模糊矩阵理论与应用

●范周田　著

科学出版社
www.sciencep.com

模糊矩阵理论与应用

范周田　著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

模糊矩阵是模糊集合论的最重要的表达与研究的工具之一.

模糊矩阵理论在模糊控制、模糊推理和模式识别等方面具有广泛的应用. 本书系统介绍了模糊矩阵理论. 阐明了模糊矩阵、布尔矩阵和非负矩阵理论三者间的内在联系, 详细介绍了有关的研究工具及研究方法. 利用模糊矩阵的理论成果, 对模糊双向联想记忆网络的动态特征进行了细致的定量分析, 同时, 通过具体的实例介绍了模糊矩阵在不同领域的应用. 本书选材精炼, 结构严谨, 可读性强, 可以使读者全面深入地了解有关领域的最新研究成果.

本书也可以作为理工科相关专业的研究生、高年级本科生和工程技术人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

模糊矩阵理论与应用/范周田著. —北京: 科学出版社, 2006
ISBN 7-03-017769-X

Ⅰ.模… Ⅱ.范… Ⅲ.模糊数学-矩阵 Ⅳ.O159

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 090057 号

责任编辑: 陈玉琢 / 责任校对: 包志虹
责任印制: 安春生 / 封面设计: 王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2006年12月第 一 版 开本: B5(720×1000)
2006年12月第一次印刷 印张: 14 3/4
印数: 1—2 500 字数: 278 000

定价: 36.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈双青〉)

前　言

本书汇集了作者十余年来的有关研究成果, 内容涵盖了有关研究的整个历史以及最新发展动向. 值此出版之际, 作者首先感谢北京工业大学应用数理学院和北京工业大学研究生部为本人完成此书所提供的一切支持和帮助.

全书的体系结构基本上按照这一领域发展过程进行安排. 写作上逻辑严谨, 主线清楚, 同时特意编排了一定量的例子, 使得读者更容易理解和掌握书中的理论和概念.

模糊数学, 更准确地说模糊集合理论的产生和发展是和人类关于计算机智能化研究密切相关的. 类似于经典数学理论, 模糊关系在模糊数学的研究中占有重要地位. 而模糊矩阵理论, 就像我们在本书即将看到的那样, 是表示和研究模糊关系的重要工具. 本书详细介绍了模糊矩阵的理论与应用, 是模糊模式识别、模糊推理、聚类分析和模糊综合评价等许多课题的理论基础, 在定性描述模型 (如许多的经济模型、质量评价模型和自动控制模型等) 向定量描述模型转化方面具有得天独厚的优势, 因而可以广泛应用于许多与社会生活密切相关的研究领域当中, 有关研究具有重要的现实意义.

本书是介绍模糊矩阵理论与应用方面的一本专著, 适合作为教师、研究生和高年级本科生专业方面的参考书和教材. 全书分为 13 章, 较为详细地介绍了模糊矩阵及其应用近年的发展成果和研究趋势. 从内容上, 可分为 4 个部分. 前 6 章为第 1 部分, 介绍 max-min 复合意义下模糊矩阵理论, 其中第 1 章介绍了模糊集、模糊关系与模糊矩阵的基本概念. 第 2 和第 3 章分别介绍了单调矩阵和可控矩阵的研究成果. 第 4 章介绍了有向图的基本概念. 第 5 章为模糊矩阵的极限理论. 第 6 章则建立了常用或特殊模糊矩阵的一致性理论框架. 第 2 部分为第 7 章, 把模糊矩阵的有关问题推广到格上进行讨论. 第 3 部分为第 8 到第 11 章, 讨论广义模糊矩阵, 其中第 8 和第 9 两章分别介绍模糊逻辑和模糊逻辑运算. 第 10 章建立广义模糊矩阵的极限理论. 第 11 章讨论模糊矩阵方程. 第 4 部分是全书的最后两章, 讨论模糊矩阵理论的应用问题. 其中, 第 12 章详细介绍了模糊双向联想记忆网络的动态分析成果, 第 13 章则给出了模糊矩阵理论在其他方面的具体应用实例.

由于作者学识和时间所限, 书中难免存在错漏不足之处, 敬请同行和读者批评指正.

作　者

2006 年 6 月于北京工业大学

目　录

第 1 章　模糊集、模糊关系与模糊矩阵

模糊数学, 更准确地说模糊集合理论的产生和发展是和人类关于计算机智能化研究密切相关的. 类似于经典数学理论, 模糊关系在模糊数学的研究中占有重要地位. 而模糊矩阵理论, 就像我们在本书即将看到的那样, 是表示和研究模糊关系的重要工具.

本章的内容参见文献 [36], [52], [63], [64], [68].

§1.1　模糊概念与模糊集

在人类发展的历史上, 人们对自然现象和社会现象的描述, 通常首先是定性的描述. 而这些定性的描述一般较为 “笼统” 或不精确, 概念与概念之间往往没有明确的界定, 这种现象我们称之为模糊. 模糊概念在现实世界, 尤其在人类的自然语言中几乎无处不在. 造成模糊的原因很多, 有概念本身的原因, 也有人们认知水平的原因, 这里我们无法一一加以论述. 实际上, 模糊概念, 如大小、多少、轻重、好坏、智愚、年轻人、老年人等, 又如学生 “学得好”、“能力强” 等, 一直都被人们广泛使用. 尽管使用者对模糊概念往往有不同的 “测量” 尺度, 比如某甲称一个人是年轻人, 可能是指此人在 20 岁到 30 岁之间, 而某乙说一个人是年轻人, 则可能是指此人的年龄在 25 岁到 50 岁, 但人们使用模糊概念进行交流时, 通常都可以相互理解和沟通. 人类自然语言精华与美丽的一半也许正是它的模糊性.

另一方面, 在不同的社会发展阶段, 对一些模糊概念又需要进一步的精确刻画. 例如, 大约公元前 500 年的孔子 (公元前 551 年 ~ 公元前 479 年), 有 “学而优则仕” 的说法, 那么, 所谓 “优” 如何界定呢? 于是有了口试的测量方式; 自隋炀帝 (公元 606 年) 建立了科举制度, 开始了笔试的测量方式[63]. 现在人们早已习惯用百分制或五分制记录笔试和口试的结果, 于是精确的度量分数就成为了模糊概念或属性 “学得好”、“智力高” 或 “能力强” 的一种量化表示.

在当今社会中, 随着社会进步和科学技术的发展, 尤其是伴随计算机技术的革命而产生的信息领域的巨大变革, 人们将被包含在无穷无尽信息海洋之中. 因此, 人们迫切需要信息智能处理技术出现突破性的进展, 使计算机具有或部分具有人类的智能, 能够处理包括自然语言在内的巨量信息. 不难想象, 为了实现这一目标, 首先需要计算机能够 “理解” 自然语言, 而这种理解, 必须建立在对自然语言中的模糊概

念的定量描述的基础上. 模糊数学的诞生与发展, 正是为了适应这一历史需要, 是不断发展的信息科学的一部分.

1965 年, Zadeh (扎得) 教授提出了模糊集的概念[52], 这一贡献被认为是开创了模糊数学研究历史的创举. 简单地说, 一个论域 U 上的模糊集 A 就是 U 到 $[0,1]$ 闭区间的一个映射

$$\mu_A : U \to [0,1], \quad x \to \mu_A(x).$$

μ_A 称为模糊集 A 的隶属函数, 在不致误解的情形下, 对模糊集和它的隶属函数将不加区分. 模糊集的隶属函数可看作经典集合论中集合的特征函数的推广. 如果我们把学生的考试成绩限制在 $[0,1]$ 之间, 那么一个班上的学生某门功课的成绩就是一个严格意义上的模糊集. 从这个意义上说, 模糊集的概念“古已有之”, 并一直为人们所使用.

§1.2　二元关系

类似于普通二元关系在数学中的地位和作用一样, 模糊二元关系在模糊数学中有着特别重要的作用. 这一章里, 我们首先回顾经典二元关系的概念、运算及其表示, 然后讨论有限二元模糊关系.

设 U 为集合, $A \subseteq U$ 为任意子集. 相对于全集 U, 子集 A 可以由其特征函数完全刻画:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A, \end{cases}$$

任给 $x \in U$. 特征函数的这种二值定义方式, 决定了任意一个元素与任意一个集合之间都存在明确的属于或不属于关系, 即, 任意给定 $x \in U, A \subseteq U$, 则 x 属于 A 或者 x 不属于 A, 二者必居其一.

设 X, Y 为集合, 我们用 $X \times Y$ 表示它们的笛卡儿积, 定义如下:

$$X \times Y = \{\langle x, y\rangle | x \in X, \qquad y \in Y\},$$

其中 $\langle x, y\rangle$ 为有序对. 有序对的集合表示为

$$\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

当 $x \neq y$ 时, $\{\{x\}, \{x, y\}\} \neq \{\{y\}, \{x, y\}\}$, 即, $\langle x, y\rangle \neq \langle y, x\rangle$. 两个不同元素交换位置得到的元素对不同, 因而称之为有序对. 一般地, $\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle$ 当且仅当 $x = u$ 且 $y = v$.

当 X, Y 为有限集合时, $X \times Y$ 也是有限集, 而且 $\|X \times Y\| = \|X\| \times \|Y\|$, 即, 集合 $X \times Y$ 中元素个数等于 X 中元素个数与 Y 中元素个数的乘积.

我们把笛卡儿积 $X \times Y$ 的任意一个子集 R 都称为由集合 X 到集合 Y 的一个二元关系, 记为 $R \subseteq X \times Y$. 如果 $\langle x, y\rangle \in R$, 我们就称 x 和 y 具有关系 R, 为了方便也记之为 xRy. 很明显, 集合 $X \times Y$ 有多少个子集, 就有多少个由 X 到 Y 的二元关系. 如果 $\|X\| = m, \|Y\| = m$, 则 $\|X \times Y\| = mn$, $X \times Y$ 有 2^{mn} 个子集, 因此, 由一个 m 元集 X 到一个 n 元集 Y 共有 2^{mn} 个不同的二元关系. 当 $Y = X$ 时, 简称 $R \subseteq X \times X$ 为 X 上的二元关系. 对于任意非空集合 X, X 上的恒等关系 I_X 与全域关系 U_X 分别定义为

$$I_X = \{\langle x, x\rangle; x \in X\}, \qquad U_X = X \times X.$$

设 R 是 X 到 Y 的二元关系, 定义 $yR^{-1}x$ 当且仅当 xRy, 易见 R^{-1} 是 Y 到 X 的二元关系, 称为 R 的逆关系.

对任意的 $R \subseteq X \times Y$, 定义

$$\mathrm{dom}(R) = \{x;\ 存在 y \in Y, \langle x, y\rangle \in R\},$$

$$\mathrm{ran}(R) = \{y;\ 存在 x \in X, \langle x, y\rangle \in R\}.$$

$\mathrm{dom}(R)$ 和 $\mathrm{ran}(R)$ 分别称为 R 的定义域和值域.

设 $R \subseteq X \times Y$, 如果 $\mathrm{dom}(R) = X$, 而且对任意的 $x \in X$, 都有惟一的 $y \in Y$, 使得 $\langle x, y\rangle \in R$, 则称 R 为 X 到 Y 的一个函数.

由于二元关系都是集合, 因此, 集合之间的运算都可以应用到二元关系中来. 设 R 和 S 为 X 到 Y 的任意关系, 我们有下列相应的运算:

交运算: $R \cap S = \{\langle x, y\rangle; xRy$ 且 $xSy\}$. 如果 $X \cap Y = \varnothing$, 称 R 与 S 不交.

并运算: $R \cup S = \{\langle x, y\rangle; xRy$ 或 $xSy\}$.

相对补: $R - S = \{\langle x, y\rangle; xRy$ 且 $x\not{S}Y\}$.

补运算: $\overline{R} = X \times Y - R$.

例 1.2.1 令 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c\}$. R_1 和 R_2 是 X 到 Y 的二元关系, 其中

$$R_1 = \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 3, b\rangle\},$$

$$R_2 = \{\langle 1, a\rangle, \langle 1, b\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 2, c\rangle, \langle 3, a\rangle, \langle 3, c\rangle\}.$$

容易验证 R_1 是 X 到 Y 的一个函数, 同时, $R_1^{-1} = \{\langle a, 1\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle b, 3\rangle\}$ 是 Y 到 X 的一个二元关系, 但不是函数.

$$R_1 \cup R_2 = \{\langle 1, a\rangle, \langle 1, b\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 2, c\rangle, \langle 3, a\rangle, \langle 3, b\rangle, \langle 3, c\rangle\},$$

$$R_1 \cap R_2 = \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, b\rangle\},$$

$$R_2 - R_1 = \{\langle 1,b\rangle, \langle 2,c\rangle, \langle 3,a\rangle, \langle 3,c\rangle\},$$

$$\overline{R_1} = \{\langle 1,b\rangle, \langle 1,c\rangle, \langle 2,a\rangle, \langle 2,c\rangle, \langle 3,a\rangle, \langle 3,c\rangle\}.$$

有别于普通集合, 我们可以进一步定义二元关系之间的复合运算.

定义 1.2.1　设 $R \subseteq X \times Y, S \subseteq Y \times Z$, 则 R 与 S 的复合记为 $R \circ S$, 定义为

$$R \circ S = \{\langle x,z\rangle \in X \times Z;\ 如果存在\ y\ 满足\langle x,y\rangle \in R\ 且\langle y,z\rangle \in S\}.$$

定理 1.2.1　二元关系的复合运算满足结合律.

证明　设 R, S 和 T 分别为 X 到 Y, Y 到 Z 和 Z 到 U 的二元关系. 我们证明

$$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T).$$

任给 $\langle x,u\rangle \in (R \circ S) \circ T$, 由复合运算的定义, 存在 $z \in Y$ 满足 $\langle x,z\rangle \in R \circ S$, 且 $\langle z,u\rangle \in T$, 进而, 存在 $y \in Y, z \in Z$ 满足 $\langle x,y\rangle \in R, \langle y,z\rangle \in S, \langle z,u\rangle \in T$. 因此有 $\langle y,u\rangle \in S \circ T$, 进而有 $\langle x,u\rangle \in R \circ (S \circ T)$, 这证明了

$$(R \circ S) \circ T \subseteq R \circ (S \circ T).$$

同理可证

$$R \circ (S \circ T) \subseteq (R \circ S) \circ T,$$

因此有

$$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T).$$

证毕.

定义 1.2.2　如果 $R \subseteq X \times X$ 为二元关系, 则称 $\{R^n\}_{n \geqslant 1}$ 为 R 的幂序列, 其中

$$R^1 = R, \quad R^n = R^{n-1} \circ R, \quad \forall n > 1.$$

例 1.2.2　设论域 X 为人, $R \subseteq X \times X$ 为 X 上的父子关系, 则 R^2 为 X 上的祖孙关系. 一般地, $xR^k y$ 表示 y 是 x 的第 k 代子孙.

例 1.2.3　令 $X = \{1,2,3\}, R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,1\rangle\}$. 我们有

$$R^2 = \{\langle 1,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 2,1\rangle\}, \quad R^3 = I_X, \quad R^{k+3} = R^k,$$

其中 $k \geqslant 1$.

例 1.2.4　令 $m > 1$ 为任意正整数, R_m 为自然数集 $\mathbf{N}$ 上的二元关系, $xR_m y$ 当且仅当 mx 整除 y, $x, y \in \mathbf{N}$. 由整除的传递性质, 对任意 $k \geqslant 1$, 我们有

$$R_m^k = \{\langle x, m^k xy\rangle | x, y \in \mathbf{N}\}.$$

下面考察二元关系的基本性质.

定义 1.2.3　设 R 为 X 上的二元关系, 则

a1) 如果任给 $x \in X$, 都有 $\langle x,x\rangle \in R$, 则称 R 是自反的.

a2) 如果任给 $x \in X$, 都有 $\langle x,x\rangle$ 不属于 R, 则称 R 是反自反的.

b1) 如果对任意的 $\langle x,y\rangle \in R$, 都有 $\langle y,x\rangle \in R$, 则称 R 是对称的.

b2) 如果对任意 $x,y \in X$, 都有 $\langle x,y\rangle \in R$ 且 $\langle y,x\rangle \in R$ 蕴涵 $x=y$, 则称 R 是反对称的.

c) 如果对任意 $x,y \in X$, 都有 $\langle x,y\rangle \in R$ 且 $\langle y,z\rangle \in R$ 蕴涵 $\langle x,z\rangle \in R$, 则称 R 是传递的.

容易验证, R 自反当且仅当 $I_X \subseteq R$, R 对称当且仅当 $R=R^{-1}$. 但通常情形下, 我们没有如此简单的方法来验证 R 是否传递.

下面是几种重要的二元关系, 换言之, 它们最经常被讨论和应用.

定义 1.2.4　设 R 为集合 X 上的二元关系.

a) 如果 R 是自反的、对称的、传递的, 则称 R 是等价关系.

b) 如果 R 是自反的、反对称的、传递的, 则称 R 是偏序关系.

c) 如果 R 是自反的、对称的, 则称 R 是相容关系.

显而易见, 任意集合 X 上的全域关系都是等价关系, 而 X 上的恒等关系则既是等价关系又是偏序关系. 令 A 为世界上所有的人构成的集合, 我们定义 A 上的“邻居关系”：如果两个人的居住地相距不超过 100 km, 就称她们为“邻居”. 当然, 邻居关系是自反的和对称的, 因而是相容关系. 由于不具有传递性, 邻居关系不是等价关系.

§1.3　有限二元关系与布尔矩阵

设 R 是 X 上的二元关系, 如果 R 是 $X \times X$ 的有限子集, 就称 R 为有限二元关系. 当然, 有限集合上的所有二元关系都是有限的. 如果没有特别说明, 我们所说的有限二元关系都是指有限集上的二元关系. 在这种情形下, 除了使用集合外, 我们还可以使用关系矩阵表示二元关系.

定义 1.3.1　设 R 为 n 元集合 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 上的二元关系. 我们称 $M(R)=(r_{ij})_{n\times n}$ 为 R 的关系矩阵, 其中 $r_{ij}=1$ 当且仅当 $\langle v_i,v_j\rangle \in R$, 否则, $r_{ij}=0$, 任意 $1 \leqslant i,j \leqslant n$.

很显然, 任意有限二元关系 R 都可以由其关系矩阵 $M(R)$ 确切描述. 依照定义, $M(R)$ 的所有元素的取值都属于集合 $\{0,1\}$, 这样的矩阵称之为布尔矩阵. 下面首先定义布尔矩阵的序关系及运算.

定义 1.3.2 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m\times n}$ 为布尔矩阵.

a) 序关系：$A\leqslant B$ 当且仅当 $a_{ij}\leqslant b_{ij}, i=1,2,\cdots,m, j=1,2,\cdots,n$.

b) 加法：$A\vee B=(\max(a_{ij},b_{ij}))_{m\times n}=(a_{ij}\vee b_{ij})_{m\times n}$.

c) 合取：$A\wedge B=(\min(a_{ij},b_{ij}))_{m\times n}=(a_{ij}\wedge b_{ij})_{m\times n}$.

注意布尔矩阵的加法与普通矩阵的加法的区别在于用“取大”运算代替普通加法, 这样才能保证布尔矩阵加法的封闭性.

定义 1.3.3 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times p}$ 为布尔矩阵. 我们称 $AB=(c_{ij})_{m\times p}$ 为矩阵 A 和 B 的乘积, 其中

$$c_{ij}=\max_{1\leqslant k\leqslant n}(a_{ik}\wedge b_{kj}).$$

下面的定理给出了有限二元关系的运算的矩阵表示.

定理 1.3.1 设 R 和 S 为 n 元集合 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 上的两个二元关系, 关系矩阵分别为 $M(R)$ 和 $M(S)$, 则有

(1) $R\subseteq S$ 当且仅当 $M(R)\leqslant M(S)$.

(2) $M(R\cup S)=M(R)\vee M(S)$.

(3) $M(R\cap S)=M(R)\wedge M(S)$.

(4) $M(R\circ S)=M(R)M(S)$.

证明 定理的前 3 个部分的证明只要用到定义即可, 我们只证明第 4 部分.

记 $M(R)=(r_{ij}), M(S)=(s_{ij}), M(R\circ S)=(m_{ij})$, 对任意给定的 i,j $(1\leqslant i,j\leqslant n)$, 我们有

$$\begin{aligned}
m_{ij}=1 &\Longleftrightarrow \langle v_i,v_j\rangle\in R\circ S\\
&\Longleftrightarrow \text{存在 } k, 1\leqslant k\leqslant n, \text{ 满足 } \langle v_i,v_k\rangle\in R, \langle v_k,v_j\rangle\in S\\
&\Longleftrightarrow \text{存在 } k, 1\leqslant k\leqslant n, \text{ 满足 } r_{ik}=1, s_{kj}=1\\
&\Longleftrightarrow \max_{1\leqslant k\leqslant n} r_{ik}s_{kj}=1\\
&\Longleftrightarrow \max_{1\leqslant k\leqslant n} r_{ik}\wedge s_{kj}=1\\
&\Longleftrightarrow M(R)M(S)[i,j]=1.
\end{aligned}$$

证毕.

例 1.3.1 设 R_1 和 R_2 为三元集 $V=\{2,3,4\}$ 上的二元关系,

$$M(R_1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix},\quad M(R_2)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

R_1 是大于等于关系, R_2 是整除关系.

$$M(R_1 \cup R_2) = M(R_1) \vee M(R_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M(R_1 \cap R_2) = M(R_1) \wedge M(R_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M(R_1 \circ R_2) = M(R)M(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

定理 1.3.2 R 为 $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 上的二元关系, 且 $M(R)=(r_{ij})_{n\times n}$, 则有

(1) R 是自反的当且仅当 $I \leqslant M(R)$.

(2) R 是反自反的当且仅当 $r_{ii}=0, i=1,2,\cdots,n$.

(3) R 是对称的当且仅当 $M(R)$ 为对称矩阵.

(4) R 是反对称的当且仅当对任意的 $i \neq j$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$, 有 $r_{ij}r_{ji}=0$.

(5) R 是传递的当且仅当对任意的 $M(R) \geqslant (M(R))^2$.

证明 注意到 $r_{ik}=r_{kj}=1$ 蕴涵 $r_{ij}=1$ 等价于

$$r_{ij} \geqslant \max\nolimits_{1\leqslant k\leqslant n} r_{ik} \wedge r_{kj},$$

即证明了定理的第 4 部分. 其余的证明显而易见.

例 1.3.2 R 为 $V=\{2,4,6,8\}$ 上的二元关系, 当 R 为和为 8 的关系, 其

$$M(R) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则 R 是对称的.

当 R 为整除关系, 其

$$M(R) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则 R 是自反的和反对称的.

当 R 为大于的关系, 其

$$M(R) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

则 R 是反自反的和反对称的, 并且由于 $M(R) \geqslant (M(R))^2$, 故 R 是传递的.

一般而言, 给定的二元关系未必具有我们所需要的性质, 如自反性、对称性和传递性等, 因此, 有些情形下我们需要对其进行必要的改造.

定义 1.3.4 设 R 为二元关系. 如果 R_1 满足条件 (1) R_1 自反 (对称或传递); (2) $R \subseteq R_1$; (3) 如果 R_2 自反 (对称或传递) 且 $R \subseteq R_2$, 则 $R_1 \subseteq R_2$, 则称 R_1 为 R 自反闭包 (对称闭包或传递闭包), 分别记为 $r(R), s(R)$ 和 $t(R)$.

很明显, R 的自反闭包 (对称闭包或传递闭包) 是包含 R 的最小的自反关系 (对称或传递关系).

定理 1.3.3 设 R 为 n 元集上的二元关系. $r(R), s(R), t(R)$ 分别为 R 的自反闭包、对称闭包和传递闭包, 则

(1) $r(R) = I_n \vee R$,

(2) $s(R) = R \vee R'$,

(3) $t(R) = R \vee R^2 \vee \cdots \vee R^n$.

证明 仅对 (3) 证明. 令 $S = R \vee R^2 \vee \cdots \vee R^n$, 设 $t(R)$ 为 R 的传递闭包.

$\forall k \geqslant 1$, 任给 $\langle x_0, x_k \rangle \in R^k$, 则存在

$$\langle x_0, x_1 \rangle, \langle x_1, x_2 \rangle, \cdots, \langle x_{k-1}, x_k \rangle \in R \subseteq t(R),$$

由 $t(R)$ 的传递性, 有 $\langle x_0, x_k \rangle \in t(R)$, 即 $R^k \subseteq t(R)$ $(\forall k \geqslant 1)$, 所以 $S \subseteq t(R)$.

因此, 我们只要证明 S 是传递的即可.

任给 $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle \in S$, 无妨设 $\langle x, y \rangle \in R^k, \langle y, z \rangle \in R^l$, 显然存在序列

$$\langle x_0, x_1 \rangle, \langle x_1, x_2 \rangle, \cdots, \langle x_{k+l-1}, x_{k+l} \rangle \in R,$$

其中 $x_0 = x, x_k = y, x_{k+l} = z$, 若存在 $u \neq v$, $0 < u < v < k + l$, 满足 $x_u = x_v$, 则删除序列中 $\langle x_u, x_u + 1 \rangle, \cdots, \langle x_v - 1, x_v \rangle$, 重复这一过程, 得到序列

$$\langle x_0, x_{i_1} \rangle, \langle x_{i_1}, x_{i_2} \rangle, \cdots, \langle x_{i_{k-1}}, x_{k+l} \rangle \in R,$$

其中 $x_0, x_{i_1}, \cdots, x_{i_{k-1}}$ 两两不等, 由 R 为 n 元集上的二元关系, 有 $k \leqslant n$, 而且 $\langle x, z \rangle \in R^k$, 所以 $\langle x, z \rangle \in S$, 即 S 是传递的. 定理证毕.

例 1.3.3 设 R 为某三元集 V 上的二元关系, 其

$$M(R)=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

计算可知:

$$r(R)=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},\quad s(R)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad t(R)=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

分别为 R 的自反闭包、对称闭包和传递闭包.

§1.4 模糊关系

设 X,Y 为集合, 我们称笛卡儿积 $X\times Y$ 的任意一个模糊子集 R 为 X 到 Y 的模糊关系. 当 $Y=X$ 时, 称 R 是 X 上的模糊关系. 许多情形下, 我们总是考察某一个集合上的模糊关系. 应该指出, 即使 X 为有限集, X 上的模糊二元关系依然有无穷多个.

模糊关系 R 可以写成模糊点 $\chi_R(x,y)/(x,y)$ 的并集, 即

$$R=\int_{X\times X}\chi_R(x,y)/(x,y),$$

其中 χ_R 为 R 的隶属函数. 就像我们不大区分模糊子集与模糊子集的隶属函数一样, 大多数情形下, 我们也不区分模糊关系与模糊关系的隶属函数.

令 $X=(-\infty,+\infty)$, 我们来描述模糊关系“接近”和模糊关系“远远大于”. 令 $R_1(x,y)$ 和 $R_2(x,y)$ 分别表示“x 接近 y”与“x 远远大于 y”, 我们可以给出下列隶属函数:

$$\chi_{R_1}(x,y)=\mathrm{e}^{-|x-y|},$$

$$\chi_{R_2}(x,y)=\begin{cases}0, & \text{如果 } x\leqslant y,\\ [1+10(x-y)^{-1}]^{-1}, & \text{如果 } x>y,\end{cases}$$

其中 x 和 y 为任意实数.

模糊关系 R 的定义域记为 $\mathrm{dom}R$, 定义如下:

$$\chi_{\mathrm{dom}R}(x)=\sup_{y\in X}\{\chi_R(x,y)\},\quad x\in X.$$

类似地, 值域为

$$\chi_{\mathrm{ran}R}(y)=\sup_{x\in X}\{\chi_R(x,y)\},\quad y\in X.$$

R 的高度用 $h(R)$ 表示, 其中

$$h(R)=\sup_{x\in X}\{\sup_{y\in X}[\chi_R(x,y)]\}.$$

如果 $h(R)=1$, 就称 R 为正规模糊关系.

例 1.4.1　令

$$R(x,y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{y-x}, & x\geqslant y,\\ 0, & x<y,\end{cases}$$

有

$$\chi_{\mathrm{dom}R}(x)=1-\mathrm{e}^{-x},$$
$$\chi_{\mathrm{ran}R}(y)=1,$$
$$h(R)=1.$$

所以 $R(x,y)$ 为正规模糊关系.

设 R 和 S 为 X 上的模糊关系, 我们用 $R\cup S$ 和 $R\cap S$ 分别表示 R 与 S 的**并**和**交**, 而用 $\overline{R}$ 表示 R 的**补**, 分别定义如下:

$$\chi_{R\cup S}(x,y)=\max\{\chi_R(x,y),\chi_S(x,y)\},$$
$$\chi_{R\cap S}(x,y)=\min\{\chi_R(x,y),\chi_S(x,y)\},$$
$$\chi_{\overline{R}}(x,y)=1-\chi_R(x,y),$$

其中 $x,y\in X$.

定义 1.4.1　模糊关系 R 与 S 的复合关系记为 $R\circ S$, 定义为

$$\chi_{R\circ S}(x,z)=\sup_{y\in X}\{\min(\chi_R(x,y),\chi_S(y,z))\},\quad x,z\in X.$$

注意, 这里只给出了模糊关系的一种复合运算, 即所谓的 sup-min 复合. 一般而言, 模糊关系以什么样的方式复合取决于模糊集应用了哪些模糊运算. 例如, 对给定的二元运算 $\star$, 可以定义 $R\circledast S$ 为 R 和 S 的复合运算, 其中

$$\chi_{R\circledast S}(x,z)=\sup_{y\in X}\{\chi_R(x,y)\star\chi_S(y,z)\},\quad x,z\in X.$$

如果 $\star$ 满足结合律, 而且在 $[0,1]^2$ 上处处非减, 那么不难证明, 这里的 sup-$\star$ 复合运算也是可结合的, 而且对并运算有分配律, 在这种情形下, 通过归纳定义

$$R^1=R,R^{k+1}=R^k\circ R,\ \ \forall k\geqslant 1$$

同样可以得到 R 的幂序列.