GAILÜLUN

概率论

郭同德 编著

黄河水利出版社

面 向 2 1 世 纪 改 革 教 材
河南省工科数学教改课题组研究成果

概 率 论

郭同德 编著

黄 河 水 利 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

概率论/郭同德编著.—郑州:黄河水利出版社,
2006.8
ISBN 7-80734-064-9

Ⅰ.概… Ⅱ.郭… Ⅲ.概率论-高等学校—教材
Ⅳ.O211

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第036745号

组稿编辑:王路平 电话:0371-66022212 E-mail:wlp@yrcp.com

出 版 社:黄河水利出版社
地址:河南省郑州市金水路11号 邮政编码:450003
发行单位:黄河水利出版社
发行部电话:0371-66026940 传真:0371-66022620
E-mail:hhslcbs@126.com
承印单位:黄河水利委员会印刷厂
开本:850 mm×1 168 mm 1/32
印张:4.75
字数:120千字 印数:1—3 100
版次:2006年8月第1版 印次:2006年8月第1次印刷

书号:ISBN 7-80734-064-9/O·17 定价:10.00元

前　言

概率论是从数量侧面研究随机现象规律性的数学学科，自身理论严谨，发展迅速．概率论发展到今天，已经成为一门内容丰富、应用广泛的学科．小至游戏，大至金融、气象，到处都能看到概率的身影．事实上，概率论早已成为一般工程技术人员、管理人员必备的数学工具和共同语言．

本书为河南省面向21世纪工科类系列数学教材之一，编写过程中主要参照了教育部“21世纪教学内容和课程体系改革总目标和要求”以及教育部制定的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》．结合工科专业的特点，在本教材的编写中着重考虑了以下指导思想：

(1)以应用为主．对非数学专业的学生来讲，学习概率论的主要目的是掌握一门数学工具，使之能用于解决各自专业领域的相关问题，基于这一指导思想，书中省略了一些不必要的数学推导，并尽量结合工程背景叙述有关概念和主要结论．

(2)侧重基本方法的掌握和概念的理解．不少学过概率论的同学认为概率论这门课程不好学，而古典概率又是最大难点．这是一种误解．作者从事概率论与数理统计的教学20余年，同时也参与了多项有关的实际应用课题的研究，作者认为概念的把握和基本方法的正确运用是解决工程实际问题的关键，对非数学专业的学生来讲，把精力用于那些近乎于智力游戏的例题和习题多少有些得不偿失，这一点也可以从近些年研究生入学试题中得到印证．基于这一观点，本书着重于概念的解释和方法的训练，对例题和习题

的设置也作了较大的调整.

本书各章均配备了一定数目和适当难度的习题,并分为(A)、(B)两部分,(A)部分是基本的,目的是通过练习,进一步掌握有关方法.(B)部分多是取自近年来的硕士研究生入学试题,目的是使读者通过该部分的练习,在一定程度上能灵活运用.书末附有答案,但建议读者在未经独立思考前,不要轻易翻看它.

本书初稿曾先后在郑州大学工程力学系、环境与水利学院、化工学院试用,历经3次修改和补充.限于作者水平,书中不当以至谬误之处,恐在所难免,恳请同行专家及读者不吝指教.

作者

2006年3月

目　录

第 1 章　随机事件及其概率

1.1　随机事件及其关系

在生产与科学研究中,人们会遇到形形色色的现象,按其结果是否确定,可以把这些现象分为两类:确定性现象与随机现象.在一定条件下必然出现某种结果的现象称之为确定性现象,如异性电荷相吸这一现象就是一确定性现象.在一定条件下并不总是出现同一结果的现象称之为随机现象,如射击命中靶的环数就属于随机现象.概率论研究的主要对象是后一种.

人们对随机现象的观察与研究在远古时代就已开始.随着生产与科技的发展,对随机现象的研究也越来越广泛、深入.在揭示随机现象的内在规律方面已有众多行之有效的方法,本书介绍的是其中最基础而重要的方法,这些方法在生产、管理以及科学研究的各个方面有着广泛的应用.

1.1.1　随机事件与样本空间

为了叙述方便,我们把对各种现象的一次观察或试验,称为一个试验.如果一个试验在相同条件下可以重复进行,而且每次试验的结果事前不可预言,则称该试验为一**随机试验**.以下涉及到的试验都是指随机试验.

通常来说,一个随机试验总会有多种结果可能发生(或出现),我们把那些可能发生、也可能不发生的结果称为**随机事件**,简称**事件**,并用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示.

随机试验中,那些不可能再分的事件称为**简单事件**或基本事件,简单事件常用小写字母表示.由若干简单事件组合而成的事件称为**复合事件**;由所有简单事件组合而成的事件称为随机试验的**样本空间**,并用 Ω 表示.

在随机事件中有两种特殊的事件,一种是**必然事件**,另一种是**不可能事件**.在一定条件下,每次试验肯定会发生的事件称为必然事件;每次试验都肯定不会发生的事件称为不可能事件.必然事件与不可能事件已经没有通常意义下的随机性,为了叙述方便仍将它们称为随机事件.必然事件通常用 Ω 表示,而不可能事件常用 $\varnothing$ 表示.

【例 1.1】 掷一骰子,并观察出现的点数,以 e_i 表示"出现 i 点",则 e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 均为简单事件,而"出现偶数点" $=\{e_2,e_4,e_6\}$为一复合事件,它由 e_2,e_4,e_6 三个简单事件组成.该试验的样本空间为 $\Omega=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}$.

【例 1.2】 考查某日某路口通过的卡车数,则样本空间为 $\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$.

【例 1.3】 考查某品牌的电视机寿命,则其样本空间为 $\Omega=\{t\mid t\geqslant 0\}$.

从以上各例可以看出样本空间的基本结果可以是有限个,可以是可数无穷多个,也可以是不可数无穷多个.

1.1.2 随机事件之间的关系及其运算

在对随机试验进行研究时,通常会涉及同一随机试验的多个随机事件,这些事件之间通常是有一定联系的,如复合事件可由简单事件构成.下面引进随机事件之间的关系及其运算.

子事件:若事件 A 出现必然导致事件 B 出现,则称 A 为 B 的

子事件,并记作 $A\subset B$. 如在掷骰子问题中,若 A 表示"出现 2 点",B 表示"出现偶数点",则 $A\subset B$.

相等事件:对两个事件 A 和 B,若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称 A 和 B 为相等事件,并记作 $A=B$.

和事件:"事件 A 与事件 B 至少有一个发生"的事件称为事件 A 与事件 B 的和事件,记 $A\cup B$. 例如,若 A 表示"出现 2 点",B 表示"出现 3 点",则 $A\cup B$ 表示"出现 2,3 点".

积事件:设 A,B 为二事件,"A 和 B 同时发生"的事件称为 A 与 B 的积事件,记为 $A\cap B$ 或 AB. 例如:A 为"出现 1,2,3 点",B 为"出现 2,3,4 点",则 AB 为"出现 2,3 点".

事件的和与积的运算可以推广到三个及三个以上的事件,其定义及记法与两个事件的情形类似.

互斥事件:若事件 A 与 B 不可能同时发生,即 $AB=\varnothing$,则称 A 与 B 为互斥事件. 例如,若 A 为"出现 2 点",B 为"出现 4,5 点",则 A 与 B 互斥.

互逆事件:若二事件 A 与 B 满足 $AB=\varnothing$ 且 $A\cup B=\Omega$,则称 A,B 两事件为互逆事件,并把其中一个事件称为另一事件的逆事件. 事件 A 的逆事件记为 $\overline{A}$. 例如在掷骰子试验中,若 A 表示"出现偶数点",则 $\overline{A}$ 表示"出现奇数点".

差事件:设 A,B 为二事件,称"A 出现而 B 不出现"的事件为 A 与 B 的差事件,并记为 $A-B$. 例如:若 A 为"出现 1,2,3,4 点",B 为"出现 3,4,5 点",则 $A-B$ 表示"出现 1,2 点".

完备事件组:若事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥,而且其和事件为必然事件,即:$A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$ 且 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$,则 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 称为完备事件组.

【例 1.4】 检验一圆柱形产品时规定:若其直径及长度均合格,则

该产品为合格品.现取一件该产品进行检验,记 A 为“直径合格”,B 为“长度合格”,试用 A,B 表示下列事件:

(1)该产品为合格品;

(2)该产品为不合格品;

(3)该产品直径合格,而长度不合格;

(4)该产品两项指标均不合格.

解 (1)该产品为合格品,意味着其直径及长度均合格,即 AB.

(2)该产品为不合格品,意味着其直径及长度至少有一项不合格,即 $\overline{A}\cup\overline{B}$ 或 $\overline{AB}$;

(3)直径合格而长度不合格,即 $A\overline{B}$ 或 $A-B$;

(4)两项指标均不合格,即 $\overline{A}\,\overline{B}$ 或 $\overline{A\cup B}$.

【例 1.5】 甲、乙两棋手采用三局两胜制对弈,比赛至其中一棋手胜两局结束,假定无和棋.若用 A_i 表示“甲胜了第 i 局”,$i=1,2,3$.试由 A_1,A_2,A_3 表示下列事件:

(1)$A=$“甲只胜了第二局”;(2)$B=$“甲仅胜了一局”;

(3)$C=$“甲至少胜了一局”;(4)$D=$“甲获胜”.

解 (1)“甲只胜了第二局”是指乙胜了第一、三局,甲胜了第二局,故 $A=\overline{A}_1A_2\overline{A}_3$.

(2)“甲仅胜了一局”包含两种情况:仅胜了第一局,即 $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$;仅胜第二局,即$\overline{A}_1A_2\overline{A}_3$;从而 $B=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3$.

(3)$C=A_1\cup A_2$.若从逆事件的角度考虑,则“甲至少胜一局”为“甲前两局皆输”的逆事件,即 $C=\overline{\overline{A}_1\overline{A}_2}$.

(4)“甲获胜”含三种情况:甲在前二局均获胜,依赛制不再进行第三局,即 A_1A_2;甲第一、三局胜、第二局输,即 $A_1\overline{A}_2A_3$;甲第一局输、第二、三局胜,即 $\overline{A}_1A_2A_3$.

总之 $D=A_1A_2\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3$.

从以上各例可以看出，随机事件之间的关系及运算与集合论中集合的关系及运算有许多相似之处.事实上，在许多方面二者是一致的，表 1.1 给出了二者之间的对照关系.除表 1.1 中所列对照关系外，集合的其它常见运算性质对相应的随机事件的运算也是成立的，如 $A(B\cup C)=AB\cup AC$，$A-B=A\overline{B}$，$A=\overline{\overline{A}}$，$A\Omega=A$，$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ 等.

表 1.1

记号	随机事件	集合
Ω	样本空间、必然事件	全集
$\varnothing$	不可能事件	空集
e	基本事件	单点集
A	事件	集合
$\overline{A}$	A 的逆事件	A 的余集
$A\subset B$	A 为 B 的子事件	A 为 B 的子集
$A=B$	相等事件	相等集合
$A\cup B$	和事件	并集
$A\cap B$	积事件	交集
$A-B$	差事件	差集
$AB=\varnothing$	互斥事件	不交集

1.2 随机事件的概率及其性质

不同的随机事件出现的可能性的大小一般是不同的，有的随机事件出现的可能性较大，有的则要小一些，研究随机现象不仅要知道可能出现哪些事件，更重要的是要定量地给出各事件出现的可能性的大小.我们把刻画随机事件出现的可能性大小的数量指

标称为随机事件的概率.下面从不同的角度给出概率的定义.

1.2.1 概率的统计定义

上面对概率作了粗略的描述,为了对概率有更深一层的理解,下面观察两个试验:

试验一:有人连续投掷一枚质地均匀的硬币,每次可能出现的结果有两种:正面朝上或反面朝上.其试验结果见表 1.2.

表 1.2

投掷次数 n	4048	12000	24000
正面出现次数 m	2048	6019	12012
正面出现的频率 m/n	0.5059	0.5016	0.5005

上述试验说明出现正面的频率总在 0.5 附近波动,随着试验次数的增加,频率逐渐稳定于 0.5.这个 0.5 反映了正面出现可能性的大小.

试验二:某人曾连续掷骰子 600 次,记录了各点出现的情况,并绘出频率与试验次数的关系图,如图 1.1 所示(为简单起见,这里只给出“出现 1 点”的情况).

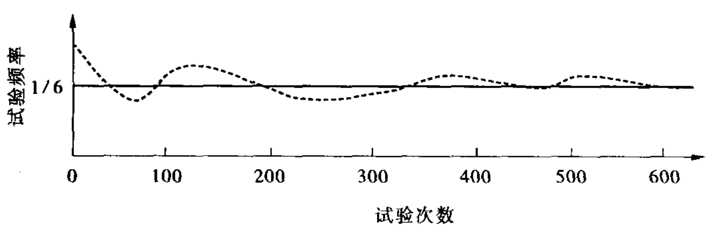

图 1.1

对试验二,图像告诉了我们一个与试验一类似的结论:随着试验次数的增加,频率逐渐稳定于 1/6.这个 1/6 也反映了“出现 1

点”的可能性的大小，它是“出现 1 点”这个随机事件本身固有的一个量值，这个值的大小与谁做的试验、何时做的等因素无关，只要无限制地做下去，对匀质的骰子而言，频率的极限为 1/6.

综合以上分析，下面从统计的角度给出一个较为直观的概率定义.

定义 1.1 设在一定的试验条件下，事件 A 出现的频率为 $f(A)=\frac{m}{n}$，其中 n 为总的试验次数，m 为 A 出现的次数. 若随着试验次数的增大，事件 A 出现的频率 $f(A)$ 在区间 $[0,1]$ 上的某个确定的数字 p 附近摆动，则称 p 为事件 A 的概率，记为 $P(A)$.

随机事件频率的运算具有如下性质：

(1) $0\leqslant f(A)\leqslant 1$；

(2) $f(\Omega)=1, f(\varnothing)=0$；

(3) 若 A,B 互斥，则 $f(A\cup B)=f(A)+f(B)$.

证 依定义应有 $0\leqslant m\leqslant n$，故 $0\leqslant f(A)\leqslant 1$. 对必然事件 Ω 有 $m=n$，所以 $f(\Omega)=1$. 类似地，对不可能事件 $\varnothing$，$f(\varnothing)=0$.

设在 n 次试验中，事件 A 出现 r 次，事件 B 出现 s 次，由 A 与 B 互斥知 $A\cup B$ 出现 $r+s$ 次，所以 $f(A\cup B)=\frac{r+s}{n}$，从而

$$f(A\cup B)=\frac{r+s}{n}=\frac{r}{n}+\frac{s}{n}=f(A)+f(B).$$

1.2.2 概率的公理化定义

以上从统计的角度给出了概率的定义，它揭示了概率的实质. 为了理论上的严密与完备，下面抽象出概率的公理化定义来，并讨论概率的一些性质.

定义 1.2 设 Ω 为样本空间，$A\subset\Omega$ 为任一随机事件，$P(A)$ 为以所有随机事件组成的集合为定义域的函数，若 $P(A)$ 的运算满足

下面三条公理:

公理 1 对任一随机事件 A,有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

公理 2 $P(\Omega)=1,P(\varnothing)=0$;

公理 3 对于两两互斥事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$,有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots$$

则称 $P(A)$为事件 A 的概率.

由概率的公理化定义,可推出以下重要的概率运算性质:

性质 1.1 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为两两互斥事件,则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

证 在公理 3 中取 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\varnothing$,则有

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)&=P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup A_{n+1}\cup\cdots)\\&=P(A_1)+P(A_2)+\cdots P(A_n)\\&\quad+P(A_{n+1})+\cdots\\&=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).\end{aligned}$$

性质 1.2 对任一事件 A,有 $P(A)=1-P(\overline{A})$.

证 因为 $1=P(\Omega)=P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})$

故 $P(A)=1-P(\overline{A})$.

性质 1.3 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

证 因为 $A=(A-B)\cup(AB)$且$(A-B)(AB)=\varnothing$,由性质 1.1 知

$P(A)=P(A-B)+P(AB)$,即

$P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

推论 1.1 若 $B\subset A$,则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$.

推论 1.2 若 $B\subset A$,则 $P(B)\leqslant P(A)$.

性质 1.4 设 A,B 为任意两个事件,

则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

证 因为 $A\cup B=A\cup(B-AB)$，且 $A(B-AB)=\varnothing$，故

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(BAB)$$
$$=P(A)+P(B)-P(AB).$$

推论 1.3 对任意两个事件 A,B，有 $P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$.

【例 1.6】 设事件 A,B 的概率分别为$\frac{1}{3}$与$\frac{1}{2}$，在下面三种情况下求事件 $P(B\overline{A})$的值.

(1)$AB=\varnothing$； (2)$A\subset B$； (3)$P(AB)=\frac{1}{8}$.

解 (1)$P(B\overline{A})=P(B-A)=P(B-AB)=P(B)-P(AB)$
$=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$；

(2) $P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)=P(B)-P(A)$
$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$；

(3)$P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$.

【例 1.7】 设 A,B,C 为任意三个随机事件，证明

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$.

证
$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P[(A\cup B)\cup C)]=P(A\cup B)+P(C)-\\&\quad P[A\cup B)C]\\&=P(A\cup B)+P(C)-P(AC\cup BC)\\&=P(A)+P(B)-P(AB)+P(C)-\\&\quad[P(AC)+P(BC)-P(ACBC)]\\&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-\\&\quad P(AC)-P(BC)+P(ABC).\end{aligned}$$

1.3 古典概率与几何概率

1.3.1 古典概率

概率的公理化定义,只告诉了概率运算应满足的一些条件和性质,并没有涉及怎样计算一个具体的随机事件的概率.概率的统计定义说明概率是频率的"极限",可通过大量的试验求出概率的近似值,这显然在现实中是难以实现的.在某些情况下,利用人们长期积累起来的经验,根据问题的特殊性质,可以直接计算出事件的概率.例如,在抛硬币试验中,所有的结果只有正面与反面两个,对于质地均匀的硬币来讲,出现正面的概率与出现反面的概率应该是相同的,有理由判定两者的概率都是0.5.由于该类问题较早地为人们所研究,所以人们常称之为古典概型,相应的概率亦称之为古典概率.

古典概型:若一随机试验具有下面两个特征:

(1)所有的基本事件数为有限个;

(2)每个基本事件出现的可能性相同;

则称该随机试验为古典概型.

对古典概型,事件 A 的概率由下式计算:

$$P(A)=\frac{A\text{ 中包含的基本事件个数}(r)}{\text{基本事件总数}(n)}$$

【例 1.8】 袋中有9个球,编号分别为1,2,…,9,从中任取一球,问该球编号为偶数的概率为多少?

解 从中任意取一球意味着取球时没有任何偏向,每个球均有相同的可能性被取到,9个球中编号为偶数的共有4个,故 $n=9$, $r=4,P(A)=\frac{4}{9}$.