（人教版A必修4）

走向大学丛书

新编数学

《数学ABC》编写组 编

ABC

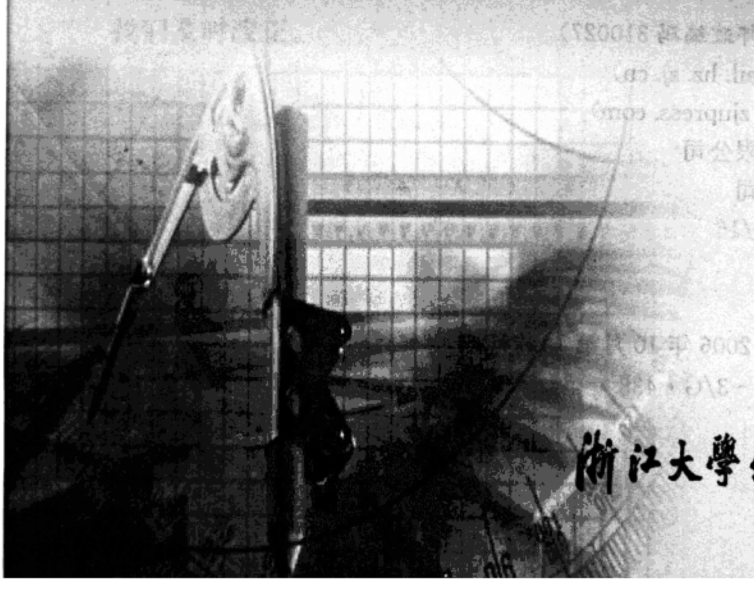
ZOUXIANG DAXUE CONGSHU

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大學出版社

数学ABC

必修（4）

《数学ABC》编写组编



浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学 ABC.(必修 4)/《数学 ABC》编写组编. 5 版.
—杭州:浙江大学出版社,2002.1
(走向大学丛书)
ISBN 7-308-02876-3

Ⅰ.数... Ⅱ.数... Ⅲ.数学课—高中—教学
参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 090119 号

责任编辑 杨晓鸣
封面设计 刘依群
出版发行 浙江大学出版社
(杭州浙大路 38 号 邮政编码 310027)
(E-mail:zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址:http://www.zjupress.com)
排　　版 杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷 杭州杭新印务有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16
印　　张 6.25
字　　数 160 千字
版 印 次 2002 年 1 月第 5 版 2006 年 10 月第 12 次印刷
书　　号 ISBN 7-308-02876-3/G·438
定　　价 8.00

修订说明

浙江大学出版社出版的“走向大学丛书”，即高中各学科 ABC 丛书，已经畅销了十几年，销售了数百万册，使无数莘莘学子受益匪浅。丛书之所以能受到广大读者的青睐，究其原因，就是有一支高素质的作者队伍支撑，他们对教材把握得恰到好处，保证了图书的科学性、创新性和超前性。丛书的作者都是来自杭州二中、杭州高级中学、绍兴一中、湖州中学等一些全国知名学校的特级教师和资深高级教师。

随着高中新课程标准的实施，高中新一轮课程改革已在全省铺开。为了帮助广大师生更好地理解和把握新教材的思想、理念，我们对丛书进行了全面修订。修订时以浙江省选用的新课程标准教材为蓝本，按课时编写，强调实用性、操作性、创新性和科学性。

本次修订删除了原有的内容提要、课文重点分析等一些不适用的内容，保留了原有 A、B、C 三级练习。其中 A 级练习是课标要求达到的基本要求；B 级练习是课标要求达到的知识应用能力；C 级练习是课外拓展，着重训练学生的思维能力。三级练习相互渗透、相互启发。

鉴于时间仓促，丛书不可能尽善尽美，敬请各位读者提出宝贵的建议，以便我们及时改正。

CONTENTS 目录

第1章 三角函数

1.1 任意角和弧度制 / 1

1.1.1 任意角 / 1
1.1.2 弧度制 / 3

1.2 任意角的三角函数 / 5

1.2.1 任意角的三角函数(1)——定义、符号及诱导公式(一) / 5
1.2.1 任意角的三角函数(2)——三角函数线 / 7
1.2.2 同角三角函数的基本关系(1)——求值问题 / 9
1.2.2 同角三角函数的基本关系(2)——化简与证明 / 11

1.3 三角函数的诱导公式 / 13

1.3.1 三角函数的诱导公式(1)——公式(二)、(三)、(四) / 13
1.3.1 三角函数的诱导公式(2)——公式(五)、(六) / 15
《任意角的三角函数》单元复习 / 16

1.4 三角函数的图像与性质 / 19

1.4.1 正弦函数、余弦函数的图像 / 19
1.4.2 正弦函数、余弦函数的性质(1)——周期性、奇偶性 / 21
1.4.2 正弦函数、余弦函数的性质(2)——单调性 / 23
1.4.3 正切函数的性质与图像 / 25

1.5 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图像 / 27

1.6 三角函数模型的简单应用 / 30

《三角函数的图像与性质》单元复习 / 32
第一章 《三角函数》测试 / 35

第2章 平面向量

2.1 平面向量的实际背景及基本概念 / 38

2.2 平面向量的线性运算 / 40

2.2.1 向量加法运算及其几何意义 / 40
2.2.2 向量减法运算及其几何意义 / 41
2.2.3 向量数乘运算及其几何意义 / 43

2.3 平面向量的基本定理及坐标表示 / 45

2.3.1 平面向量基本定理 / 45
2.3.2 平面向量的正交分解及坐标表示 / 47
2.3.3 平面向量的坐标运算 / 47
2.3.4 平面向量共线的坐标表示 / 49

2.4 平面向量的数量积 / 51

2.4.1 平面向量数量积的物理背景及其含义 / 51
2.4.2 平面向量数量积的坐标表示、模、夹角 / 52

2.5 平面向量应用举例 / 54

2.5.1 平面几何中的向量方法 / 54
2.5.2 向量在物理中的应用举例 / 54
第二章 《平面向量》单元复习 / 56
第二章 《平面向量》测试 / 59

第3章 三角恒等变换

3.1 两角和与差的正弦、余弦和正切公式 / 61

3.1.1 两角差的余弦公式 / 61
3.1.2 两角和与差的正弦、余弦、正切公式(1)——两角和与差的正、余弦公式 / 62
3.1.2 两角和与差的正弦、余弦、正切公式(2)——两角和与差的正切公式 / 64
3.1.3 二倍角的正弦、余弦、正切公式 / 66

3.2 简单的三角恒等变换(1)——半角公式 / 68

3.2 简单的三角恒等变换(2)——$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$ / 70

《三角恒等变换》单元复习 / 72
第三章 《三角恒等变换》测试 / 75

综合测试 / 77

参考答案 / 79

第1章 三角函数

1.1 任意角和弧度制

1.1.1 任意角

范例解读

例1 下列各命题正确的是 （　　）

A. 终边相同的角一定相等

B. 第一象限角都是锐角

C. 锐角都是第一象限角

D. 小于90°的角都是锐角

解法1 对于A，-60°和300°是终边相同的角，但它们并不相等，∴ 应排除A.

对于B，390°是第一象限角，可它不是锐角，∴ 应排除B.

对于D，-60°是小于90°的角，但它不是锐角，∴ 应排除D.

综上，应选C.

解法2 ∵ 锐角的集合是$\{\alpha \mid 0^\circ<\alpha<90^\circ\}$，①

第一象限角的集合是$\{\alpha \mid k\cdot 360^\circ<\alpha<k\cdot 360^\circ+90^\circ, k\in \mathbf{Z}\}$， ②

对于②，当$k=0$时，②与①相同，

∴ 锐角是第一象限角，应选C.

点评 (1) 可根据各种角的定义，利用排除法予以解答. 要想否定一个命题，只须举出一个反例即可，解法1就是恰当地举出反例，将A、B、D三个选项予以排除，从而确定选项C.

(2) 可根据锐角和第一象限角的定义，利用定义直接判断，解法2就是.

例2 已知α是第一象限的角，那么$\frac{\alpha}{2}$是第几象限的角？

分析 根据α所在范围求出$\frac{\alpha}{2}$的范围，然后利用终边相同的角的关系判定$\frac{\alpha}{2}$所在象限.

解 ∵ α是第一象限的角，

∴ $k\cdot 360^\circ<\alpha<k\cdot 360^\circ+90^\circ, k\in \mathbf{Z}$.

∴ $k\cdot 180^\circ<\frac{\alpha}{2}<k\cdot 180^\circ+45^\circ, k\in \mathbf{Z}$.

若k为偶数，不妨设$k=2n\ (n\in \mathbf{Z})$，

则 $n\cdot 360^\circ<\frac{\alpha}{2}<n\cdot 360^\circ+45^\circ$，

∴ $\frac{\alpha}{2}$为第一象限角.

若k为奇数，不妨设$k=2n+1\ (n\in \mathbf{Z})$，

则 $n\cdot 360^\circ+180^\circ<\frac{\alpha}{2}<n\cdot 360^\circ+225^\circ$，

∴ $\frac{\alpha}{2}$为第三象限角.

综上所述，$\frac{\alpha}{2}$为第一或第三象限角.

点评 已知α的象限，确定$\frac{\alpha}{2}$的象限是三角中经常遇到的问题. 一般地，α所在象限与$\frac{\alpha}{2}$所在范围有如图1－1所示的关系：图中数字表示α所在象限，数字所在范围表示$\frac{\alpha}{2}$所在范围. 如图中数字1表示第一象限的角，那么$\frac{\alpha}{2}$的范围为阴影范围.

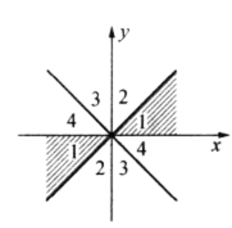


图1－1

分级训练

A级

1. 设$\alpha=-390°$，则与α终边相同的角可以表示为　(　　)

A. $k\cdot360°+30°, k\in\mathbf{Z}$

B. $k\cdot360°+150°, k\in\mathbf{Z}$

C. $k\cdot360°+210°, k\in\mathbf{Z}$

D. $k\cdot360°+330°, k\in\mathbf{Z}$

2. 在0°～360°之间，与2001°的终边相同的角是　(　　)

A. 21°　B. 159°　C. 201°　D. 339°

3. 以下各角中，属于第三象限的角是 (　　)

A. −480°　　B. 120°

C. 720°　　D. 450°

4. 与−496°终边相同的角是________，它是第________象限的角，它们中最小的正角是________，最大的负角是________.

5. 时针经过3小时20分，则时针转过的角度为________，分针转过的角度为________.

6. 在0°～360°间，找出与下列各角终边相同的角，并指出是哪个象限的角：

(1) −540°；　(2) −39°；

(3) −1430°29′；　(4) 1644°

7. 写出角α在下列各位置时的集合S：

(1) 角的终边与直线$x+y=0$重合；

(2) 角的终边在图1-2所示的阴影中(不包括边界)；

(3) 角的终边在图1-3所示的阴影中(包括边界).

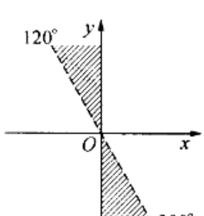


图1-2

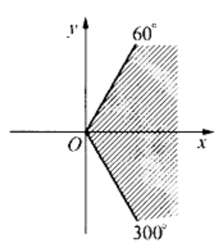


图1-3

B级

8. 已知集合$A=\{$第一象限角$\}$，$B=\{$正的锐角$\}$，$C=\{$小于90°的角$\}$，下列表示这三个集合间的关系中，正确的是　(　　)

A. $A=B=C$　　B. $A\supsetneqq B=C$

C. $A\cap C=B$　　D. $B\subsetneqq A\cap C$

9. 若角2α的终边在x轴上方，那么α是　(　　)

A. 第一象限角

B. 第一或第二象限角

C. 第一或第三象限角

D. 第一或第四象限角

10. 角α、β的终边关于y轴对称，则α、β的关系为　(　　)

A. $\alpha-\beta=90°$

B. $\alpha-\beta=(2k+1)\cdot180°\ (k\in\mathbf{Z})$

C. $\alpha+\beta=180°$

D. $\alpha+\beta=(2k+1)\cdot180°(k\in\mathbf{Z})$

11. 以下有四个命题：① 小于90°的角是锐角；② 第一象限的角一定不是负角；③ 锐角是第一象限的角；④ 第二象限的角必大于第一象限的角. 其中，正确命题的序号是________.

12. 若φ是第二象限角，那么$\frac{\varphi}{2}$和2φ分别是第几象限角?

13. 若集合
$M=\{\alpha \mid k\cdot 180^\circ+30^\circ<\alpha<k\cdot 180^\circ+90^\circ, k\in \mathbf{Z}\}$,
$N=\{\beta \mid k\cdot 360^\circ-45^\circ<\beta<k\cdot 360^\circ+45^\circ, k\in \mathbf{Z}\}$,
求 $M\cap N$.

C级

14. 如图 1-4,点 A 在半径为 1 且圆心在原点的圆上,且 $\angle AOx=45^\circ$. 点 P 从点 A 出发,依逆时针方向等速地沿单位圆圆周旋转. 已知 P 在 1 秒钟内转过的角度为 $\theta(0^\circ<\theta<180^\circ)$,经过 2 秒钟到达第三象限,经过 14 秒钟后又回到出发点 A,求 θ,并判断其所在的象限.

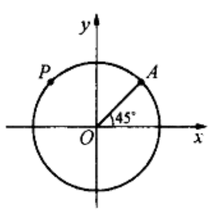


图 1-4

1.1.2 弧度制

范例解读

例 1 集合 $M=\{x \mid x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}, k\in \mathbf{Z}\}$, $N=\{x \mid x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2}, k\in \mathbf{Z}\}$,则(　　)

A. $M=N$　　B. $M\supsetneqq N$

C. $M\subsetneqq N$　　D. $M\cap N=\varnothing$

解法 1 $M=\{x \mid x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}, k\in \mathbf{Z}\}=\{x \mid x=\frac{\pi}{4}(2k+1), k\in \mathbf{Z}\}$, $N=\{x \mid x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2}, k\in \mathbf{Z}\}=\{x \mid x=\frac{\pi}{4}(k+2), k\in \mathbf{Z}\}$.

由于当 $k\in \mathbf{Z}$ 时, $2k+1$ 是奇数, $k+2$ 是整数,显然 $M\subsetneqq N$,故应选 C.

解法 2 由于 $\frac{k\pi}{2}(k\in \mathbf{Z})$ 表示终边与 x 轴和 y 轴重合的角的集合,所以 $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}(k\in \mathbf{Z})$ 表示终边落在与直线 $y=x$ 和 $y=-x$ 重合的 4 个位置.

又由于 $\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2}(k\in \mathbf{Z})$ 表示终边落在与 x 轴、y 轴及直线 $y=\pm x$ 重合的 8 个位置上显然 $M\subsetneqq N$,故应选 C.

点评 解法 2 采用数形结合,易见比解法 1 直观、明了.

例 2 已知扇形的周长为 30,当其半径 r,圆心角 α 各取什么值时,扇形的面积 S 最大?最大值为多少?

解 ∵ 扇形的半径为 r,

∴ 扇形的弧长为 $30-2r\left(r\in\left(\frac{30}{\pi+2}, 15\right)\right)$,

∴ 扇形面积 $S=\frac{r}{2}\cdot(30-2r)=15r-r^2$

$$=-\left(r-\frac{15}{2}\right)^2+\frac{225}{4}.$$

∴ 当 $r=\frac{15}{2}$ 时,扇形的面积最大,最大值为 $\frac{225}{4}$,此时扇形中心角 $\alpha=\dfrac{30-2\times\frac{15}{2}}{\frac{15}{2}}=2$.

所以当半径为 $\frac{15}{2}$,圆心角为 2 rad 时,扇形的面积最大,最大值为 $\frac{225}{4}$.

点评 求解最值问题一般是寻求所求

最值的变量与某个变量的函数关系，利用函数的性质来求得最值.

分级训练

A级

1. $-330°$的弧度数为 ( )

A. $-\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{6}$

C. $-\frac{5}{3}\pi$　　D. $-\frac{11}{6}\pi$

2. 终边在 y 轴上的角 α 的集合是 ( )

A. $\{\alpha \mid \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$

B. $\{\alpha \mid \alpha = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$

C. $\{\alpha \mid \alpha = k\pi + \pi, k \in \mathbf{Z}\}$

D. $\{\alpha \mid \alpha = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$

3. 下列各组角中，终边相同的角是 ( )

A. $\frac{k\pi}{2}$ 与 $k\pi + \frac{\pi}{2}(k \in \mathbf{Z})$

B. $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ 与 $\frac{k\pi}{3}(k \in \mathbf{Z})$

C. $(2k+1)\pi$ 与 $(4k \pm 1)\pi(k \in \mathbf{Z})$

D. $k\pi + \frac{\pi}{6}$ 与 $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}(k \in \mathbf{Z})$

4. 四边形四个内角角度之比为 1∶3∶7∶9，则四个内角的弧度数分别为____、____、____、____.

5. (1) $3 - \frac{3}{2}\pi$ 是第____象限角；

(2) $\frac{\pi}{2} - 4$ 是第____象限角.

6. 求与 $-\frac{17\pi}{8}$ 终边相同的角的集合，并指出最小正角和最大负角.

7. 已知扇形的周长为 6cm，中心角为 1 弧度，求扇形的面积.

B级

8. 已知集合 $M = \{x \mid x = \frac{1}{2}k\pi \pm \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\}$，$P = \{x \mid x = \frac{k}{4}\pi, k \in \mathbf{Z}\}$，则 P 与 M 之间的关系是 ( )

A. $P \supsetneqq M$　　B. $M \supsetneqq P$

C. $M = P$　　D. $M \cap P = \varnothing$

9. 设 α、β 满足 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$，则 $\alpha - \beta$ 的范围是 ( )

A. $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$　　B. $(-\pi, \pi)$

C. $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$　　D. $(-\pi, 0)$

10. 若 $M = \{\alpha \mid \alpha = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{5}, k \in \mathbf{Z}\}$，$N = \{\alpha \mid -\pi < \alpha < \pi\}$，则 $M \cap N =$ ________.

11. 若角 α 与 $\frac{7}{5}\pi$ 的终边关于 y 轴对称，且 $\alpha \in (-2\pi, 2\pi)$，则 $\alpha =$ ________.

12. 设集合 $A = \{x \mid k\pi + \frac{\pi}{3} \leqslant x < k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$，$B = \{x \mid x^2 - 4 \leqslant 0\}$，求 $A \cap B$.

13. 已知扇形的周长为10cm，面积为$4cm^2$，求扇形圆心角的弧度数.

C级

14. 如图1-5所示，已知一长为$\sqrt{3}$dm，宽为1dm的长方形木块在桌面上做无滑动翻滚，翻滚到第三面时被一小木板挡住，使木块底面与桌面成30°的角，求点A走过的路程的长及走过的弧度所在扇形的面积之和.

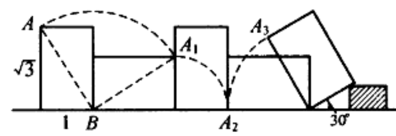


图1-5

1.2 任意角的三角函数

1.2.1 任意角的三角函数(1)——定义、符号及诱导公式(一)

范例解读

例1 已知角α终边上一点P的坐标为$(-\sqrt{3},y)(y\neq0)$，$\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}y$，求$\cos\alpha$和$\tan\alpha$的值.

分析 关键在于求点P的纵坐标y，而这可由已知的角α正弦值列出方程求得.

解 $\because x=-\sqrt{3}$，$\therefore r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{3+y^2}$，

$\therefore \sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{y}{\sqrt{3+y^2}}$，$\therefore \frac{y}{\sqrt{3+y^2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}y$，

解得$y=-\sqrt{5}$或$y=\sqrt{5}$或$y=0$(舍去).

$\therefore$当$y=-\sqrt{5}$时，$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{5+3}}=-\frac{\sqrt{6}}{4}$，

$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{-\sqrt{5}}{-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}}{3}$；

当$y=\sqrt{5}$时，$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{6}}{4}$，$\tan\alpha=-\frac{\sqrt{15}}{3}$.

三角函数定义式不仅可以求三角函数值，也可以求终边上点的坐标，实际上每一个数学关系式都是表述几个量之间的关系，已知其中的某几个量可以求另外一个量.

例2 判断下列三角函数式的符号：

(1) $\sin3\cos4\tan5$；

(2) $\frac{\sin(\cos\theta)}{\cos(\sin\theta)}$.($\theta$为第二象限角)

解 (1) $\because \frac{\pi}{2}<3<\pi$，$\pi<4<\frac{3\pi}{2}$，$\frac{3\pi}{2}<5$

$<2\pi$.

$\therefore \sin 3>0, \cos 4<0, \tan 5<0$,

$\therefore \sin 3\cos 4\tan 5>0$.

(2) $\because$ θ 为第二象限角，$\therefore$ $0<\sin\theta<1$, $-1<\cos\theta<0$,

$\therefore$ $\cos(\sin\theta)>0, \sin(\cos\theta)<0$,

$\therefore \dfrac{\sin(\cos\theta)}{\cos(\sin\theta)}<0$.

分级训练

A级

1. 角 α 的终边过点 $P(3,4)$，则 $\sin\alpha$ 等于 ( )

   A. $\frac{4}{5}$　　B. $\frac{3}{5}$

   C. $\frac{4}{25}$　　D. $\frac{3}{25}$

2. 角 α 的终边过点 $P(x,-1)$，且 $\cos\alpha=\frac{2}{5}\sqrt{5}$，则 x 的值是 ( )

   A. ± 2　　B. $\pm 5\frac{1}{2}$

   C. 2　　D. $\frac{1}{2}$

3. 若 $\sin\theta$ 与 $\tan\theta$ 同号，则 θ 一定是 ( )

   A. 第一、二象限角

   B. 第一、三象限角

   C. 第一、四象限角

   D. 第二、四象限角

4. 若角 α 的顶点为坐标原点，始边与 x 轴正半轴重合，终边在函数 $y=-3x(x<0)$ 的图像上，则 $\sin\alpha=$____，$\cos\alpha=$____，$\tan\alpha=$____.

5. 若 $\sin\alpha>0, \tan\alpha<0$，则 α 是第____象限角.

6. 已知角 α 的终边经过点 $P(-4a,3a)(a\neq 0)$，求 $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha$ 的值.

7. 确定下列各式的符号：

   (1) $\sin 243^\circ\cos 190^\circ$;

   (2) $\sin 1\cos 2\tan 4$.

B级

8. 已知角 β 是三角形的一个内角，下列函数中能取负值的是 ( )

   A. $\sin\beta$　　B. $\cos\beta$

   C. $\tan\frac{\beta}{2}$　　D. $\cos\frac{\beta}{2}$

9. 有下列命题：

   ① 终边相同的角的同名三角函数的值相等.

   ② 终边不同的角的同名三角函数的值不等.

   ③ 若 $\sin\alpha>0$，则 α 是第一、二象限的角.

   ④ 若 α 是第二象限角，且 $P(x,y)(x,y\neq 0)$ 是其终边上一点，则 $\cos\alpha=\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

   其中正确的命题的个数是 ( )

   A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

10. 点 $(\sin 162^\circ, \cos 162^\circ)$ 位于直角坐标系的第____象限.

11. 已知 θ 是第三象限角，且 $\cos\frac{\theta}{2}<0$，则 $\frac{\theta}{2}$ 是第________象限角.

12. 已知 $\sin\alpha<0$ 且 $\tan\alpha>0$.

    (1) 求角 α 的集合；

    (2) 求角 $\frac{\alpha}{2}$ 终边所在的象限；

(3) 试判断 $\tan\frac{\alpha}{2}$，$\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ 的符号.

13. 计算：

(1) $6\sin180° - 7\cos0° + 4\sin90° - 3\cos270°$；

(2) $5\sin90° + 3\cos180° - 2\sin270° + 10\cos0°$；

(3) $\sin\frac{19\pi}{3}+\tan\frac{13\pi}{6}-\cos\frac{7\pi}{3}$.

C级

14. 若角 θ 的终边与函数 $y=-2|x|$ 的图像重合，求 $\sin\theta,\cos\theta,\tan\theta$ 的值.

1.2.1 任意角的三角函数(2)——三角函数线

范例解读

例1 若 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，证明：$\sin\alpha+\cos\alpha>1$.

证明 如图1-6所示，∵ $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，

∴ $\sin\alpha=|MP|$，$\cos\alpha=|OM|$，$|OP|=1$.

在△OPM中，$|MP|+|OM|>|OP|=1$，∴ $\sin\alpha+\cos\alpha>1$.

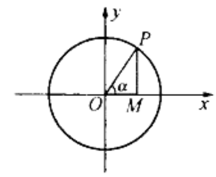


图1-6

点评 正确作出三角函数线，将代数问题几何化.

例2 求适合 $\sin\alpha\geqslant-\frac{1}{2}$ 的 α 的取值范围.

解 在图1-7中作直线 $y=-\frac{1}{2}$ 交单位圆于 A、B 两点，则 $\angle xOA=\frac{7\pi}{6}$，$\angle xOB=-\frac{\pi}{6}$.

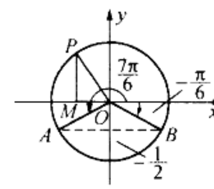


图1-7

过在直线 AB 上方的圆弧上任一点 P 作 $PM\perp x$ 轴于 M，则 $MP=\sin\alpha$.

由图可知 $\sin\alpha\geqslant-\frac{1}{2}$，

∴ α 的取值范围是

$2k\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant\alpha\leqslant2k\pi+\frac{7\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$.

基本的三角不等式如 $\sin\alpha\geqslant a$，$\sin\alpha\leqslant a$，$\cos\alpha\geqslant a$，$\cos\alpha\leqslant a$ $(|a|\leqslant1)$，$\tan\alpha\geqslant b$，$\tan\alpha\leqslant b$ 都可以利用三角函数线来求解.

分级训练

A级

1. 已知角 α 的正弦线和余弦线是方向一正一负，且长度相等的有向线段，则 α 的终边在 ( )

A. 第一象限的角平分线上

B. 第二象限的角平分线上

C. 第三象限的角平分线上

D. 第四象限的角平分线上

2. 已知$\overrightarrow{MP}$、$\overrightarrow{OM}$和$\overrightarrow{AT}$分别是 240°角的正弦线、余弦线和正切线，则下式成立的是 ( )

A. $\overrightarrow{OM}<\overrightarrow{MP}<\overrightarrow{AT}$ B. $\overrightarrow{MP}<\overrightarrow{OM}<\overrightarrow{AT}$

C. $\overrightarrow{AT}<\overrightarrow{OM}<\overrightarrow{MP}$ D. $\overrightarrow{OM}<\overrightarrow{AT}<\overrightarrow{MP}$

3. 在$[0,2\pi]$上使 $\sin x\geqslant\frac{1}{2}$成立的 x 取值范围为 ( )

A. $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ B. $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$

C. $\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$ D. $\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right]$

4. 如图 1－8 所示，$\angle POx$ 的正弦线为____，余弦线为____，正切线为____.

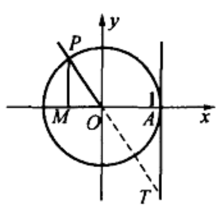


图 1－8

5. 在单位圆中运用三角函数线作出符合下列条件的角的终边：

(1) $\cos x=-\frac{1}{4}$； (2) $\tan x=\frac{1}{2}$.

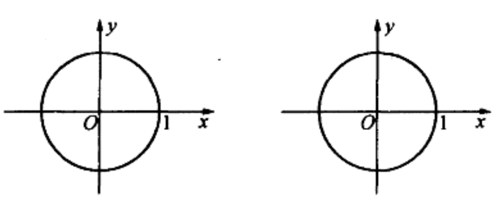


图 1－9

6. 求使不等式 $\cos x<-\frac{1}{2}$成立的 x 的范围.

B 级

7. 设 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\sin\alpha,\cos\alpha,\tan\alpha$ 的大小顺序为 ( )

A. $\sin\alpha>\cos\alpha>\tan\alpha$

B. $\tan\alpha>\cos\alpha>\sin\alpha$

C. $\cos\alpha>\tan\alpha>\sin\alpha$

D. $\tan\alpha>\sin\alpha>\cos\alpha$

8. 设 $E=\{\theta|\cos\theta<\sin\theta,0\leqslant\theta<2\pi\}$，$F=\{\theta|\tan\theta<\sin\theta\}$，则 $E\cap F=$ ( )

A. $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ B. $\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$

C. $\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ D. $\left(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$

9. 若$|\cos x|>|\sin x|$，则 x 的取值范围是________.

10. 利用单位圆，解下列三角不等式：

(1) $\tan x\geqslant-1$；

(2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin x<-\frac{1}{2}$.

11. 求函数 $y=\sqrt{2\cos x-1}$的定义域.

C级

12. 已知 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，利用三角函数线证明：$\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$.

1.2.2 同角三角函数的基本关系(1)——求值问题

范例解读

例1 已知 $\tan\theta=-\frac{4}{3}$，求下列各式的值：

(1) $\frac{5\sin\theta+8}{15\cos\theta-7}$；

(2) $\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta-5\cos^2\theta$.

解 (1) $\because \tan\theta=-\frac{4}{3}<0$，$\therefore \theta$ 是第二或第四象限角.

当 θ 是第二象限角时，

$\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，$\therefore \sin^2\theta=1-\cos^2\theta$.

$\therefore \tan^2\theta=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$.

$\therefore \cos^2\theta=\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{1+(-\frac{4}{3})^2}=\left(\frac{3}{5}\right)^2$. $\therefore \cos\theta=-\frac{3}{5}$，$\sin\theta=\cos\theta\cdot\tan\theta=\frac{4}{5}$.

$$\therefore 原式=\frac{5\times\frac{4}{5}+8}{15\times(-\frac{3}{5})-7}=\frac{12}{-16}=-\frac{3}{4}.$$

当 θ 是第四象限角时，$\cos\theta=\frac{3}{5}$，$\sin\theta=\cos\theta\cdot\tan\theta=-\frac{4}{5}$.

$$\therefore 原式=\frac{5\times(-\frac{4}{5})+8}{15\times\frac{3}{5}-7}=\frac{4}{9-7}=2.$$

$$(2)\ 原式=\frac{\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta-5\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{\tan^2\theta+2\tan\theta-5}{\tan^2\theta+1}=\frac{(-\frac{4}{3})^2+2(-\frac{4}{3})-5}{(-\frac{4}{3})^2+1}=-\frac{53}{25}.$$

1. 在利用公式 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 进行开方运算求三角函数的值时，要注意角所在象限来选择符号，如果没有给出角的范围，则应对它可能在的象限分别进行讨论，如第(1)小题.

2. 若所求三角函数式为 $\sin\theta,\cos\theta$ 的"齐次式"，则可不必求出 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的值，而只须利用同角三角函数关系将其变形为关于 $\tan\theta$ 的代数式，直接代入即得，如第(2)小题.

例2 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=m(|m|\leqslant\sqrt{2})$，求下列各式的值：

(1) $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$； (2) $\sin\alpha-\cos\alpha$.

解 (1) $\because \sin\alpha+\cos\alpha=m$，两边平方得 $\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha=m^2$，

$\therefore \sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{m^2-1}{2}$.

$\therefore \sin^3\alpha+\cos^3\alpha$

$=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha)$

$=m\left(1-\frac{m^2-1}{2}\right)=\frac{m(3-m^2)}{2}$.

(2) $\because (\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

$=1-(m^2-1)=2-m^2$.

$\therefore \sin\alpha-\cos\alpha=\pm\sqrt{2-m^2}$.

$\sin\alpha,\cos\alpha$ 的和与积的关系，即

$\sin\alpha+\cos\alpha=m$ ($|m|\leqslant\sqrt{2}$)，则 $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{m^2-1}{2}$，可通过"$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha$"来实现.

分级训练

A级

1. 下列命题中正确的是 (　　)

A. $\sin\theta=\frac{1}{2}$ 且 $\cos\theta=\frac{1}{2}$

B. 若 θ 为第二象限角，则 $\tan\theta=-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

C. $\sin\theta=0$，且 $\cos\theta=\pm1$

D. $\tan\theta=1$，且 $\cos\theta=-1$

2. 函数 $y=\frac{2\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}+\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$ 的值域是 (　　)

A. $\{3\}$　　B. $\{3,-3\}$

C. $\{-1,1\}$　　D. $\{-3,-1,1,3\}$

3. 若 $\sin x=\frac{3}{5}$，x 是第二象限的角，则 $\tan x$ 的值是 (　　)

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{4}{3}$

C. $-\frac{3}{4}$　　D. $-\frac{4}{3}$

4. 若 $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，且 $\tan\alpha<0$，则 $\cos\alpha=$ ________.

5. 若 $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{2\sin\alpha-\cos\alpha}=2$，则 $\tan\alpha=$ ________.

6. 已知 $\cos\alpha=-\frac{8}{17}$，求 $\sin\alpha$ 和 $\tan\alpha$ 的值.

7. 已知 $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{5}$，且 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，求 $\sin\alpha\cos\alpha$ 及 $\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值.

B级

8. 已知 θ 为锐角，则 $\log_{\cos\theta}(1+\tan^2\theta)$ 的值为 (　　)

A. -2　　B. -1　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 2

9. 若 $\sin\theta=m\left(|m|<1,\theta\in(\pi,\frac{3\pi}{2})\right)$，则 $\tan\theta$ 等于 (　　)

A. $\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}$　　B. $-\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}$

C. $\pm\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}$　　D. $-\frac{\sqrt{1-m^2}}{m}$

10. 已知 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$，则 $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}$ 的值等于 (　　)

A. -2　　B. 2

C. -2 或 2　　D. -1 或 1

11. 已知 $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{8}$，且 $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，则 $\cos\alpha-\sin\alpha$ 的值等于________.

12. 已知 $\tan\alpha=2$，求值：(1) $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$；(2) $\sin\alpha\cos\alpha$；(3) $\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha+1$.

C级

13. 已知 $\theta\in(0,2\pi)$，而 $\sin\theta$，$\cos\theta$ 是方程 $x^2-kx+k+1=0$ 的两个根，求 k 和 θ.

1.2.2 同角三角函数的基本关系(2)——化简与证明

范例解读

例 1 化简：$\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha$.

解法 1 $\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha$

$=\sin^4\alpha+\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)+(1-\sin^2\alpha)$

$=\sin^4\alpha+\sin^2\alpha-\sin^4\alpha+1-\sin^2\alpha$

$=1$.

解法 2 原式 $=\sin^2\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+\cos^2\alpha=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

1. 对三角函数式化简要求应满足以下几点：(1) 函数种类尽可能少；(2) 次数尽可能低；(3) 尽可能不含分母；(4) 项数尽可能少；(5) 尽可能将根号中的式子移到根号外面来.

2. 要注意 1 的代换：$1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$.

例 2 证明：$\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{2(\cos\alpha-\sin\alpha)}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$.

证法 1 由左到右，为得一个分式，将左式通分，分子因式分解以产生因式 $\cos\alpha-\sin\alpha$.

左边 $=\dfrac{\cos\alpha+\cos^2\alpha-\sin\alpha-\sin^2\alpha}{(1+\sin\alpha)(1+\cos\alpha)}=\dfrac{(\cos\alpha-\sin\alpha)(1+\sin\alpha+\cos\alpha)}{1+\sin\alpha+\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha}$.

此时，分子还缺少“2”这个因子，多余$(1+\sin\alpha+\cos\alpha)$这个因式，故分子分母同乘以 2，并尽量设法使分母因式分解产生因式$(1+\sin\alpha+\cos\alpha)^2$，以便约分后得右式，为此应作 $2=1+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$ 的变形.

左边 $=$

$$\frac{2(\cos\alpha-\sin\alpha)(1+\sin\alpha+\cos\alpha)}{1+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha+2\cos\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=\frac{2(\cos\alpha-\sin\alpha)(1+\sin\alpha+\cos\alpha)}{(1+\sin\alpha+\cos\alpha)^2}$$

$$=\frac{2(\cos\alpha-\sin\alpha)}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}=\text{右边}.$$

∴ 原式成立.

证法 2 仍由左到右，因右式分母有因式 $1+\sin\alpha+\cos\alpha$，故直接将左式分子分母同乘以 $1+\sin\alpha+\cos\alpha$.

$$\text{左边}=\frac{1+\sin\alpha+\cos\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}\left(\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\right)$$

$$=\frac{1}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}\left[\frac{(1+\sin\alpha+\cos\alpha)\cos\alpha}{1+\sin\alpha}-\frac{(1+\cos\alpha+\sin\alpha)\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\right]$$

$$=\frac{1}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}\left(\cos\alpha+\frac{\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha}-\sin\alpha-\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}\right)$$

$$=\frac{1}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}(\cos\alpha+1-\sin\alpha-\sin\alpha-1+\cos\alpha)=\frac{2(\cos\alpha-\sin\alpha)}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}=\text{右边}.$$

∴ 原式成立.

证明 3 证明的关键在于使左、右两边变为同分母，而 $1+\sin\alpha+\cos\alpha$ 是最简单的形式，联想到 $\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}=\dfrac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$，$\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ 和等比定理，可将左端两式变形为与右端同分母.

∵ $\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}=\dfrac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\cos\alpha+1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$，

$\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin\alpha+1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha+\sin\alpha}$，

∴ $\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{\cos\alpha+1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}-$