主编：刘以林

中华学生百科全书

素质教育
必备的参考书

SUZHIJIAOYUBIBEICANKAOSHU

ZHONG
HUA XUE SHENG
BAI KE QUAN SHU

数学天地

92
KDF

中华学生百科全书

数　学　天　地

总 主 编　　刘以林

本册主编　　康东发

北京燕山出版社

京新登字 209 号

中华学生百科全书
刘以林　主编
北京燕山出版社出版发行
北京市东城区府学胡同 36 号　100007
新　华　书　店　经　销
北京顺义康华印刷厂印刷
787×1092 毫米　32 开本　250 印张　5408 千字
1996 年 12 月第 1 版　1996 年 12 月北京第 1 次印刷
ISBN7-5402-0491-5
印数：6000 册
定价：320.00 元（全 100 册）

《中华学生百科全书》编委会

中华学生
百科全书

数学天地

目　录

自然数

自然数是在人类的生产和生活实践中逐渐产生的。人类认识自然数的过程是相当长的。在远古时代，人类在捕鱼、狩猎和采集果实的劳动中产生了计数的需要。起初人们用手指、绳结、刻痕、石子或木棒等实物来计数。例如：表示捕获了3只羊，就伸出3个手指；用5个小石子表示捕捞了5条鱼；一些人外出捕猎，出去1天，家里的人就在绳子上打1个结，用绳结的个数来表示外出的天数。这样经过较长时间，随着生产和交换的不断增多以及语言的发展，渐渐地把数从具体事物中抽象出来，先有数目1，以后逐次加1，得到2、3、4……，这样逐渐产生和形成了自然数。因此，可以把自然数定义为，在数物体的时候，用来表示物体个数的1、2、3、4、5、6……叫做自然数。自然数的单位是“1”，任何自然数都是由若干个“1”组成的。自然数有无限多个，1是最小的自然数，没有最大的自然数。

零

可以说，自然数是从表示“有”多少的需要中产生的。在实践中还常常遇到没有物体的情况。例如：盘子里一个苹果也没有。为了表示“没有”，就产生了一个新的数“零”。

“零”是一个数，记作“0”，“0”是整数，但不是自然数，它比所有的自然数都小。“0”作为一个单独的数，不仅可以表示“没有”，而且是一个有完全确定意义的数，是一个起着

很多重要作用的数。具体作用有：

（1）表示数的某位上没有单位，起到占位的作用。例如：103.04，表示十位和十分位上一个单位也没有。0.10 为近似数时，表示精确到百分位。5.00 元表示特别的单价是 5 元整。

（2）表示某些数量的界限。例如在数轴上 0 是正数与负数的界限。“0”既不是正数，也不是负数。在摄氏温度计上“0”是零上温度与零下温度的分界。

（3）表示温度。在通常情况下水结冰的温度为摄氏“0”度。说今天的气温为零度，并不是指今天没有温度。

（4）表示起点。如在刻度尺上，刻度的起点为“0”。从甲城到乙城的公路上，靠近路边竖有里程碑，每隔 1 千米竖一个，开始第一个桩子上刻的是“0”，表明这是这段公路的起点。

在四则运算中，零有着特殊的性质。

（1）任何数与 0 相加都得原来的数。例如：$5+0=5$，$0+32=32$。

（2）任何数减去 0 都得原来的数。例如：$5-0=5$，$42-0=42$。

（3）相同的两个数相减，差等于 0。例如：$5-5=0$，$428-428=0$。

（4）任何数与 0 相乘，积等于 0。例如：$5\times0=0$，$0\times78=0$

（5）0 除以任何自然数，商都等于 0。例如：$0\div5=0$，$0\div345=0$。因此 0 是任意自然数的倍数。

（6）0 不能作除数。因为任何自然数除以零，都得不到准确的商。例如：$5\div0$，找不到一个数与 0 相乘可以得 5。零除

以零时有无数个商，因为任何数与0相乘都能得到0，所以像5÷0、0÷0都无意义。

为什么1不是素数

全体自然数可以分为三类：

(1) 只能被“1”和它本身整除的数叫素数，如：2、3、5、7、11……。

(2) 除了“1”和它本身以外，还能被其他数整除的数叫合数，如：4、6、8、9……。

(3) “1”既不是素数也不是合数。

有人要问，“1”也只能被1和它本身整除，为什么不能算素数呢？而且“1”算作素数后，全体自然数分成素数和合数两类，岂不是更简单吗？

这要从分解素因数谈起。比如，1001能被哪些数整除，其实质是将1001分解素因数，由$1001=7\times11\times13$，而且只有这一种分解结果，知道1001除了被1和它本身整除以外，还能被7、11、13整除。若把“1”也算作素数，那么1001分解素因数就会出现下面一些结果：

$$1001 = 7 \times 11 \times 13$$

$$1001 = 1 \times 7 \times 11 \times 13$$

$$1001 = 1 \times 1 \times 7 \times 11 \times 13$$

……

也就是说，分解式中可随便添上几个因数“1”。这样做，一方面对求1001的因数毫无必要，另一方而分解素因素结果不唯一，又增添了不必要的麻烦。因此“1”不算作素数。

整数

正整数、零、负整数统称为整数。正整数：1、2、3、4……；零：0；负整数：－1、－2、－3……。正整数即自然数。在小学阶段不学负数，小学学的自然数和零都是整数，也就是说，小学只学习了大于零和等于零的整数。

小数的经历

小数是十进制分数的另一种表示方法。有了小数，使记数更方便了。如圆周率近似值 3.1416，若用分数表示，就得写成$\frac{3927}{1250}$，书写、计算都很麻烦。有位著名美国数学家说："近代计算的奇迹般的动力来自三项发明：印度计数法，十进分数和对数。"这里所说的十进分数就是指小数。

最早使用小数的是中国人。公元 3 世纪，我国魏晋时期刘徽在注《九章算术》时就指出，开方不尽时，可用十进制分数（小数）来表示，比西方早 1300 年。元朝刘瑾（1300 年左右）著《律吕成书》中记 106368.6312 为：

| 〇 ⊥ ||| ⊥ |||

⊥ ||| - ||

把小数部分降低一格，可以说是世界上最早的小数表示法。

中国之外第一个应用小数的是阿拉伯人卡西，他用十进分数（小数）给出了 π 的 17 位有效数值。

在欧洲，比利时人斯蒂文于 1585 年第一次明确地阐述了小数的理论，他把 32.57 记为

$$3\ \overset{⓪}{2}\ \overset{①}{5}\ \overset{②}{7} \quad \text{或}\ 32⓪5①7②$$

1492 年法国人佩洛斯出版的算术书中首次应用了小数点“.”，但他的意思是做除法时，如果除数是 10 的倍数，例如，12356÷600，先将末两位用点分开然后除以 6，即 123.56÷6，仅仅为了做除法时的方便。

直到 1608 年意大利人克拉乌斯出版的代数书中才明确地以小点“.”作为整数部分和小数部分的分界，即现代用法。

同时也有人用“,”来作小数点的记号。直到 19 世纪末，小数点还有种种写法，如 2.5 可写为 2 5；2.5；2·5；$2_{\triangle}5$等。

现代小数点的使用大体分为两大派，欧洲大陆派（德国、法国、苏联等）用逗号作小数点，圆点“·”用作乘法记号，而不用“×”号，因它易与“x”相混。英美派小数点用圆点“.”，逗号用来作分节号（每三位分为一节）。如一亿五千万，记作 150，000，000，而大陆派则写作 150 000 000，不用分节号而每三位数空一格。

无论是东方还是西方，人们对小数的认识，都经历了几百年甚至上千年的演变。

负数的引入

今天人们都能用正负数来表示两种相反意义的量。例如若以冰点的温度表示 0℃，则开水的温度为+100℃，而零下

10℃则记为－10℃。若以海平面为0点，则珠穆朗玛峰的高度约为＋8848米，最深的马里亚纳海沟深约－11034米。在日常生活中，人们常用“＋”表示收入，用“－”表示支出。可是在历史上，负数的引入却经历了漫长而曲折的道路。

古人在实践活动中遇到了一些问题：如两人相互借用东西，对借出方和借入方来说，同一东西具有不同的意义；再如从同一地点，两人同时向相反方向行走，离开出发点的距离即使相同，但其表示的意义却不同。久而久之，古人意识到仅用数量表示一个事物是不全面的，似乎还应加上表示方向的符号。因此为了表示具有相反意义的量和解决被减数小于减数等问题，逐渐产生了负数。

我国是世界上最早使用负数概念的国家。《九章算术》中已经开始使用负数，而且明确指出若“卖”是正，则“买”是负；“余钱”是正，则“不足钱”是负。刘徽注《九章算术》，定义正负数为“两算得失相反”，同时还规定了有理数的加、减法则，认为“正、负术曰：同名相益，异名相除。”这“同名”、“异名”即现在的“同号”、“异号”、“除”和“益”则是“减”和“加”，这些思想，西方要迟于中国八九百年才出现。

印度在公元7世纪才采用负数，公元628年，印度的《婆罗摩修正体系》一书中，把负数解释为负债和损失。在西方，直到1484年，法国的舒开才给出了二次方程的一个负根。1544年，德国的史提非把负数定义为比任何数都小的数。1545年，意大利的卡当著《大法》，成为欧洲第一部论述负数的著作。虽然负数早已出现在人们的计算过程中，但却迟迟得不到学术界的承认，直到17世纪，微学、力学、天文学获

得广泛发展，使用负数可以大大简化计算，所以负数才正式进入了数学。特别是1637年，法国数学家笛卡尔发明了解析几何学，建立了坐标点，将平面点与负数、零、正数组成的实数对应起来，使负数得到了解释，从而加速了人们对负数的承认。但直到19世纪，德国数学家魏尔斯特拉斯等人为整数奠定了逻辑基础以后，负数才在现代数学中获得巩固的地位。

无理数的风波

无限不循环小数叫无理数。据说，它的发现还曾掀起一场巨大的风波。

公元前6世纪，古希腊有个毕达哥拉斯学派——一个宗教、科学和哲学性质的帮会，在数学研究上有很大成绩，以勾股定理、无理数的研究最为著名。毕达哥拉斯学派有一个信条：宇宙间的一切数都能归结为整数或整数之比。毕氏的一个门徒希伯索斯，在研究等腰直角三角形斜边与一直角边之比，或正方形对角线与其一边之比时，发现其比不能用整数之比表达时，便很吃惊。他们证明了这个数不是整数，绞尽脑汁也找不到这个分数，所以希伯索斯等人阐述了这个发现。因其现论违背毕氏学派的信条而引起同伴们的狂怒，竟被抛入大海。另有传说，毕氏学派规定，每当有新的发现发明，都要保守秘密，不得外传，否则要受到严厉制裁。他们发现无理数后，视无理数为一种不能言说的记号。有一门徒泄露了这一发现，便遭到覆舟毙命的惩罚。然而真理是封不住的，不管毕氏门徒如何反对，无理数终于闯入了数的圣地，

使数的概念又扩展了一步。无理数是稠密的，任何两个有理数之间，不管它们多么接近，都存在着无限多个无理数。

真实的虚数

“虚数”这个名词，使人觉得挺玄乎，好像有点“虚”，实际上它的内容却非常“实”。

虚数是在解方程时产生的。求解方程时，常常需要将数开方，如果被开方数是正数，就可以算出要求的根；但如果被开方数是负数，那怎么办呢？

比如：方程 $x^2+1=0$，$x^2=-1$，$x=\pm\sqrt{-1}$。那么 $\sqrt{-1}$ 有没有意义呢？很早以前，大多数人都认为负数是没有平方根的。到了 16 世纪，意大利数学家卡当在其著作《大法》(1545 年) 中，把 $\sqrt{-15}$ 记为 $R \cdot \tilde{m} \cdot 15$，这是最早的虚数记号。但他认为这仅仅是个形式表示而已。1637 年法国数学家笛卡尔，在其《几何学》中第一次给出“虚数”的名称，并和“实数”相对应。1777 年，欧拉在一篇论文中首次用“i”来表示 $\sqrt{-1}$，但以后很少有人注意它。直到 19 世纪初，高斯系统地使用了这个符号，并主张用数偶 $(a、b)$ 来表示 $a+bi$，称为复数，虚数才逐步得以通行。

由于虚数闯进数的领域时，人们对它的实际用处一无所知，在实际生活中似乎没有用复数来表达的量，因此在很长一段时间里，人们对它产生过种种怀疑和误解。笛卡尔称“虚数”的本意就是指它是虚假的；莱布尼兹则认为：“虚数是美妙而奇异的神灵隐蔽所，它几乎是既存在又不存在的两栖物。”欧拉尽管在许多地方用了虚数，但又说一切形如

$\sqrt{-1}$、$\sqrt{-2}$的数学式都是不可能有的，纯属虚幻的。

继欧拉之后，挪威测量学家维塞尔提出把复数(a+bi)用平面上的点来表示。后来高斯又提出了复平面的概念，终于使复数有了立足之地，也为复数的应用开辟了道路。现在，复数一般用来表示向量（有方向的量），这在水利学、地图学、航空学中的应用十分广泛，虚数越来越显示出其丰富的内容。真是：虚数不虚！

虚数的发展说明了：许多数学概念的产生并不直接来自实践，而是来自思维，但只有在实际生活中有了用处时，这些概念才能被接受而获得发展。

π的“马拉松计算”

圆的周长同直径的比值，一般用π来表示，人们称之为圆周率。在数学史上，许多数学家都力图找出它的精确值。约从公元前2世纪，一直到今天，人们发现它仍然是一个无限不循环的小数。因此，人们称它为科学史上的“马拉松”。

关于π的值，最早见于中国古书《周髀算经》的“周三经一”的记载。东汉张衡取π=3.1466（又取$\pi=\sqrt{10}$）。第一个用正确方法计算π值的，要算我国魏晋之际的杰出数学家刘徽，他创立了割圆术，用圆内接正多边形的边数无限增加时，其面积接近于圆面积的方法，一直算到正192边形，算得π=3.14124，又继续求得圆内接正3072边形时，得出更精确的$\pi=\frac{3927}{1250}=3.1416$，割圆术为圆周率的研究，奠定了坚实可靠的理论基础，在数学史上占有十分重要的地位。

随后，我国古代数学家祖冲之又发展了刘徽的方法，一直算到圆内接正 24576 边形，求出 $3.1415926<\pi<3.1215927$，又求得 $\pi=\frac{355}{113}$（密率），$\pi=\frac{22}{7}$（约率），使中国对 π 值的计算领先了 1000 年。为此，有人建议把 $\pi=\frac{355}{113}$ 称为"祖率"，以纪念祖冲之的杰出贡献。

17 世纪以前，各国对圆周率的研究工作仍限于利用圆内接和外切正多边形来进行。1427 年伊朗数学家阿尔·卡西把 π 值精确计算到小数 16 位，打破祖冲之千年的记录。1596 年荷兰数学家鲁多夫计算到 35 位小数，当他去世以后，人们把他算出的 π 数值刻在他的墓碑上，永远纪念着他的贡献（而这块墓碑也标志着研究 π 的一个历史阶段的结束，数求 π 的更精确的值，需另辟途径）。

17 世纪以后，随着微积分的出现，人们便利用级数来求 π 值，1873 年算至 707 位小数，1948 年算至 808 位，创分析方法计算圆周率的最高纪录。

1973 年，法国数学家纪劳德和波叶，采用 7600CDC 型电子计算机，将 π 值算到 100 万位，此后不久，美国的科诺思，又将 π 值推进到 150 万位。1990 年美国数学家采用新的计算方法，算得 π 值到 4.8 亿位。

早在 1761 年，德国数学家兰伯特已证明了 π 是一个无理数。

将 π 计算到这种程度，没有太多的实用价值，但对其计算方法的研究，却有一定的理论意义，对其他方面的数学研究有很大的启发和推动作用。