、高级数学教师王文策的鼓励和帮助，共同参与审稿，如果没有他们的共同努力和扶持，此书是不可能与大家见面的，在此一并深表感谢。

王良法

2006 年

于浙江象山丹城

目　录

一、两个自然数方幂和的恒等式

由 $1^3=1^2$；

$1^3+2^3=(1+2)^2$；

$1^3+2^3+3^3=(1+2+3)^2$；

$1^3+2^3+3^3+4^3=(1+2+3+4)^2$；

……

推而广之可得：$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots\cdots+n)^2$。

于是可得下列定理：

从 1 起 n 个自然数的立方和等于这些自然数和的平方。

证明：(1)当 $n=1$、2 时命题为真；

(2)设当 $n=k$ 时命题为真，则当 $n=k+1$ 时，

$$
\begin{aligned}
&1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+k^3+(k+1)^3\\
&=(1+2+3+\cdots\cdots+k)^2+(k+1)^3\\
&=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2+(k+1)^3\\
&=(k+1)^2\left[\frac{k^2}{4}+(k+1)\right]\\
&=(k+1)^2\left(\frac{k^2+4k+4}{4}\right)\\
&=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2\\
&=[1+2+3+\cdots\cdots+k+(k+1)]^2
\end{aligned}
$$

命题亦真，可知命题当 n 为任何自然数时皆真，定理得证。

由此可求得

$$
\begin{aligned}
&1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\sum_{m=1}^{n}m^3=\left(\sum_{m=1}^{n}m\right)^2\\
&=(1+2+3+\cdots\cdots+n)^2=\left[\frac{(n+1)n}{2}\right]^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4}
\end{aligned}
$$

此外由下列“三角数”各行之和均等于中间各数之平方。

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & & & =1^2 \\
 & & & & & 1 & 2 & 1 & & & & & & & =2^2 \\
 & & & & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & & & & & & =3^2 \\
 & & & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 & & & & & =4^2 \\
 & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & & & & =5^2 \\
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & & & =6^2 \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & & =7^2 \\
 & & & & & & \cdots\cdots & & & & & & & &
\end{array}
$$

得 $1+2+\cdots\cdots+(n-1)+n+(n-1)+\cdots\cdots+2+1=n^2$

这是因为第 n 行之和

$$1+2+\cdots\cdots+n+\cdots\cdots+2+1=2\left[\frac{(n-1)n}{2}\right]+n$$

$$=n^2-n+n=n^2。$$

由此便可求得：

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$$

$$=\sum_{m=1}^{n}m^2=\sum_{m=1}^{n}(1+2+\cdots\cdots+m+\cdots\cdots+2+1)$$

$$=\sum_{m=1}^{n}\left(2\,\frac{(m-1)m}{2}+m\right)$$

$$=\sum_{m=1}^{n}[(m-1)m+m]$$

$$=\sum_{m=1}^{n}\left[\frac{(m+1)m(m-1)}{3}-\frac{m(m-1)(m-2)}{3}\right]+\frac{(n+1)n}{2}$$

$$=\frac{(n+1)n(n-1)}{3}+\frac{(n+1)n}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

二、可用特殊方法约分的一些分数
(不正规约分法)

这里介绍一个有趣的数学现象，即不用一般的约去分数里的分子和分母中的最大公约数化成最简分数的约分法，而是直接消去分子和分母里相同的数字(不论数位)后剩下的数字组成的分数就成为原分数的最简分数的个别现象。如$\frac{16}{64}=\frac{1}{4}$(消去分子、分母中相同的6，以下与此类似)，$\frac{19}{95}=\frac{1}{5}$，$\frac{49}{98}=\frac{4}{8}$，$\frac{26}{65}=\frac{2}{5}$。能用这种简单特殊的“约分法”(不正规约分法)化非最简分数为最简分数的分数有什么特点？这样的分数有多少个呢？

此类分数当分子、分母都是两位数时，可表示为$\frac{10a+c}{10c+b}=\frac{a}{b}$……(1)

即$10ab+bc=10ac+ab$，或$9ab=c(10a-b)$。这是一个不定方程，可化为$c=\frac{9ab}{10a-b}$……(2)

当a、b遍历1至9的一位数字代入(2)式，能使c为一位数者，就可按(1)式写出具有这种性质的分数。通过实际计算，可知在分子、分母均为两位数字而具有这种性质的分数有且只有上述4个，即当：

(1)$a=1$，$b=4$时，$c=\frac{9ab}{10a-b}=\frac{9\times1\times4}{10-4}=6$，得$\frac{16}{64}=\frac{1}{4}$；

(2)$a=1$，$b=5$时，$c=\frac{9ab}{10a-b}=\frac{9\times1\times5}{10-5}=9$，得$\frac{19}{95}=\frac{1}{5}$；

(3)$a=2$，$b=5$时，$c=\frac{9ab}{10a-b}=\frac{9\times2\times5}{20-5}=6$，得$\frac{26}{65}=\frac{2}{5}$；

(4)$a=4$，$b=8$时，$c=\frac{9ab}{10a-b}=\frac{9\times4\times8}{40-8}=9$，得$\frac{49}{98}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$。

当分数的分子、分母分别是两位数以上时，上述四个分数可扩展成：

(1) $\frac{16\cdots\cdots6}{66\cdots\cdots64}=\frac{1}{4}$ 或 $\frac{1616\cdots\cdots16}{6464\cdots\cdots64}=\frac{11\cdots\cdots11}{44\cdots\cdots44}=\frac{1}{4}$

(2) $\frac{19\cdots\cdots19}{95\cdots\cdots95}=\frac{1}{5}$ 或 $\frac{199\cdots\cdots9}{99\cdots\cdots95}=\frac{1}{5}$

(3) $\frac{2626\cdots\cdots26}{6565\cdots\cdots65}=\frac{2}{5}$ 或 $\frac{266\cdots\cdots6}{66\cdots\cdots65}=\frac{2}{5}$

(4) $\frac{49\cdots\cdots49}{98\cdots\cdots98}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ 或 $\frac{499\cdots\cdots99}{99\cdots\cdots98}=\frac{4}{8}$

另外当分子、分母各是三位数时，由 $\frac{100a+c}{10c+b}=\frac{a}{b}$（$c$ 表两位数）得：

$c=\frac{99ab}{10a-b}\cdots\cdots(3)$

或 $\frac{10c+a}{100b+c}=\frac{a}{b}$，得 $c=\frac{99ab}{10b-a}\cdots\cdots(4)$

当(1)$a=4,b=7$ 时，由(3)$c=\frac{99\times4\times7}{40-7}=84$，得 $\frac{484}{847}=\frac{4}{7}$；

(2)$a=5,b=6$ 时，由(4)$c=\frac{99\times5\times6}{60-5}=54$，得 $\frac{545}{654}=\frac{5}{6}$；

(3)$a=7,b=4$ 时，由(4)$c=\frac{99\times7\times4}{70-4}=42$，得 $\frac{424}{742}=\frac{4}{7}$。

当 a 是一位数，b、c 是两位数时 $\frac{100a+c}{100c+b}=\frac{a}{b}$，$c=\frac{99ab}{100a-b}\cdots\cdots(5)$

当(1)$a=1,b=34$ 时，$c=\frac{99\times1\times34}{100-34}=51$，得 $\frac{151}{5134}=\frac{1}{34}$；

(2)$a=1,b=45$ 时，$c=\frac{99\times1\times45}{100-45}=81$，得 $\frac{181}{8145}=\frac{1}{45}$；

(3)$a=2,b=24$ 时，$c=\frac{99\times2\times24}{200-24}=27$，得 $\frac{227}{2724}=\frac{2}{24}=\frac{1}{12}$；

(4)$a=2,b=35$ 时，$c=\frac{99\times2\times35}{200-35}=42$，得 $\frac{242}{4235}=\frac{2}{35}$；

(5)$a=3,b=25$ 时，$c=\frac{99\times3\times25}{300-25}=27$，得 $\frac{327}{2725}=\frac{3}{25}$。

此外还有 $\frac{3544}{7531}=\frac{344}{731}$，$\frac{143185}{17018560}=\frac{1435}{170560}$，$\frac{4251935345}{91819355185}=\frac{425345}{9185185}$

等等。

另外两种约分法也很特别：

（1）由恒等式$\frac{a^3+b^3}{a^3(a-b)^3}=\frac{a+b}{a+(a-b)}$可“约去”分子、分母中相应项的指数。

如
$$\frac{37^3+13^3}{37^3+24^3}=\frac{37+13}{37+24}=\frac{50}{61}$$

（2）由恒等式$\frac{\lg\left(\frac{m+1}{m}\right)^m}{\lg\left(\frac{m+1}{m}\right)^{m+1}}=\frac{\left(\frac{m+1}{m}\right)^m}{\left(\frac{m+1}{m}\right)^{m+1}}=\frac{m}{m+1}$（$m$ 为正有理数）

可约去对数符号，如$\frac{\lg\left(\frac{9}{4}\right)}{\lg\left(\frac{27}{8}\right)}=\frac{\frac{9}{4}}{\frac{27}{8}}=\frac{2}{3}$（$m=2$）

这种特殊分数的特殊约分法还有很多，等待人们去发掘。这个有趣的数学现象曾在《美国数学月刊》《科学的美国人》发表，引起人们的普遍兴趣，并被列入近 5 年来最佳问题之一（不正规约分）。

三、吉祥、喜庆、奇妙的二〇〇八

二〇〇八，“尔同同发”，二〇〇八等于八乘二五一，“发称尔吾意”。二〇〇八年是一个吉祥喜庆之年。尤为引人瞩目的是这一年是我国首次举办第二十九届奥运会，是中华儿女敞开胸怀迎接世界健儿来华竞技并观瞻华夏风采的一年。2008 又是一个奇妙的数，在距 2008 五百以内竟有 24 个素数，以 $n=2008$ 为对称中心。$n\pm9$，$n\pm21$，$n\pm75$，$n\pm129$，$n+135$，$n\pm231$，$n\pm261$，$n\pm339$，$n\pm381$，$n\pm429$，$n\pm459$，$n\pm465$ 等 24 个数全为素数的最小自然数是 $n=2008$。何以见得？且看以下分解。

综观这 24 个素数与 n 的差距数：±9、±21、±75、±129、±135、±231……都含有公约数 3。其中 ±75、±135、±465 还含有公约数 5，±21、±231 含有公约数 7。可以想见，若 n 减去一个素数后的数一定含有 3、5、7 等约数。果然 $n=2008=3\times5\times7\times19+13=1995+13$，式中还含有 19、13 两个素数，也实属巧合。

寻求 n 的解可用同余式：由 $n\pm9$、$n\pm21$、$n\pm75$、$n\pm231$……等都是素数，可知 3、5、7、11……等都不能整除 n，亦即 $n\not\equiv0(\mathrm{mod}3)$、$n\not\equiv0(\mathrm{mod}5)$、$n\not\equiv0(\mathrm{mod}7)$、$n\not\equiv0(\mathrm{mod}11)$。

$\because \pm9\equiv\pm4(\mathrm{mod}5)$，$n\pm9\not\equiv0(\mathrm{mod}5)$，$\therefore n\not\equiv{1 \atop 4}(\mathrm{mod}5)$

又 $\because n\pm a$ 中的增减数 a 的个位数没有一个是 7，可知

$n+7\equiv0(\mathrm{mod}5)$

$n\not\equiv2(\mathrm{mod}5)$，$\therefore$ 只有 $n\equiv3(\mathrm{mod}5)$……(1)

$\because \pm9=\pm2(\mathrm{mod}7)$，$\therefore n\not\equiv{2 \atop 5}(\mathrm{mod}7)$。$\because \pm129\equiv\pm3(\mathrm{mod}7)$，

$\therefore n\not\equiv{3 \atop 4}(\mathrm{mod}7)$，在模 7 的剩余系 0、1、2、3、4、5、6 中除去 0、2、3、4、

5 后尚剩 1、6 两数，而 1 和模 7 对模 3 又同系：$7\equiv1(\mathrm{mod}3)$因此只有

$n\equiv6(\mathrm{mod}7)\cdots\cdots(2)$

$\because\pm9\equiv\pm9(\mathrm{mod}11)$，$\therefore n\not\equiv{2\atop 9}(\mathrm{mod}11)$；$\because\pm21\equiv\pm10(\mathrm{mod}11)$，

$\therefore n\not\equiv{1\atop 10}(\mathrm{mod}11)$；$\because\pm135\equiv\pm3(\mathrm{mod}11)$，$\therefore n\not\equiv{3\atop 8}(\mathrm{mod}11)$。

又$\pm381\equiv\pm7(\mathrm{mod}11)$，$\therefore n\not\equiv{4\atop 7}(\mathrm{mod}11)$。在模 11 的剩余系 0 至 10 中除去 0、2、9、1、10、3、8、4、7 后尚剩 5、6 两数，其中 $5\equiv11(\mathrm{mod}3)$，

因此只有 $n\equiv6(\mathrm{mod}11)\cdots\cdots(3)$

由(1)(2)(3)式得同余数组$\begin{cases}n\equiv3(\mathrm{mod}5)\\n\equiv6(\mathrm{mod}7)\\n\equiv6(\mathrm{mod}11)\end{cases}$ 而 $231=7\times11\times3=5$ 的倍数余 1，$330=5\times11\times6=7\times47+1$，$210=5\times7\times6=11\times19+1$，参照“孙子算经”中“物不知其数”一问的解法“三人同行七十稀，五树梅花廿一枝，七子团圆正半月，除百另五便得知”。对模 5、7、11 有“五人二三一(231)同心，七位仙女姗姗临(330)，什么(11)金牌尔要赢(210)，增减三八吾(385)便行”。

得 $3\times231+6\times330+6\times210\pm385k=3933\pm385k$，并由 $n\pm465\geq385$，可在 $n>900$ 的 1238、1623、2008、2393、2778、3163、3548、3933 诸数中查验：取诸数增减差距数后，逢合数弃之(末位是奇数的显然不是，因差距数都是奇数)。

$1238\pm9=\begin{cases}1247\text{ 合数，弃之}\\1229\end{cases}$　　$1623\pm9=\begin{cases}1632\text{ 合数}\\\text{弃之}\end{cases}$

$2778\pm9=\begin{cases}2787\text{ 合数}\\\text{弃之}\end{cases}$　　$2008\pm9=\begin{cases}2017\\1999\end{cases}$

$2008\pm21=\begin{cases}2029\\1987\end{cases}$　　$2008\pm75=\begin{cases}2083\\1933\end{cases}$

$2008\pm129=\begin{cases}2137\\1879\end{cases}$　　$2008\pm135=\begin{cases}2143\\1873\end{cases}$