BOOK HOUSE 高等学校数学学习辅导丛书

10年金版

INSTRUCTION TEXTBOOK SERIES FOR MATHEMATICS

线性代数习题全解

丛书主编/北京航空航天大学 徐兵

编著 王艳芳 李海燕

配人大三版

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

碧海书道 BOOK HOUSE 高等学校数学学习辅导丛书

金版

INSTRUCTION TEXTBOOK SERIES FOR MATHEMATICS

线性代数习题全解

丛书主编/北京航空航天大学 徐兵

编著 王艳芳 李海燕

配人大三版

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

线性代数习题全解(配人大三版) / 王艳芳,李海燕编著．—2 版
大连:大连理工大学出版社，2006.7(2006.9 重印)
高等学校数学学习辅导丛书
ISBN 7-5611-2386-8

Ⅰ.线…　Ⅱ.①王… ②李…　Ⅲ.线性代数—高等学校—解题
Ⅳ.O151.2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 075390 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市软件园路 80 号　邮政编码:116023
发行:0411-84708842　邮购:0411-84703636　传真:0411-84701466
E-mail:dutp@dutp.cn　URL:http://www.dutp.cn
大连业发印刷有限公司印刷　　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:147mm×210mm　印张:7.75　字数:229 千字
2006 年 7 月第 2 版　2006 年 9 月第 7 次印刷

责任编辑:梁　锋　于建辉　责任校对:碧　海
封面设计:熔　点

定价:10.00 元

高等学校数学学习辅导丛书
编写委员会

INSTRUCTION
TEXTBOOK SERIES
FOR MATHEMATICS

总序

大学数学是高等学校各门类、专业学生必修的基础课，对理工类、经管类学生都非常重要。21世纪是知识经济时代，数学的重要性更显突出，人们甚至把“数学力”看作是“竞争力、成功力、管理力、领导力”。对于准备报考研究生的同学来说，其重要性更是不言而喻。

作为一名从事大学数学教学和科研工作40余年的教师，我一直密切关注着大学数学的教育状况。我很早就注意到大连理工大学出版社一直在为学生提供高质量的教学辅导书而努力着。10多年来，该社先后出版了50余种相关的大学数学辅导图书，我经常在课堂上、自习课上、考研辅导班上看到学生们在使用。我也多次仔细阅读他们的辅导书，对于图书的内在质量和选题设计，我非常认可，因此经常向学生推荐。在目前浮躁的图书市场上，大连理工大学出版社的这种真正为学生考虑的做法是非常值得弘扬的。

在出版社推出《高等学校数学系列辅导丛书》10周年之际，我受出版社之托，担任该系列丛书编委会主任，深感责任重大。一方面，需要延续出版社一直追求的高质量的图书内在品质；另一方面，需要在对现有图书进行规划和整合的基础上，结合目前学生的需求、高校课程教学的基本要求与教学状况以及最新《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》有所创新。为此，本次修订主要围绕以下几个方面展开：

第一，坚持聘请名校名师亲自编写的原则。本套丛书编委会的成员全部来自知名高校，并且都是知名教师。例如，韩云瑞教授在清华大学“学生心目中的好老师”评选活动中，2005、2006连续两年全校排名第一；大连大学的王丽燕教授一直是“学生最喜爱的老师”；南开大学的周概容教授连续17年担任考研《概率论与数理统计》命题组组长。这些优秀教师多年积累的教学经验一定会给学生带来意想不到的收获。

第二，对于全部习题进行重新演算，以保证解题过程的正确，而

且在编委会成员之间相互切磋。对于典型习题，努力寻求最优解法，对于重点例题、习题给出多种解法，以帮助学生打开解题思路。我们希望通过编委会的共同努力，可以让读者真正掌握大学数学的思想和算理。

第三，针对学生不同的学习阶段，设计了不同层次的系列图书，力图为学生提供学习数学的立体空间，引导学生全方位、多角度逐步认识并掌握大学数学，从而使得每本书都成为学生天天见面的辅导老师。大一新生刚进大学校门，要尽快适应大学的学习环境，注重夯实大学数学的基础，为学习专业课打下基础；高年级阶段，很多学生准备进一步学习深造，报考研究生，对大学数学需要进行全面复习及提高。针对这些特点，本套丛书设计了四大系列。

习题全解(全析)系列 为读者解答教材中的习题，像习题课一样，与学生们一起通过对习题的分析、讨论、求解、总结，扎实掌握基础知识，领悟数学的真谛。本系列图书“不是好学生的作业本，而是优秀教师习题课的教案”。读者也可以将该系列丛书作为工具书与教材配套使用。

同步辅导系列 按节同步，讲解细致，其主要特点是“基础、同步”，帮助读者重点掌握大学数学中的“基本概念、基本理论、基本方法”。本书可以帮助学生逐步适应从中学时代“以老师讲解为主”到大学时代“以学生自学为主”学习方式的转变。

全程学习指导系列 指导学生准确理解大学数学中的概念、原理，熟练掌握解题的基本思路、方法，提高分析问题、解决问题的能力，同时，让学生熟悉研究生考试的各类题型，在大学低年级阶段就为将来报考研究生打下坚实的基础并提前做好准备。

典型题精讲系列 以习题讲解为主，在注重基本解题能力培养的同时，增加了一些题目难度较大、但颇具特色的习题，在更高层次上引导学生掌握数学的算理与数学思想。

我们欢迎读者通过各种方式与我们联系，提出建议与意见，以利于本套丛书千锤百炼，惠及更多学子。

祝大家学习进步，前程似锦！

徐 兵

2006 年 6 月

于北京航空航天大学

编者的话

近年来,大学数学方面的学习辅导书种类逐渐增多,学生们每人手中持有一种乃至数种。这其中不乏精品之作,但多数又不尽如人意。作为从教多年的教师,看到学生们渴望知识的热情,以及应试的压力,强烈的责任感驱使我们有一种将多年教学经验述于纸面的冲动,同样的责任感又使得我们迟迟没有动笔,生怕在已有的热闹非凡的出版市场上平添平庸之作,浪费时间,浪费纸张,浪费资源。

大连理工大学出版社提出要组织编写一套《习题全解(全析)》系列图书,编辑们对该系列图书清晰的思路与准确的定位,与我们的想法一拍即合,立即触发了我们的编写欲望。我们多次征求本科生、专科生,乃至研究生的意见,更加坚定了我们写好本书的信心,进一步明确了本书的定位,这就是——像习题课一样,与学生们一起通过对习题的分析、讨论、求解、总结,扎实掌握大学数学的基础,领悟大学数学的真谛。这就是我们写作本书的初衷。

本书按照被全国许多院校经济、管理等专业采用的赵树嫄主编的《线性代数》(第三版)(中国人民大学出版社)的章节顺序编写,可以与该教材配套使用。

本书详细给出全部习题的解答。真正从学习者的角度,给出解题的每一个过程与步骤,以免略掉一些看似简单但对有些同学理解

解题思路很关键的细节。

学习是一个过程，而过程由环节组成。只有注重环节，控制过程，才能得到良好的学习效果。对学习大学数学来讲，课堂听讲和课后复习是两个重要环节。

本书一经推出，立即受到读者的厚爱，作为编者，深感欣慰。借此修订之际，我们根据读者反馈及编委会的意见，对原书进行了重新编排，并将解题方法及步骤进行优化。我们热切期望更多读者从中获益，并希望更多读者提出宝贵意见及建议。

编 者

2006 年 6 月

目录

第一章　行列式 / 1

第二章　矩阵 / 56

第三章　线性方程组 / 116

第四章　矩阵的特征值 / 175

第五章　二次型 / 204

综合测试 / 226

第一章 行列式

（A）

1. 计算下列二阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

解 原式$=1\times4-3\times1=1$

(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$

解 原式$=2\times2-1\times(-1)=5$

(3) $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix}$

解 原式$=6\times12-9\times8=0$

(4) $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$

解 原式$=ab^2-a^2b=ab(b-a)$

(5) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^2 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$

解 原式$=(x-1)(x^2+x+1)-x^2=x^3-x^2-1$

(6) $\begin{vmatrix} \dfrac{1-t^2}{1+t^2} & \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \dfrac{-2t}{1+t^2} & \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$

解 原式$=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}-\dfrac{2t}{1+t^2}\cdot\dfrac{-2t}{1+t^2}=\dfrac{(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2}=1$

(7) $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$

解 原式$=1\times1-\log_b a\cdot\log_a b=0$

---

2. 计算下列三阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

解法 1 （对角线法则）

原式$=1+8+27-6-6-6=18$

解法 2 （化上三角形）

$$原式\xlongequal{r_1+r_2+r_3}\begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}\xlongequal[r_3-2r_1]{r_2-3r_1}6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2+2r_3}6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}-6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$$=-6\times1\times1\times(-3)=18$$

解法 3 ［按行(列)展开］

$$原式=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}+2\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}+$$

$$3\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=-5+2+21$$

$$=18$$

解法 4 （综合法）

$$\text{原式}\xlongequal[r_3-2r_1]{r_2-3r_1}\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-5&-7\\0&-1&-5\end{vmatrix}=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-5&-7\\-1&-5\end{vmatrix}$$

$=25-7$

$=18$

对于二、三阶行列式可以使用对角线法则，但对于三阶行列式，使用对角线法则计算并不简单，可以利用行列式的性质将行列式化为三角形行列式，其值为主对角线上元素之积，这是计算行列式的一种最常用的方法。四阶以上的行列式不满足对角线法则，在计算高阶行列式时，常使用综合法，首先利用行列式的性质将行列式的某行(列)化为仅含有一个非零元素，然后按此行(列)展开，变为低一阶行列式，如此继续下去，直到化为二阶行列式为止，再计算其值，使计算大大简化。

(2) $\begin{vmatrix}1&1&1\\3&1&4\\8&9&5\end{vmatrix}$

解 $\text{原式}\xlongequal[r_3-8r_1]{r_2-3r_1}\begin{vmatrix}1&1&1\\0&-2&1\\0&1&-3\end{vmatrix}=(-2)\times(-3)-1\times1=5$

(3) $\begin{vmatrix}1&0&-1\\3&5&0\\0&4&1\end{vmatrix}$

解 $\text{原式}\xlongequal{r_2-3r_1}\begin{vmatrix}1&0&-1\\0&5&3\\0&4&1\end{vmatrix}=5\times1-3\times4=-7$

(4) $\begin{vmatrix}0&a&0\\b&0&c\\0&d&0\end{vmatrix}$

解 原式$=a\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} b & c \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=0$

注意到在计算行列式时，有一行（列）的元素全为零，其值为零。

3. 证明下列等式：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

证明 左式$=a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2$

$=a_1(b_2c_3-b_3c_2)-b_1(a_2c_3-a_3c_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)$

$=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

$=$右式

4. $k=?$ 时，$\begin{vmatrix} k & 3 & 4 \\ -1 & k & 0 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix}=0$。

解 因为$\begin{vmatrix} k & 3 & 4 \\ -1 & k & 0 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix}=k^2-4k+3=(k-3)(k-1)=0$

所以 $k=3$ 或 $k=1$ 时，$\begin{vmatrix} k & 3 & 4 \\ -1 & k & 0 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix}=0$

5. 当 x 取何值时，$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix}\neq 0$。

解 因为$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix}=2x^2-4x=2x(x-2)$

所以当 $x\neq0$ 且 $x\neq2$ 时，$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix}\neq0$

---

6. $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix}>0$ 的充分必要条件是什么？

解 因为$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix}=-a^2+4$

所以$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix}>0$ 的充分必要条件是$|a|<2$。

---

7. 求下列排列的逆序数：

(1)41253

解 $N(41253)=1+1+2+0+0=4$

(2)3712456

解 $N(3712456)=2+2+0+1+1+1+0=7$

(3)36715284

解 $N(36715284)=3+4+0+4+2+0+0+0=13$

(4)$n(n-1)\cdots21$

解 $N[n(n-1)\cdots21]$

$=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{[(n-1)+1](n-1)}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$

在计算逆序数时，最好按一定顺序计算：与 1 构成逆序的个数，与 2 构成逆序的个数，…，与 $n-1$ 构成逆序的个数，然后累加起来为逆序总数。

8. 在六阶行列式 $|a_{ij}|$ 中，下列各元素乘积应取什么符号？

(1) $a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51}a_{66}$

解 因为行指标已按自然顺序排列，该项的符号由列指标组成排列的逆序数来确定。

$$N(532416)=4+2+1+1+0+0=8$$

而 8 为偶数，所以 $a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51}a_{66}$ 在六阶行列式中取正号。

(2) $a_{11}a_{26}a_{32}a_{44}a_{53}a_{65}$

解 因为行指标已按自然顺序排列，该项的符号由列指标组成排列的逆序数来确定

$$N(162435)=0+1+2+1+1+0=5$$

而 5 为奇数，所以 $a_{11}a_{26}a_{32}a_{44}a_{53}a_{65}$ 在六阶行列式中取负号。

(3) $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$

解 行指标和列指标都没按自然顺序排列，该项的符号由行指标组成排列与列指标组成排列的逆序数之和来确定

$$N(251463)=2+0+3+1+0+0=6$$

$$N(136254)=0+2+0+2+1+0=5$$

而 $N(251463)+N(136254)=11$ 为奇数，所以 $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$ 在六阶行列式中取负号。

(4) $a_{51}a_{32}a_{13}a_{44}a_{65}a_{26}$

解 列指标已按自然顺序排列，该项的符号由行指标组成排列的逆序数来确定

$$N(531462)=2+4+1+1+0+0=8$$

而 8 为偶数，所以 $a_{51}a_{32}a_{13}a_{44}a_{65}a_{26}$ 在六阶行列式中取正号。

(5) $a_{61}a_{52}a_{43}a_{34}a_{25}a_{16}$

解 列指标已按自然顺序排列，该项的符号由行指标组成排列的逆序数来确定。

$$N(654321)=5+4+3+2+1+0=15$$

而 15 为奇数，所以 $a_{61}a_{52}a_{43}a_{34}a_{25}a_{16}$ 在六阶行列式中取负号。

---

9. 选择 k,l 使 $a_{13}a_{2k}a_{34}a_{42}a_{5l}$ 成为 5 阶行列式 $|a_{ij}|$ 中带有负号的项。

解 由行列式定义，每一项中的元素取自不同行不同列，故有 $k=1,l=5$ 或 $k=5,l=1$。

当 $k=1,l=5$ 时，该项为

$$a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}a_{55}$$

行指标已按自然顺序排列，该项的符号由列指标组成的排列的逆序数来确定

$$N(31425)=1+2+0+0+0=3$$

而 3 为奇数，所以

当 $k=1,l=5$ 时，$a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}a_{55}$ 为 5 阶行列式 $|a_{ij}|$ 中带有负号的项。

同理，当 $k=5,l=1$ 时，$a_{13}a_{25}a_{34}a_{42}a_{51}$ 为 5 阶行列式 $|a_{ij}|$ 中带有正号的项。

---

10. 设 n 阶行列式中有 n^2-n 个以上元素为零，证明该行列式为零。

证明 根据 n 阶行列式定义，$|a_{ij}|$ 的一般项为

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

又 $|a_{ij}|$ 中零元素个数大于 n^2-n，所以 $|a_{ij}|$ 中不等于零的元素个数小于 $n^2-(n^2-n)=n$ 个，由此可知行列式 $|a_{ij}|$ 的任一项都等于零，所以，该行列式为零。即 $|a_{ij}|=0$。

---

11. 用行列式定义计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$

解 行列式的一般项为

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

在一般项中，$a_{1n}=1,a_{1j_1}=0,(j_1=1,2,\cdots,n-1)$；$a_{2,n-1}=2,a_{2j_2}=0,(j_2=1,2,\cdots,n-2,n)$；$\cdots$；$a_{n-1,2}=n-1,a_{n-1,j_{n-1}}=0,(j_{n-1}=1,3,\cdots,n)$；$a_{n1}=n,a_{nj_n}=0(j_n=2,3,\cdots,n)$。因此，在该行列式中只有 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$ 这一项不为零，其他项均为零。由于

$$N(n(n-1)\cdots 2\ 1)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{(n-1)n}{2}$$

于是
$$原式=(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}n!$$

(2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

解 行列式的一般项为

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

在一般项中，$a_{12}=1,a_{1j_1}=0,(j_1=1,3,\cdots,n)$；$a_{23}=2,a_{2j_2}=0,(j_2=1,2,4,\cdots,n)$；$\cdots$；$a_{n-1,n}=n-1,a_{n-1j_{n-1}}=0,(j_{n-1}=1,2,\cdots,n-1)$；$a_{n1}=n,a_{nj_n}=0,(j_n=2,3,\cdots,n-1)$。因此，在该行列式中只有 $a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1,n}a_{n1}$ 这一项不为零，其他项均为零。由于行指标已按自然顺序排列，列指标的逆序数为

$$N(23\cdots n1)=n-1$$

于是
$$原式=(-1)^{n-1}n!$$