圆锥截线的光学

科学普及出版社

圓錐截綫的光学

(数学通俗讲話第31册)

〔苏〕A. Г. 道尔夫曼著
王 联 芳 譯

科学普及出版社
一九六四年·北京

内 容 提 要

这本向讀者推荐的小册子研究圓錐截綫（椭圓双曲綫，抛物綫）的光学性质。

本书可供中学高年級学生閱讀，也可供中学数学小組参考。

总号：066

圓錐截綫的光学（数学通俗讲話第31册）

ОПТИКА КОНИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ

著　　者：〔苏〕А. Г. 道尔夫曼

譯　　者：王联芳

出 版 者：科学普及出版社

（北京市西直門外郝家湾）

北京市书刊出版业营业许可証出字第 112 号

发 行 者：新华书店

印 刷 者：北京市印刷一厂

开　本：787×1092 1/32　印张：1

1964年 2 月第 1 版　字数：14,000

1964年 2 月第1次印刷　印数：6,954

統一书号：13051·035

定　　价：0.14 元

序

这本小册子考虑到广大的讀者对象，特别是中学和大学的数学小組的参加者和領导者。在这里面所包含的几何光学材料也可以用于物理小組。

本书共四章，前两章讲圓錐截綫的一般知識，后两章专讲圓錐截綫的光学性质。每章之末附有补充材料(作星形記号的)，主要为进一步鉆研之用，也可以略去不讀，并不妨碍其他章节的理解。

本书系以作者过去給斯大林格勒国立师范大学的中学数学小組作的讲演为基础而写成的。

作者得向 В. Г. 保尔强斯基表示衷心的感謝，引以为荣，他讀了我的原稿并提出了許多带批評性的意見。

作　者

目　次

I. 圓錐截(曲)綫

1. 通过同一点 S 并切于球面(图 1)的所有直綫的集合，組成一曲面，叫做**錐面**①。集合的每条直綫叫做錐面的**母綫**。

这两个曲面——球和錐面——相切于圓 n。点 S 叫做錐面的**頂点**，通过 S 和球心的直綫是錐面的**旋轉軸**。

頂点分錐面为两部分，其位置是对称的。每一部分叫做錐面的一叶。由錐面的叶围成的一部分的空間，叫錐面的**腔**。

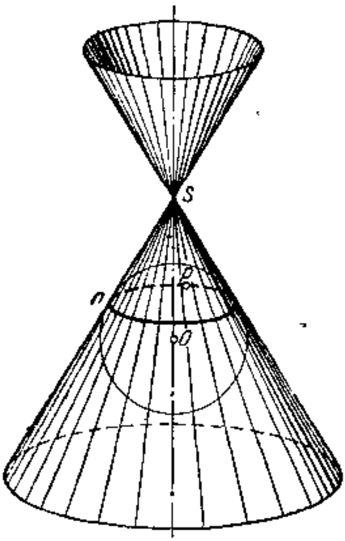

图 1

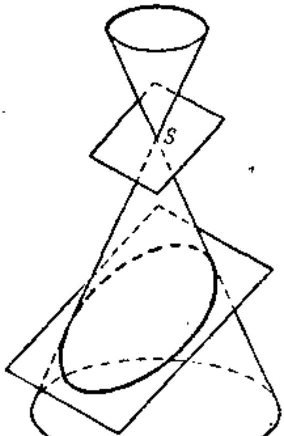

图 2

① 文中所用"錐面"一詞，实指"正圓錐面"——譯者註。

这样一来，錐面由两叶組成，每叶有一腔。

2. 錐面的每一平面截痕叫做**圓錐截綫**。

通过錐面頂点的平面，有三种截綫：**一点**，**一条直綫**和**一对直綫**。

在第一种情况下(图 2)，平面穿过錐面的所有母綫。平行截綫，显然作閉合的卵形曲綫状，其伸长的程度取决于截面对于錐面軸的**傾斜度**。此截綫叫做**橢圓**①。

在第二种情况下(图 3)，除一条母綫外，平面穿过所有的母綫。平面沿着这条母綫与錐面**相切**。平行截綫是一条**无限长**的曲綫，这条曲綫叫做**拋物綫**。

最后，在第三种情况(图 4)下，除**两条**直綫外，平面穿过

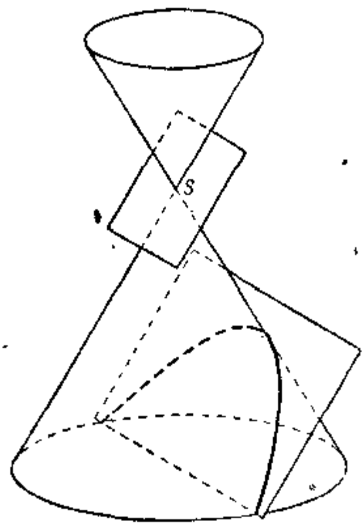

图 3

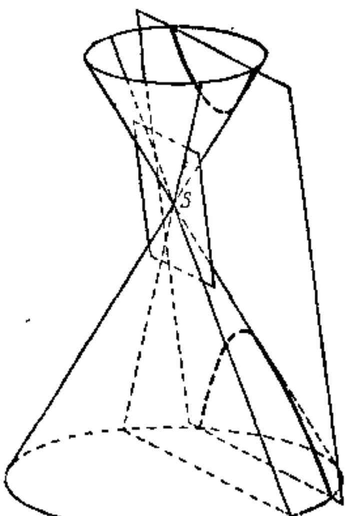

图 4

① 如果平面垂直于軸，得到了圓，它是橢圓的极限情形。

所有的母綫。平行截綫由两支无限长的曲綫組成，錐面的每叶上各有一支。这截綫叫做**双曲綫**。

驟然看来，似乎拋物綫与一支双曲綫几无区别。然而不难懂得，在錐面頂点的观察者来看，拋物綫的两个半支似乎是汇聚于“水平綫”上的一点(这一点在平行于拋物綫平面的母綫的方向上是“可見的”)，而一支双曲綫的两个半支似乎发散到“水平綫”上的两点(这两点在平行于双曲綫平面的母綫的方向上是“可見的”)。

3．如欲对圓錐曲綫知道得更詳細些，需要若干輔助作图。在大多数的輔助作图中，以这两个簡单的定理作基础：

(a) **如果 a 和 b 是从同一点 S 作的球面的二切綫，則由公共点 S 至切点 A 和 B 的二切綫段相等**(图5)。

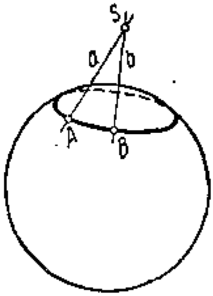

图 5

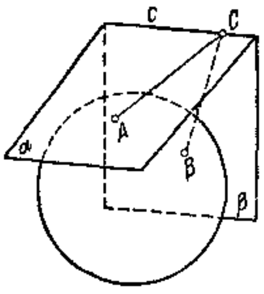

图 6

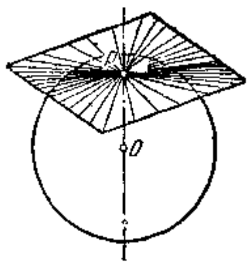

图 7

(b) **如果 α 和 β 是交于直綫 C 并与球面切于 A, B 二点的二平面，則由直綫 C 上任一点至点 A, B 作的二切綫段，与直綫 C 作成等角**(图6)。

4*.① 让点 S 沿球面半径 OP 的延长綫移动(图1)。随着

① 如只求理解本书的主要部分，作星形記号的地方无須閱讀。

点 S 趋近于半径的端点，錐面将愈来愈"展平"。在极限情况下，錐面将与球面上点 P 的切面相合；这时，切圓 n 收縮成切点 P，而母綫变为过这点对球面的切綫(图 7)。

反之，如果点 S 沿半径 OP 的延长綫离 P 越来越远，則錐面将越来越"伸长"。在极限情况下切圓 n 变为球面的大圓——"赤道"，而錐面的一切母綫呈現互相平行状态。此时錐面变成了所謂**柱面***曲面(图 8)。

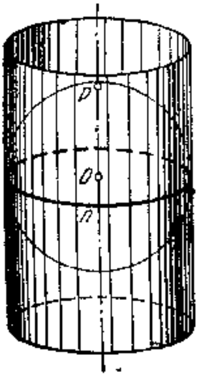

图 8

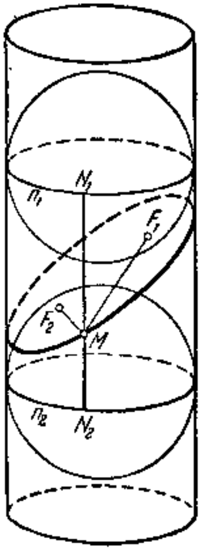

图 9

今考虑柱面的斜截綫——**橢圓**①。

1) 作內接于柱面并切于截綫平面的二球面(图 9)。二切点以 F_1 和 F_2 表之。将截綫上任一点 M 与二点 F_1, F_2 連以綫段 F_1M 和 F_2M，通过点 M 引母綫，切球面于点 N_1 和 N_2

* 文中"柱面"一詞，实指"正圓柱面"——譯者註。

① 至于說这截綫确实是第 2 款所定义的橢圓，这一点要从下文来看(参考附录第 7 条)。

(在圓 n_1 和 n_2 上)。

按定理(a),

$$F_1M=N_1M,$$
$$F_2M=N_2M。$$

但 $$N_1M+N_2M=N_1N_2,$$

所以 $$F_1M+F_2M=N_1N_2,$$

这是說，**从截綫上任一点到二定点 F_1 和 F_2 的距离之和是一常量**(与点 M 的选择无关)。

2) 設二圓 n_1, n_2 的平面与橢圓平面分别交于直綫 d_1, d_2(图 10)。作二平面垂直于此二直綫：一个通过柱面的軸和点 F_1, F_2；另一个通过橢圓上的任一点 M。第一个平面与柱面交于母綫 AC 和 $A'C'$，第二个平面——交于母綫 MN 和 $M'N'$。

三角形 MNP 和 ACD 相似(因为三組对应边平行)。所以

$$\frac{MN}{MP}=\frac{AC}{AD}.$$

但按定理(a), $MN=MF_1$,

因此

$$\frac{MF_1}{MP}=\frac{AC}{AD}.$$

这是說，**从截綫上任一点到定点 F_1 和定直綫 d_1 距离之比是一常量**。

3) 設橢圓截綫平面与切于柱面的平面相交于橢圓的切綫 T_1T_2(图 11)。

二平面与"上面"的球面切于点 F_1 和 N_1；因此按定理(b),

$$\angle F_1MT_1=\angle T_1MN_1. \qquad (1)$$

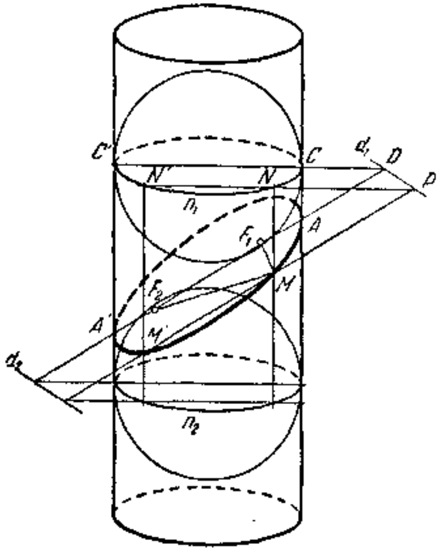

图 10

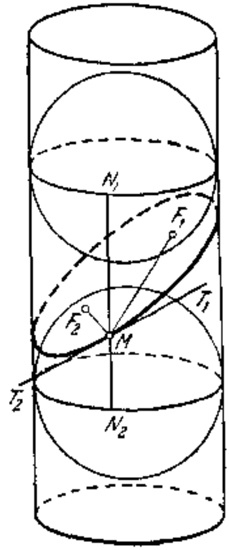

图 11

这两个平面与“下面”的球面切于点 F_2 和 N_2。再应用定理(b)，

$$\angle F_2MT_2=\angle T_2MN_2. \qquad (2)$$

但(1)，(2) 二式右边的二角由于对頂角而相等，所以二式左边的二角也相等：

$$\angle F_1MT_1=\angle F_2MT_2,$$

这是說，**从截綫上任一点 M 所引的綫段 F_1M 和 F_2M，与切綫作成等角。**

今后我們研究圓錐截綫时，也要常常利用方才用于錐面极限情况——柱面——的一些观念。

附　　录

1．在圓面的一側(在它的軸上)放一点光源，另一側放一平

板。平板作不同程度的傾斜，試問圓面影子的輪廓呈現什么形状？

答： 圓、椭圓、抛物綫、一支双曲綫。

2．証明抛物綫(双曲綫)上两点 M_1 和 M_2 的距离随着这两点沿抛物綫(双曲綫)的无限远离而无限增加。

提示： 首先要搞清楚，綫段 M_1M_2——圓錐面的圓截綫和抛物綫(双曲綫)的公共弦的长度是怎么改变的。

3．証明第 3 款的定理(a)和(b)。

4．当錐面按第 4 款所述变为平面时(如果这时作为刚体的每条母綫围繞点 S 轉动)，画在錐面上的圓变成了什么？

答： 圓。

5．証明，一动点到二定点距离之和为一常量的軌跡是一椭圓——柱面的斜截綫。

6．假定 r 和 δ 分别是椭圓平面上一点 M 到 F_1 和 d_1 的距离(图10)。証明在切綫上的比 $\frac{r}{\delta}$ 在切点处有最小值。

提示： 說明在平行于 d_1 的直綫上比 $\frac{r}{\delta}$ 是如何改变的。

Ⅱ．椭圓、双曲綫、抛物綫

5．我們来研究錐面的椭圓截綫(图 12)。

作二球面，內接于錐面且与截綫平面相切，切点 F_1，F_2 叫做椭圓的焦点。連接截綫上任一点 M 和 F_1, F_2 成二綫段 $F_1M=r_1$，$F_2M=r_2$；这二綫段叫做点 M 的焦半径。設通过点 M 的母綫与球面相切于点 N_1, N_2，綫段 N_1N_2 之长不依賴点 M 的选择(因此可記以 $2a$)。按定理(a)，

$$F_1M=N_1M, \qquad F_2M=N_2M.$$

但 $$N_1M+N_2M=N_1N_2,$$
因此，
$$F_1M+F_2M=N_1N_2. \tag{3}$$

等式(3)指明，**椭圓是到二定点距离之和为一常量的点的軌跡**①。

利用公式(3)，容易建立椭圓的許多性质（其中有的不是用第2款椭圓的定义"一下子"能看得出来的）。注意下面所讲的：

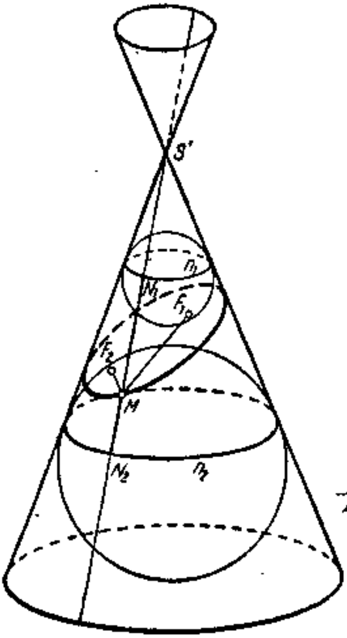

图 12

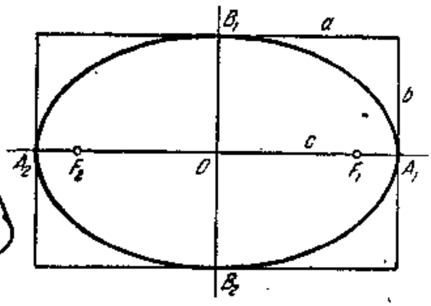

图 13

綫段 $F_1F_2=2c$（图13）的中点 O 是椭圓的对称中心。通过二焦点的直綫是一根对称軸，叫做焦軸。通过中心 O 且垂直于焦軸的直綫也是一根对称軸。椭圓与二軸交于点 A_1, A_2, B_1, B_2，这四点叫做椭圓的頂点。它們是椭圓外接矩形各边的中点。焦軸

① 反之，到二定点距离之和为一常量的点的軌跡是一椭圓——圓錐截綫（参看附录第7条）。

上綫段 A_1A_2 叫做椭圆的**长径**；它等于錐面的母綫綫段 N_1N_2：$A_1A_2=N_1N_2=2a$。綫段 $B_1B_2=2b$ 叫做椭圆的**短径**(显然，$b^2=a^2-c^2$)。

綫段 $F_1F_2=2c$ 与綫段 $A_1A_2=2a$ 之比愈大，椭圆与圓之差別也愈大。这个比值叫做椭圆的**离心率**。圓的离心率等于零。

6．現在研究双曲截綫(图 14)。

与椭圆的情况相同，双曲綫也有两个內接于錐面且切于截綫平面的球面(但是，所不同者是这二球在錐面的不同叶中)。切点 F_1, F_2 叫做双曲綫的**焦点**。連接截綫上任一点 M 与 F_1, F_2，得到所謂双曲綫过点M 的焦半径 $F_1M=r_1$ 和 $F_2M=r_2$。通过点 M 的母綫与球面相切于点 N_1, N_2，这两点决定一綫段 $N_1N_2=2a$ (它的长不依賴于点 M 的位置)。

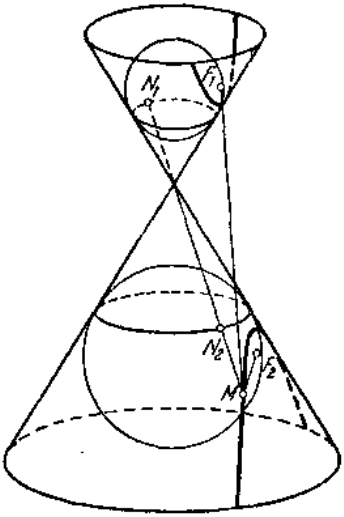

图 14

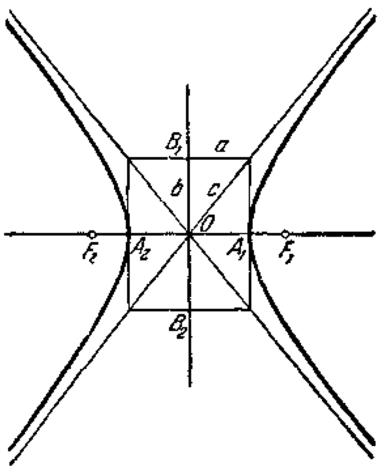

图 15

由作图

$$N_1M - N_2M = N_1N_2.$$

由定理(a)

$$F_1M = N_1M, \qquad F_2M = N_2M.$$

这就是

$$F_1M - F_2M = N_1N_2. \tag{4}$$

如果点 M 取在双曲綫的另一支上，相仿地可得

$$F_2M - F_1M = N_1N_2 \tag{5}$$

二公式(4)，(5)可以写作一种形式

$$|r_1 - r_2| = 2a \tag{6}$$

这个簡化的公式指明，**双曲綫是到二定点距离之差为一常量的点的軌跡**[①]。

借助于公式(6)，可以証明双曲綫有一个分綫段 $F_1F_2=2c$ 为两半的**对称中心** O(图15)，且有**两根**互相垂直的**对称軸**，其中的一根叫做**焦軸**或**实軸**；它通过二焦点并且交双曲綫于二点 A_1，A_2——双曲綫的**頂点**；另一根不与双曲綫相交，它叫做虛軸。实軸上的綫段 A_1A_2 叫做双曲綫的**直径**，它等于錐面的母綫上的綫段 N_1N_2，即 $A_1A_2=2a$。

与椭圆相仿，双曲綫完全决定于关于二軸对称的且在二軸上截下綫段 $A_1A_2=2a$ 和 $B_1B_2=2b(b^2=c^2-a^2)$的矩形。在矩形对角綫上的直綫叫做双曲綫的**渐近綫**。双曲綫被夹在二渐近綫作成的一对对頂角之內部，并且在无穷远的范围內**无限**趋近于它們(附录第 15 条)。

7．最后，研究抛物截綫(图 16)。

在这种情况下，只有一个球面內切于錐面并切于截綫的平

---

① 参看附录第8条。

面。切点 F 叫做抛物綫的**焦点**。

圓 n 的平面和抛物綫平面交于直綫 d，它叫做抛物綫的**准綫**。

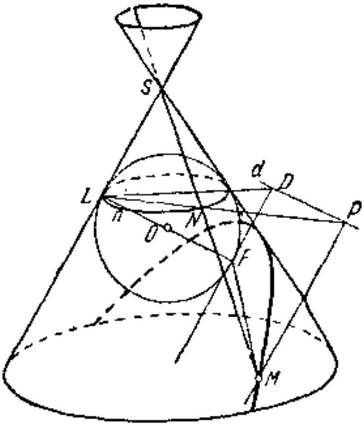

图 16

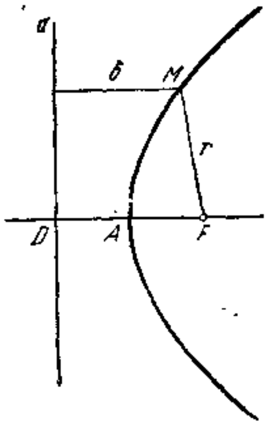

图 17

我們証明，**抛物綫上任一点 M 距离焦点 F 和准綫等远。**

为了証明，我們注意，平行于抛物綫平面的母綫，与球面切于焦点对径上的点 L，而平面 SLM 交抛物綫平面于直綫 MP，此直綫垂直于准綫。

在平面 SLM 上有切球面于点 N 的母綫 SM，显然三角形 SLN 和 MPN 相似。

根据定理(a)，$SL=SN$，因此 $MN=MP$。根据同一定理，$MN=MF$，因此 $MF=MP$。这就是所要証明的。

通过焦点 F 且垂直于准綫的直綫 FD (图 17)是抛物綫的**对称軸**。抛物綫与軸的交点叫做抛物綫的**頂点**。軸上綫段 FD (焦点与准綫的距离)叫做抛物綫的**参数**。頂点分参数为两半。

8*. 上面証明的抛物綫的性质可以表成这样：**抛物綫是到**

焦点和准綫的距离之比为一常量(等于一单位)的点的軌跡。椭圓和双曲綫也有类似的性质。

二球面与錐面切于二圓截綫，此二圓截綫平面与椭圓截綫平面(图 18)交于直綫 d_1, d_2。它們叫做椭圓的准綫。

通过直綫 SL 且平行于椭圓焦軸的平面，与錐面交于母綫 SM，与椭圓平面交于垂直于准綫的直綫 MP。这样就形成了相似三角形 SLN 和 MPN。由于这两个三角形相似，故有

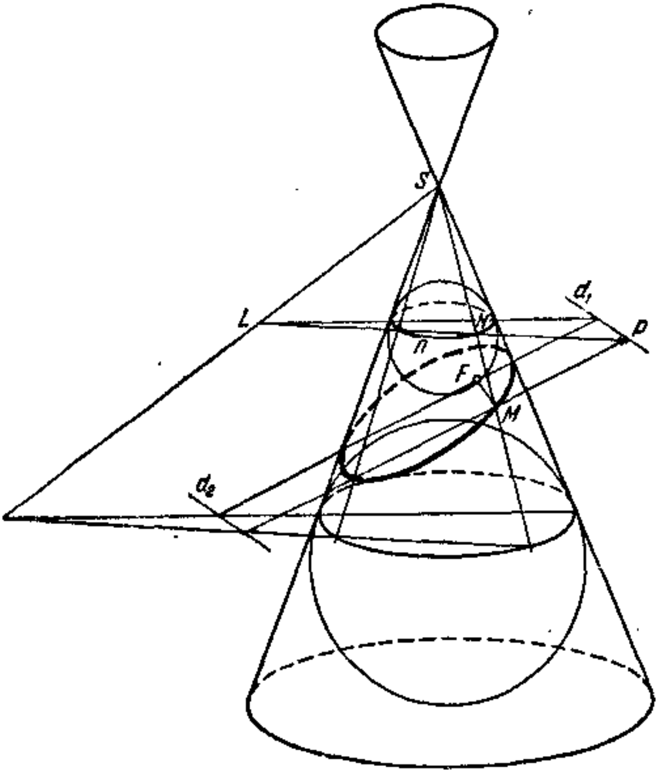

图 18