中等职业学校2+1系列教材

数学

SHUXUE

主编 张汉林

首都师范大学出版社

中等职业学校2+1系列教材

数　　学

主　编　张汉林
副主编　杜炳生　陈涛　乔大文

首都师范大学

图书在版编目(CIP)数据

数学/张汉林,杜炳生主编.—北京:首都师范大学出版社,2006.5

(中等职业学校2+1系列教材)

ISBN 7-81064-946-9

Ⅰ.数…　Ⅱ.①张…②杜…　Ⅲ.数学课—专业学校—教材　Ⅳ.G634.601

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第040473号

SHU XUE

数　学

主　编　张汉林

责任编辑　宋林静

首都师范大学出版社出版发行

地　址　北京西三环北路105号

邮　编　100037

电　话　68418523(总编室)

　　　　68982468(发行部)

网　址　www.cnup.cnu.cn

E-mail　cnup@mail.cnu.edu.cn

北京荣海印刷厂印刷

全国新华书店发行

版　次　2006年5月1版

印　次　2006年5月第1次印刷

开　本　787mm×1092mm　1/16开

印　张　15

字　数　263千

印　数　0001-5000册

定　价　20元

前　言

本书是依据教育部2001年颁发的《中等职业学校数学教学大纲》编写的中等职业学校数学教材。

随着中等职业学校学制变为“2+1”后，数学课教学时数相应减少。针对中等职业学校学生的特点，本书在编写时适当降低了教材难度，以学生实用为主，避免内容偏多、偏深、偏难，并注意做好与初中课程内容的衔接。本书力求以学生发展为本，注重提高学生的文化素质，为学习专业理论和掌握操作技能奠定基础，并理论与实际相联系，培养学生观察、分析和解决问题的能力。为适应不同专业的需要，增强了教材的通用性。

本书共分7章。分别是：第一章集合与不等式，第二章函数，第三章三角函数，第四章平面向量，第五章数列与极限，第六章排列、组合与二项式定理，第七章立体几何。极限及立体几何部分节次为选学内容。学校可根据专业需要，按照《中等职业学校数学教学大纲》要求，确定其教学内容。

本书习题包括练习、习题两类。练习供课堂练习用；习题供课内、外作业用。

本书由河南省经济管理学校、河南工业贸易职业学院、南阳工业学校联合组织编写。参编人员有：张汉林、杜炳生、陈涛、乔大文、黄天威、文向前、孙丽、耿祥玉、张勤芳，由张汉林任主编，杜炳生、陈涛、乔大文任副主编。第一章由乔大文、黄天威编写，第二章由张勤芳、文向前编写，第三章由孙丽编写，第四章由耿祥玉编写，第五章由陈涛编写，第六章由张汉林编写，第七章由杜炳生编写。全书由张汉林、杜炳生统稿。

在教材编写过程中，参考了大量数学教材，对这些作者表示感谢，同时对三校领导及同事的大力支持和帮助，也一并表示感谢。

由于编者水平有限，书中难免存在不少缺点和错误，敬请读者批评指正。

张汉林

2006年5月

目　　录

第 1 章 集合与不等式

集合是近代数学的重要基本概念之一. 集合论是研究集合的一般性质的理论,它既是现代数学的基础,又是一门纯数学,同时还是逻辑学的一个重要领域. 集合论思想已经渗透到许多重要的近现代科学中,在计算机、人工智能和日常生活中都有着广泛的应用.

用集合的观点去探讨问题将使你如翼在身,尽享思维飞翔之快乐.

一、集 合

1.1 集合的有关概念

1.1.1 集合的概念

在生活中常常把一些对象看作一个整体．如把所有的男同学看作一个整体，把所有的女同学看作另外一个整体，叫男同学集合的时候，女同学是不会去的；在看奥运会比赛的时候，会兴奋地大叫："那是中国队！"，因为我们把运动员按国籍分成了若干个整体．在数学中，往往也是如此，如把所有自然数看成一个整体，叫自然数集；把所有实数看作一个整体，叫实数集，等等.

一般地，把一些能够确定的对象看作一个整体，叫做集合，简称为集．构成集合的每个对象都叫做集合的元素．如：

所有自然数组成的集合称作自然数集，每一个自然数叫做自然数集的一个元素.

把你家庭的所有成员看作一个整体，也构成了一个集合，你就是这个集合的一个元素.

集合常用大写拉丁字母 $A,B,C,\cdots$ 来表示，集合的元素常用小写拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 来表示.

如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作

$a\in A$，读作 a 属于 A；

如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，记作

$a\notin A$，读作 a 不属于 A.

集合的元素具有以下几个特性：

(1)确定性. 作为集合的元素，必须是确定的．要有明确的标准来判断给定的一个元素是不是这个集合的元素．要么是，要么不是，二者必居其一.

(2)互异性. 集合中的元素都是互不相同的．也就是说，集合中的任何两个元素都是不同的对象；相同的对象归入任何一个集合时，只能算作这个集合的一个元素.

下面是一些常用数集及其记法.

(1)自然数集：全体非负整数构成的集合，记作 $\mathbf{N}$；

(2)正整数集：非负整数集内排除0的集合，记作 $\mathbf{N}_+$ 或 $\mathbf{N}^*$；

(3)整数集：全体整数组成的集合，记作 $\mathbf{Z}$；

(4)有理数集:全体有理数组成的集合,记作 **Q**;

(5)实数集:全体实数组成的集合,记作 **R**.

含有有限个元素的集合叫做有限集,含有无限多个元素的集合叫做无限集．不含任何元素的集合是空集．记作 $\varnothing$.

1.1.2 集合的表示方法

怎样才能明确反映集合的元素及其特性呢？现在就来探讨一下集合的表示方法.

1. 列举法

当集合元素不多的时候,常采用列举法,即把集合中的元素一一列举出来,写在大括号内.

例如,由方程 $x^2=1$ 的所有解组成的集合,可以表示为$\{-1,1\}$;

由 1,2,3,4,5 五个数组成的集合,可以表示为$\{1,2,3,4,5\}$;

由中国古代四大发明构成的集合,可表示为{指南针,造纸术,活字印刷术,火药};

有些集合虽然元素较多,在不发生误解的情况下,也可以用列举法表示．可以列出几个元素作为代表,其他元素用省略号代替．如:

由不大于 100 的自然数构成的集合,可以表示为

$$\{0,1,2,3,\cdots,100\};$$

从 51 到 100 的所有整数组成的集合:

$$\{51,52,53,\cdots,100\};$$

所有正奇数组成的集合:

$$\{1,3,5,7,\cdots\}.$$

只有一个元素组成的集合,称为单元素集．如$\{a\}$,$\{0\}$,{北京}等.

注意:a 与$\{a\}$不同,a 表示一个元素,$\{a\}$表示一个集合,集合$\{a\}$中只有一个元素 a.

用列举法表示集合时不必考虑元素之间的顺序．如:集合$\{1,2\}$与$\{2,1\}$表示同一个集合．即集合元素具有无序性.

2. 描述法

表示集合的另一种方法是描述法,即把集合中元素的公共属性描述出来,写在大括号内来表示集合的方法.

常用格式为:在大括号内先写上这个集合的元素的一般形式,再划一条竖线,在竖线右边写上这个集合的元素的公共属性.

例如,不等式 $x-3>2$ 的解集为$\{x\in\mathbf{R}\mid x>5\}$,或$\{x\mid x>5\}$.

又如,所有直角三角形的集合可以表示为:$\{x\mid x$ 是直角三角形$\}$.

在不致混淆的情况下,可以省去竖线及左边部分.

如:{直角三角形};{大于 104 的实数}.

3. 图示法

表示集合的第三种方法是图示法．即用一条封闭曲线的内部来表示一个集合．如集合$\{1,2,3,4,5\}$可以用图 1 - 1 表示．

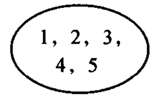

图 1 - 1

例 1　用列举法表示下列集合：

(1) 由所有大于 0 且小于 10 的奇数组成的集合；

(2) 方程 $x^2-2x+1=0$ 的解集.

解　(1) $\{1,3,5,7,9\}$；　(2) $\{1\}$.

例 2　用描述法表示下列集合：

(1) 方程 $x^2+x-1=0$ 的解集；

(2) 所有正奇数组成的集合.

解　(1) $x^2+x-1=0$ 的解集表示为 $\{x \mid x^2+x-1=0\}$；

(2) 正奇数可用式子 $2k+1(k\in\mathbf{N})$ 表示，所有正奇数组成的集合可表示为 $\{x \mid x=2k+1,k\in\mathbf{N}\}$.

练　习

1. 下列各组对象能确定一个集合吗？

(1) 所有很大的实数；

(2) 好心的人；

(3) 咱班的所有男生．

2. 各举一个有限集、无限集、空集的例子．

3. 由实数 $x,-x,|x|$ 所组成的集合，最多含(　　)

A. 2 个元素　B. 3 个元素　C. 4 个元素　D. 5 个元素

4. 请用 $\in$ 或 $\notin$ 填空：

(1) 集合 $A=\{$绝对值小于 4 的整数$\}$，-4 ________ A；-2 ________ A；

(2) 集合 $B=\{$矩形$\}$，菱形________ B；正方形________ B.

5. 用列举法表示下列集合：

(1) $\{x\in\mathbf{N} \mid x$ 是 15 的约数$\}$；

(2) $\{(x,y) \mid x\in\{1,2\},y\in\{1,2\}\}$.

6. 用描述法表示下列集合：

(1) 平方等于 1 的数所组成的集合；

(2) 方程 $x^2-3x+2=0$ 的解集.

习　题　1.1

1. 下列对象是否构成集合？

(1) 所有的直角三角形；

(2) 与一个角的两边距离相等的所有的点；

(3) 本班所有学生；

(4) 本班漂亮的女生.

2. 下列表示的集合或叙述是否正确？

(1) $\{x|x$ 是美丽的小鸟$\}$；

(2) $\{1,1,2\}$；

(3) $\{1,2\}$ 与 $\{2,1\}$ 是同一个集合；

(4) $\{1,2\}$ 与 $\{(1,2)\}$ 是同一个集合，集合中都有两个元素；

(5) $\{(x,y)|x+y=1\}$ 就是 $\{x+y=1\}$；

(6) $\varnothing=0$，$\varnothing=\{0\}$，$\varnothing\in\{0\}$.

3. 用列举法表示下列集合：

(1) 绝对值小于 4 的非正的整数组成的集合；

(2) 方程 $x^2=x$ 的解集；

(3) 大于 3 小于 10 的奇数组成的集合；

(4) 构成英语单词 mathematics 的所有字母组成的集合.

4. 用描述法表示下列集合：

(1) 大于 3 的全体实数构成的集合；

(2) 所有的正偶数构成的集合；

(3) $\{$北京市$\}$；

(4) 方程 $x^2-2x+3=0$ 的解集.

1.2 集合的运算

1.2.1 子集

集合与集合之间会有什么关系呢？会产生什么样的运算呢？

如果集合 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{1,2,3,4,5\}$，$C=\{x|x$ 是小于 6 的正整数$\}$，那么 A 与 B、B 与 C 之间有什么关系呢？

先考查 A 与 B. 首先，我们发现 A 中的每一个元素都是 B 的元素，这时称 A 是 B 的子集.

一般地，对于两个集合 A 和 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，则说集合 A 是集合 B 的子集，记作

$$A\subseteq B（或 B\supseteq A），$$

读作 A 包含于 B，或 B 包含 A（如图 1-2）.

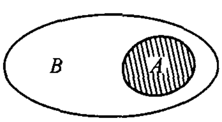

图 1-2

反之，集合 A 不是 B 的子集，则称集合 A 不包含于 B，或集合 B 不包含 A，记作 $A\nsubseteq B$（或 $B\nsupseteq A$）.

注：1. $\subseteq$ 也可写成 $\subset$；$\supseteq$ 也可写成 $\supset$；$\nsubseteq$ 也可写成 $\not\subset$；$\nsupseteq$ 也可写成 $\not\supset$.

2. 规定：空集是任何集合的子集，即 $\varnothing\subseteq A$.

现在我们来看 B 与 C 的关系. B 中有五个元素 1，2，3，4，5，而 C 中的元素同样也是 1，2，3，4，5，即 B 与 C 中元素完全相同. 这时，我们称 B 与 C 相等. 记作 $B=C$.

我们用子集的概念来看，B 中的任一元素都在 C 中，所以 $B\subseteq C$；同样，C 中的任一元素都在 B 中，所以 $C\subseteq B$.

一般地，对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，同时，集合 B 的任何一个元素又都是集合 A 的元素，我们就说集合 A 等于集合 B，记作 $A=B$.

如 $A=\{x|x^2-1=0\}$，$B=\{-1,1\}$，则 $A=B$.

很明显，当 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$ 时，$A=B$.

当 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$ 时，我们说 A 是 B 的真子集．记作：$A\subsetneqq B$（或 $B\supsetneqq A$）.

如 $A=\{1,2\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，则 $A\subsetneqq B$.

例1　写出集合 $A=\{1,2,3\}$ 的所有子集和真子集.

解　集合 A 的子集有

$\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}$

上述子集中，除了集合 A 本身，即 $\{1,2,3\}$ 外，都是 A 的真子集.

注：$\varnothing$ 是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集．任何集合都是它本身的子集，但不是真子集，即 $A\subseteq A$.

例2　用列举法表示集合：$A=\{6$ 的正约数$\}$，$B=\{10$ 的正约数$\}$，$C=\{6$ 与 10 的正公约数$\}$，并用适当的符号表示它们之间的关系.

解　$A=\{1,2,3,6\}$，$B=\{1,2,5,10\}$，$C=\{1,2\}$

$C\subsetneqq A$，$C\subsetneqq B$，$A\subsetneqq B$.

1.2.2　集合运算

1. 交集

看下面两个集合

$$A=\{1,2,3,5\},B=\{1,2,5,8\}.$$

很容易看出集合 $\{1,2,5\}$ 是由两个集合所有公共元素组成的．像这样，对于两个给定的集合 A、B，由既属于 A 又属于 B 的所有元素所构成的集合，叫做 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$，读作 A 交 B（图1-3）.

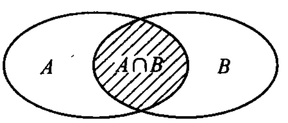

图1-3

由定义可知：$A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$.

上例中，$\{1,2,3,5\}\cap\{1,2,5,8\}=\{1,2,5\}$.

又如 $A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{a,b,e,f\}$，则 $A\cap B=\{a,b\}$.

由交集定义可得，对于任何集合 A,B，有

$A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cap B=B\cap A$.

2. 并集

从集合

$$A=\{-2,1,2\},B=\{-1,1,2\},$$

很容易看出,集合$\{-2,-1,1,2\}$是由所有属于A或B的元素组成的. 像这样,对于两个给定的集合A、B,把它们所有的元素合并在一起构成的集合,叫作A与B的并集,记作$A\cup B$,读作A并B(图1-4).

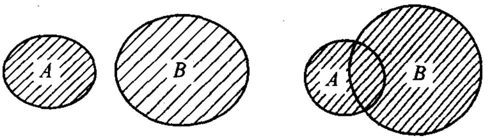

图1-4

由定义可知:$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$.

上例中$A\cup B=\{-2,-1,1,2\}$.

如$A=\{a,b,c,d\}$,$B=\{a,b,e,f\}$,则$A\cup B=\{a,b,c,d,e,f\}$.

由并集定义易知,对于任何集合A,B,有

$$A\cup A=A,A\cup\varnothing=A,A\cup B=B\cup A.$$

注意:集合中元素是互异的. 因此,在求两个集合的并集时,这两个集合的公共元素在并集中只能出现一次.

3. 全集与补集

设集合U是全班同学的集合,集合A是班上所有参加校运动会同学的集合,集合B是班上所有没有参加校运动会同学的集合,集合C是班上所有女同学的集合,集合D是班上所有男同学的集合,集合E是班上所有身高在156 cm以上同学的集合,…,集合A、B、C、D、E…等都是集合U的子集. 像这种情况,我们称集合U是全集.

一般地,有如下的定义:

如果集合S含有所要研究的各个集合的全部元素,这个集合就可以看作一个全集,通常用U来表示.

如通常所研究的数集(整数集、分数集、有理数集、无理数集等)都是实数集的一个子集. 因此,在研究数集时,通常把实数集$\mathbf{R}$看作全集.

对于实数集$\mathbf{R}$,有理数集$\mathbf{Q}$是它的一个子集,除了$\mathbf{Q}$中的元素(即有理数)外都是无理数,所有的这些无理数构成了无理数集合,我们称无理数集合是有理数集$\mathbf{Q}$在全集$\mathbf{R}$中的补集.

一般地,设U是一个全集,A是U的一个子集(即$A\subseteq U$),由U中所有不属于A的元素组成的集合,叫做A在U的补集,记作$\complement_U A$,读作A在U中的补集(图1-5). 即

$\complement_U A=\{x\mid x\in U$ 且 $x\notin A\}$

例如$U=\{1,2,3,4,5,6\}$, $A=\{1,3,5\}$,则$\complement_U A=\{2,4,6\}$.

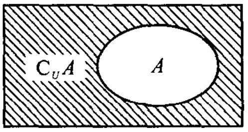

图1-5

例3 设全集$U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$,$A=\{3,4,5\}$,$B=\{4,7,8\}$,求:$A\cap B$,$A\cup B$,$\complement_U A$,$\complement_U B$,$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$,$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$,

$\complement_U(A\cup B)$,$\complement_U(A\cap B)$.

解 $A\cap B=\{4\}$; $A\cup B=\{3,4,5,7,8\}$;

$\complement_UA=\{1,2,6,7,8\}$;$\complement_UB=\{1,2,3,5,6\}$;

$(\complement_UA)\cap(\complement_UB)=\{1,2,6\}$;

$(\complement_UA)\cup(\complement_UB)=\{1,2,3,5,6,7,8\}$;

因为$A\cup B=\{3,4,5,7,8\}$,$A\cap B=\{4\}$,

所以$\complement_U(A\cup B)=\{1,2,6\}$;

$\complement_U(A\cap B)=\{1,2,3,5,6,7,8\}$.

由上例不难发现:$(\complement_UA)\cap(\complement_UB)=\complement_U(A\cup B)$,

$(\complement_UA)\cup(\complement_UB)=\complement_U(A\cap B)$.

练 习

1. 用适当的符号($\in$,$\notin$,$\subsetneqq$,$\supsetneqq$,$=$)填空:

0 ____ $\varnothing$;　0 ____ N;　$\varnothing$ ____ $\{0\}$;　2 ____ $\{x\mid x-2=0\}$;

$\{x\mid x^2-5x+6=0\}$ ________ $\{2,3\}$;　$(0,1)$ ________ $\{(x,y)\mid y=x+1\}$;

$\{x\mid x=4k,k\in\mathbf{Z}\}$ ________ $\{y\mid y=2n,n\in\mathbf{Z}\}$.

2. 求满足$\{1\}\subsetneqq A\subseteq\{1,2,3,4,5\}$的所有集合$A$.

3. 设全集$U=\{x\mid 0\leqslant x<6,x\in\mathbf{Z}\}$,$A=\{1,3,5\}$,$B=\{1,4\}$,求:$\complement_UA$和$\complement_UB$.

4. 设$A=\{x\mid x^2-x-6=0\}$,$B=\{x\mid x^2+x-12=0\}$,求$A\cap B$和$A\cup B$.

习 题 1.2

1. 已知集合$A=\{a,b,c\}$,写出A的所有子集和真子集.

2. 设$U=\{$小于9的正整数$\}$,$A=\{1,2,3\}$,$B=\{3,4,5,6\}$. 求:$\complement_UA$,$\complement_UB$.

3. 设$A=\{1,2,3,4\}$,$B=\{3,4,5,6\}$. 求:$A\cap B$,$A\cup B$.

4. 设$U=\{x\in\mathbf{N}\mid x<10\}$,$A=\{1,5,7,8\}$,$B=\{3,4,5,6,9\}$. 求:$\complement_UA$,$\complement_UB$,$A\cap B$,$A\cup B$,$(\complement_UA)\cap(\complement_UB)$,$(\complement_UA)\cup(\complement_UB)$,$\complement_U(A\cap B)$,$\complement_U(A\cup B)$.

二、命题、充分必要条件

1.3　命题、充分条件和必要条件

能够判断真假的语句叫命题．正确的叫真命题，错误的叫假命题．例如：

①12 > 5.

②3 是 12 的约数.

③0.5 是整数.

这些语句都是命题，都可以判断真假．其中①、②是真命题，③是假命题.

下面三个语句是命题吗？

④3 是 12 的约数吗？

⑤$x > 5$.

⑥站起来！

这三个语句都不是命题，其中④、⑥不涉及真假，⑤无法判断真假.

像⑤这种含有变量的语句常称为开语句(或条件命题).

上述①、②、③都是简单命题．而有些命题则是由简单命题再加上一些逻辑联结词构成的，例如：

(1)10 可以被 2 或 5 整除.

(2)菱形的对角线互相垂直且相互平分.

(3)0.5 是非整数.

像这样的命题叫做复合命题.

我们常用的逻辑联结词有"且"、"或"、"非"等.

如果用 $p,q,r,s\cdots$ 表示命题，则复合命题的形式一般有以下三种：

p 或 q，记作 $p\vee q$

p 且 q，记作 $p\wedge q$

非 p(命题的否定)，记作 $\neg p$

复合命题真假的判定主要依据以下真值表：

p	q	p 且 q
真	真	真
真	假	假
假	真	假