高等
师专
教材

GAO DENG

主编　陈世兴　副主编　周鼎鼐

高等数学

（下册）

SHI ZHUAN
JIAOCAI

高 等 数 学

（物理、化学专业用）

下　　册

主 编：陈世兴
副主编：周鼎鼐
编写人员（按姓氏笔划）：
王灿照　陈世兴　周鼎鼐
郁定国　高建筑
主　审：宋国栋

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下/陈世兴主编. 一上海 : 华东师范大学出版社，1991. 6 (2000. 2 重印)
全国高等师范院校专业教材
ISBN 7-5617-0636-7

Ⅰ. 高… Ⅱ. 陈… Ⅲ. 高等数学-师范大学-教材
Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2000) 第 13003 号

高 等 数 学

(下)

陈世兴 主编

华东师范大学出版社出版
(上海市中山北路 3663 号)
新华书店上海发行所发行　江苏昆山亭林印刷总厂印刷
开本：850×1168　1/32　印张：10.75　字数：265 千字
1991 年 6 月第一版　2000 年 2 月第 8 次印刷
印数：28 501－32 500 本

ISBN 7－5617－0636－7/N・047　定价：10.00 元

出 版 说 明

1986 年，我社受国家教委有关部门的委托，根据国家教委师范司制订的《二年制师范专科学校八个专业教学计划》的要求，与全国各省、市、自治区教委合作，共同组织编写了全国高等师范专科学校教材 20 余种；并与华东六省教委密切协作，编写了能反映华东地区师专教学和科研水平的、适应经济建设较为发达地区的师专教学需要的教材 40 余种，师专第一次拥有了比较符合自己培养规格、规律和教学要求而自成系统的教材。实践证明，师专教材建设对于提高师专教学水平，保证师专教学质量起到了重要作用。

近几年来，在邓小平同志建设有中国特色社会主义理论的指引下，我国的教育事业取得了很大发展。国家教委根据《中国教育改革发展纲要》的要求，针对高等师范专科学校的教育特点，颁发了《高等师范专科教育二、三年制教学方案》，进一步明确了高等师范教育面向 21 世纪的发展目标和战略任务，以及教学内容和教学结构的改革要求。

自出版第一本师专教材以来，我社多年来分阶段地对师专教材的使用情况进行了跟踪分析，又于 1995 年开展了较为系统的全面调查。调查中，教师普遍反映，现有师专教材尚不同程度存在着与当前师专教学实际相脱节的现象：对各学科中的新发现、新理论、新成果，未能加以必要的反映，已跟不上当前社会、经济、科技等发展的新形势。考虑到师专从二年制向三年制发展的现状和趋势，我社于 1996 年初与华东六省教委有关部门一起，邀集全国 48 所师专代表专门研讨了师专教材建设问题，随即开展了部分教材的修订和新编工作。1999 年，我社又进行了更大范围的实地调查，

发现不少地区已将对中学教师的培养提高到了本科水平，在专业设置、课程计划、教学要求等方面都有变化。为此，我们对部分教材作了进一步的修订，使其能够适应新世纪的师范教学需要，同时也可用于中学教师的职后培训。

师范院校教材建设并不是一个孤立的系统，它必须服务于师范教育的总体规划。它已经历了从“无”到“有”的过程，并将逐步实现从“有”到“优”的目标。我们相信，通过各方面的努力，修订和新编的师范院校教材将充分体现基础与能力相结合，理论与实践相结合，当前与未来相结合的特色，日臻完善和成熟。

这次编写和修订工作得到了有关省市教委的大力支持，我们谨在此深表谢忱，并向为师范院校教材建设付出辛勤劳动的各地师范院校领导和所有参加编写、修订和审稿的专家、学者等致以衷心的谢意。

华东师范大学出版社

2000 年 1 月

目　　录

第八章　空间解析几何

学习多元函数微积分学的知识，必须以空间解析几何的基本知识为基础。

空间解析几何是平面解析几何的直接推广，它也是以直角坐标系为桥梁，把空间图形与三元方程对应起来，用代数的方法来研究几何问题。

我们将要研究的空间图形，主要是空间的平面、直线和常见的曲面、曲线。

应用向量的概念和运算的知识，可以极大地简化空间解析几何的推理和运算，所以向量代数是学习空间解析几何的重要工具，而且它本身在物理及数学其它分支中也有广泛的应用。因此，本章首先研究向量代数的知识。

§8.1　向量代数

一、空间直角坐标系

在平面直角坐标系的基础上，过原点O再引一条数轴——z轴（竖轴）与x轴、y轴垂直，并使三条坐标轴的正向满足右手法则，即当右手的四指从x轴正向作$90°$的旋转，转向y轴正向时，大姆指的指向是z轴的正向。三条坐标轴的长度单位，可以相同也可以不同。这样，我们得到**空间直角坐标系**。

空间直角坐标系中，任两条坐标轴决定一个平面，称为**坐标平面**，例如称x轴、y轴所确定的坐标面为xOy平面。三个坐标平面把空间分成八个部分，每一部分叫**卦限**。含有三个坐标轴正

向的卦限，称为第一卦限，在 xOy 平面上部如图 8.1 所示，依次得Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ四个卦限。在 xOy 平面下部与第Ⅰ卦限相对的为第Ⅴ卦限，依次得Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ几个卦限(图 8.1)。

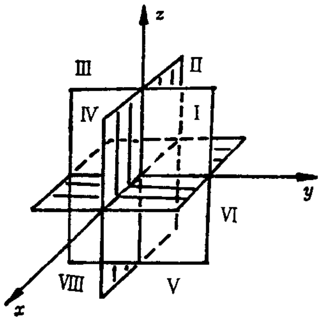

图8.1

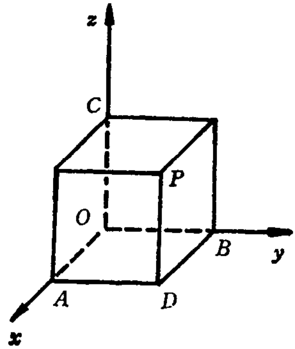

图8.2

给定空间任一点 P，过 P 分别作 yOz、zOx、xOy 三个坐标平面的平行平面，交 x、y、z 轴于点 A、B、C，设 A、B、C 三点在三条坐标轴上的坐标依次为 x、y、z，则 (x, y, z) 称为点 P 在这个坐标系中的**坐标**(图8.2)。

显然空间任一确定的点，都有确定的三个实数的有序数组与之对应，而且不同的点有不同的数组与之对应；反之，任给有序数组 (x, y, z)，我们可在 x、y、z 轴上，分别取坐标为 x、y、z 的三个点 A、B、C，过 A、B、C 分别作 yOz、zOx、xOy 坐标平面的平行平面，它们的交点 P 就是以数组 (x, y, z) 为坐标的点。于是我们就在空间点集与三个实数的有序数组集合之间建立了一一对应关系，表示为

$$P \longleftrightarrow (x, y, z)。$$

如果点 P 的坐标为 (x, y, z)，则 P 点到原点 O 的距离 $|OP|$ 可用勾股定理求出(见图 8.2)：

$$|OP| = \sqrt{|OD|^2 + |DP|^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}。$$

想一想：若已知空间两点A、B的坐标，怎样计算A、B间的距离$|AB|$？

二、三维向量的概念

许多物理量，如力、位移、速度和加速度，都有量值和方向两个因素，这样的量称为**向量**(或矢量)。向量可以用有次序的一对点P、Q来描述，我们把它称为从P到Q的向量，且通常记为$\overrightarrow{PQ}$，P叫做它的始点，Q叫做它的终点。

与始点无关，可以平移的向量叫**自由向量**。凡具有相同长度和相同方向的自由向量，都认为是相等的。物理学中有些向量是与始点有关的，如力矩，这样的向量叫**约束向量**。本章下面提到的向量如不加特别说明，都指的是自由向量。

考虑到向量可以平移的约定，我们可以把空间所有向量的始点认为都在原点。这样每一点P都决定了一个向量$\overrightarrow{OP}$，称为点P的位置矢量，简称为**位矢**。显然不同的点对应着不同的位矢，而每一个位矢，也都有它的终点与之对应。这样，我们在空间点集和始点在原点的自由向量的集合之间建立了一一对应关系：

$$P \longleftrightarrow \overrightarrow{OP},$$

从而也就在向量集与三个实数的有序数组的集合之间建立了一一对应关系：

$$\overrightarrow{OP} \longleftrightarrow (x, y, z) \quad 。$$

为了方便，如点P的坐标为(x, y, z)，我们记

$$\overrightarrow{OP} = (x, y, z),$$

并称(x, y, z)为向量$\overrightarrow{OP}$在该坐标系下的坐标。下面我们通常用希腊字母α，β，$\gamma \cdots$来表示向量。

显然，两个相等的向量，一定具有完全相同的坐标。

因为在空间中，任一向量都可由三个独立的有序实数来唯一地决定，所以我们称这样的向量为三维向量。

向量 α 的长度（或叫模）记为 $|\alpha|$，如果向量 α 在直角坐标系的坐标为 (x, y, z)，则 $|\alpha|$ 就是向量 α 的终点到原点的距离，即

$$|\alpha| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}。$$

长度为零的向量称为**零向量**，用 O 来表示，它的方向可看作任意的。要注意零向量与数零的区别，显然

$$O = (0, 0, 0)。$$

长度为 1 的向量称为**单位向量**，例如 $(1, 0, 0)$，$(0, 1, 0)$，$(0, 0, 1)$ 都是单位向量，又如在直角坐标下 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ 也是单位向量。

与向量 α 的大小相等、而方向相反的向量，叫做 α 的负向量，记为 $-\alpha$，如果 $\alpha = (x, y, z)$，则显然

$$-\alpha = (-x, -y, -z)。$$

三、向量的线性运算

向量的线性运算包括向量的加法和数与向量的乘法。

1．向量的加法

定义 1　若 $\alpha = (x_1, y_1, z_1)$，$\beta = (x_2, y_2, z_2)$，它们的和 $\alpha_1 + \alpha_2$ 是这样的向量：

$$\alpha_1 + \alpha_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)。$$

向量加法的几何意义是：若 $\alpha_1 = \overrightarrow{OA}$，$\beta = \overrightarrow{OB}$，过 A、B 分别引 $\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{OA}$ 的平行线，两直线交于点 C，则 $\alpha_1 + \alpha_2 = \overrightarrow{OC}$。因为四边形 $OACB$ 是以 α_1、α_2 为邻边的平行四边形，OC 是它

的对角线，求两向量和的这个几何方法叫做**平行四边形法则**。

为了证明这个法则，我们分别过 A、B、C 作 z 轴的平行线，交 xOy 平面于点 A'、B'、C'（图8.3）。利用三角形全等容易得出 C' 的横坐标，也即 C 的横坐标为 x_1+x_2，同理可得 C 的纵坐标为 y_1+y_2。如果把 A、B、C 投影到 yOz 平面，可得 C 的纵坐标为 z_1+z_2。可见 $\overrightarrow{OC'}$ 恰好是 α_1 与 α_2 的和。

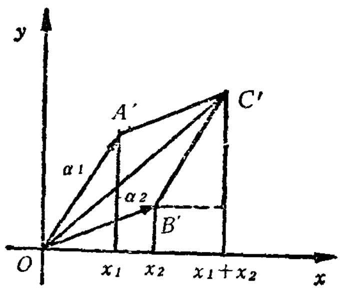

图8.3

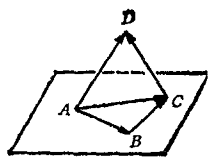

图8.4

由于向量可以平移，我们又有向量加法的三角形法则：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$（图 8.4），即若第一向量终点与第二向量始点重合，则这两向量的和为从第一向量始点引向第二向量终点的向量。

三角形法则容易应用到若干个向量的和（如图 8.4），

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}。$$

从向量加法的三角形法则，可以得到向量模长的三角形不等式：

$$|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|$$

当且仅当 α，β 同向时等号成立。

向量加法满足下列性质：

1° 交换律，即 $\alpha+\beta=\beta+\alpha$；

2° 结合律，即 $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$；

3° 对任一向量 α，有 $\alpha+0=\alpha$；

4° 对任一向量 α，有 $\alpha+(-\alpha)=0$。

证明请读者完成。

向量的减法定义为：若 $\alpha=\beta+\gamma$，就称 γ 为 α 与 β 的差，记为 $\gamma=\alpha-\beta$ 。

显然 $\gamma=\alpha+(-\beta)$，即 α 减去 β，就是 α 加上 β 的负向量 $-\beta$ 。

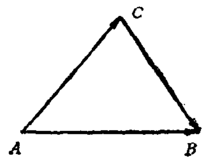

图8.5

两向量的差也可用三角形法则作出：$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$，即两向量有公共始点，它们的差为减向量终点引向被减向量终点的向量（图8.5）。

如果 $\overrightarrow{OM_1}=(x_1,y_1,z_1)$，$\overrightarrow{OM_2}=(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1),$$

因为点 M_1 与 M_2 的距离就是向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的长度 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$，所以空间任意两点的距离公式为

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}。$$

2. 数与向量的乘法

定义 2 实数 k 与向量 $\alpha=(x,\ y,\ z)$ 的乘积规定为

$$k\alpha=(kx,\ ky,\ kz)。$$

例如 $-2(1,\ 0,\ -3)=(-2,\ 0,\ 6)$。

数与向量的乘积的几何意义是：实数 k 与向量 α 的乘积是这样的向量 $k\alpha$，它的长度为 $|\alpha|$ 的 $|k|$ 倍，即 $|k\alpha|=|k||\alpha|$；当 k 为正数时，它的方向与 α 相同，当 k 为负数时，它的方向与 α 相反。如果 $k=0$，它就成为零矢量；如果 $k=-1$，即得 α 的负向量 $-\alpha$。图 8.6 所表示的是 k 为大于 1 的正数的情况。

数与向量的乘法满足下列性质：

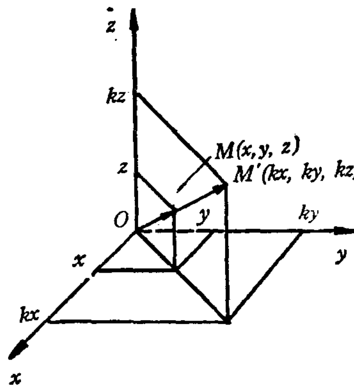

图8.6

1° $(k+l)\alpha = k\alpha + l\alpha$

2° $k(\alpha+\beta) = k\alpha + k\beta$

3° $(kl)\alpha = k(l\alpha)$

4° $1\cdot\alpha = \alpha$

其中 k、l 为任意实数，α、β为任意向量。

设 α 是任一长度不等于1、也不等于零的向量，与 α 同方向的单位向量为 α^0，则

$$\alpha = |\alpha|\alpha^0,$$

于是 $\alpha^0 = \frac{1}{|\alpha|}\alpha$。所以求与给定的非零向量 α 同向的单位向量，只要用 $|\alpha|$ 的倒数去乘 α 即可。这个过程叫做把向量单位化。

例如，若 $\alpha = (-1, 4, 3)$，与 α 同向的单位向量为

$$\alpha^0 = \frac{1}{\sqrt{(-1^2)+4^2+3^2}}(-1,4,3)$$

$$= \left(\frac{-1}{\sqrt{26}}, \frac{4}{\sqrt{26}}, \frac{3}{\sqrt{26}}\right)。$$

3．向量的分解

如果 $\alpha_3 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$，且 α_1、α_2、α_3 有公共起点，则显然 α_3 在 α_1 与 α_2 所决定的平面上，也即 α_1、α_2、α_3 共面。反之，在一个平面上给定任意三个有共同起点O且两两不共线的向量 α_1、α_2、α_3，由向量 α_3 的终点C引两条平行于 α_1、α_2 的直线，分别交 α_1，α_2 所在的直线于 M，N，则总存在实数 k_1、k_2，使

$$\alpha_3 = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2,$$

这称为 α_3 对 α_1、α_2 的分解（图8.7）。

假定 α_1、α_2、α_3 是非共面向量，α_4 是任一向量，把它们都

移到公共起点O，由向量α_4的终点D作三个平面，分别平行于α_1、α_2决定的平面，α_2、α_3决定的平面与α_3、α_1决定的平面，交α_1、α_2、α_3所在直线于L、N、M，则总存在实数k_1、k_2、k_3，使$\overrightarrow{OL}=k_1\alpha_1$，$\overrightarrow{ON}=k_2\alpha_2$，$\overrightarrow{OM}=k_3\alpha_3$，于是

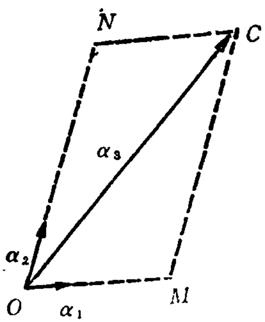

图8.7

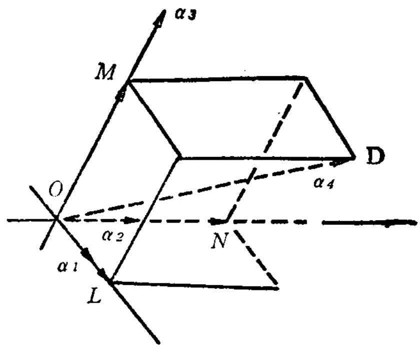

图8.8

$$\alpha_4=\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OM}=k\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3,$$

这称为α_4对α_1、α_2、α_3的分解。

在直角坐标系下，令

$$(1,\ 0,\ 0)=i,\ (0,\ 1,\ 0)=j,\ (0,\ 0,\ 1)=k,$$

则i、j、k是两两垂直的单位向量，这三个单位矢量叫做**基本单位矢量**。我们常用$[o;\ i,\ j,\ k]$来表示这个直角坐标系。

给定非零向量α、β，把它们平移到共同始点O，并设$\alpha=\overrightarrow{OA}$，$\beta=\overrightarrow{OB}$，由点$A$向$\overrightarrow{OB}$所决定的数轴$l$作垂线，垂足为$H$。称$\overrightarrow{OH}$为$\alpha$在$\beta$方向上的**正射影向量**，简称**射影**。点$H$在数轴$l$上的坐标，称为$\alpha$在$\beta$方向上的**分量**（或称为**投影**），记为$Prj_\beta\alpha$，或$Prj_l\alpha$。显然

$$Prj_{\beta}\alpha = |\alpha|\cos(\alpha, \beta),$$

其中α与β的夹角$(\alpha,\beta)=\theta$规定为：把它们平移到有共同始点O时，两向量所在半射线的夹角，并约定是一个不大于180°的无向角（即与α，β的排列顺序无关），见图8.9。于是

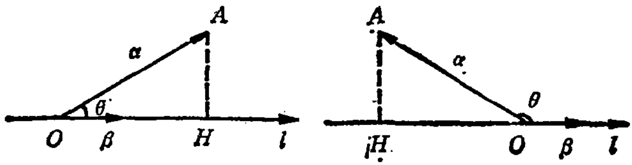

图8.9

当(α, β)为锐角时，

$Prj_{\beta}\alpha>0$，

当(α, β)为直角时，

$Prj_{\beta}\alpha=0$，

当(α, β)为钝角时，

$Prj_{\beta}\alpha<0$。

在直角坐标系$[O; i,j,k]$中，给定$\alpha=\overrightarrow{OP}=(x, y, z)$，设它在$i$、$j$、$k$三个方向上的射影为$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$，又设点$P$在$xOy$平面上的正投影为$M$，则

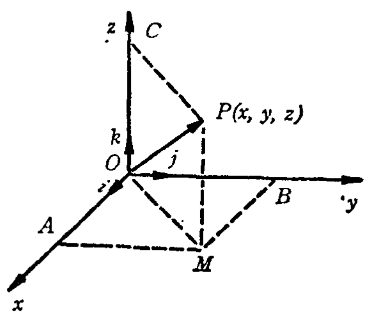

图8.10

$$\overrightarrow{OA}=xi,$$
$$\overrightarrow{OB}=yj,$$
$$\overrightarrow{OC}=zk.$$

且

$$\alpha=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$
$$=xi+yj+zk$$

这个式子称为α的坐标分解式。其中x、y、z就是α在i、j、k三个方向上的分量。

设 $\alpha=(x_1,\ y_1,\ z_1)=x_1i+y_1j+z_1k,$

$\beta=(x_2,\ y_2,\ z_2)=x_2i+y_2j+z_2k,$

由于向量线性运算所满足的性质，我们有

$$\alpha\pm\beta=(x_1\pm x_2)i+(y_1\pm y_2)j+(z_1\pm z_2)k,$$
$$\lambda\alpha=\lambda x_1i+\lambda y_1j+\lambda z_1k\qquad(\lambda\in\mathrm{R})。$$

4．向量的方向角和方向余弦

定义 3 (α,i)、(α,j)、(α,k)称为向量α的**方向角**，它们的余弦值称为α的**方向余弦**。

设 $\alpha=xi+yj+zk$，则有

$$\cos(\alpha,i)=\frac{x}{|\alpha|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos(\alpha,j)=\frac{y}{|\alpha|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+y^2}},$$

$$\cos(\alpha,k)=\frac{z}{|\alpha|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}。$$

从而有

$$\cos^2(\alpha,i)+\cos^2(\alpha,j)+\cos^2(\alpha,k)=1。$$

即任一向量的三个方向余弦的平方和恒等于1。

例如向量$\alpha=(1,\ -2,\ 3)$的方向余弦为

$$\cos(\alpha,i)=\frac{1}{\sqrt{1+(-2)^2+3^2}}=\frac{1}{\sqrt{14}},$$

$$\cos(\alpha,j)=\frac{-2}{\sqrt{14}},$$

$$\cos(a,k)=\frac{3}{\sqrt{14}}。$$

5．向量线性运算的一些应用

(1) 求已知线段的定比分点的坐标

设空间两点 M_1、M_2 的坐标为 (x_1, y_1, z_1) 与 (x_2, y_2, z_2)，在线段 M_1M_2 中间求一点 $M(x, y, z)$，使 $\frac{M_1M}{MM_2}=\lambda$，$\lambda$ 为正实数。

根据给定的条件有

$$\overrightarrow{M_1M}=\lambda\overrightarrow{MM_2},$$

从图8.11可以得出

$$\overrightarrow{M_1M}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_1},$$

$$\overrightarrow{MM_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM}。$$

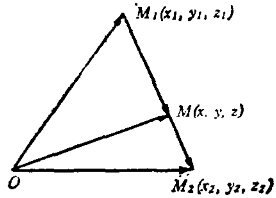

图8.11

于是有

$$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_1}=\lambda\overrightarrow{MM_2}=\lambda\overrightarrow{OM_2}-\lambda\overrightarrow{OM},$$

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OM_1}+\lambda\overrightarrow{OM_2}}{1+\lambda},$$

即 $$(x,y,z)=\frac{1}{1+\lambda}(x_1+\lambda x_2,\ y_1+\lambda y_2,\ z_1+\lambda z_2)。$$

根据相等的向量有完全相同的坐标，我们求得点M的坐标为

$$x=\frac{x_1+\lambda x_3}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

如果点M在线段 M_1M_2 或 M_2M_1 的延长线上，点M称为外分点，那末与平面上的类似问题一样，只要取 λ 为负值就可以了。

想一想：分点M在直线 M_1M_2 上移动时，λ 如何变化？

例1 若点 A、B、C 的坐标为 (x_1, y_1, z_1)、$(x_2, y_2,$