中央人民政府高等教育部推薦

高等學校教材試用本

數學分析習題集

Б. П. ДЕМИДОВИЧ 著
李榮涷 譯

商務印書館

中央人民政府高等教育部推薦
高等學校教材試用本

數學分析習題集

Б. П. 吉米多維奇著
李榮凍譯
張鴻基校訂

商務印書館

本書係根據蘇聯國營技術理論書籍出版社（ГОСТЕХИЗДАТ）出版的吉米多維奇（Б. П. Демидович）所著"數學分析習題集"（Сборник задач и упражнений по математическому анализу）初版譯出的。原書經蘇聯高等教育部審定為綜合性大學及師範學院數理系教學參考書。

數學分析習題集

李榮涷譯

商務印書館出版

上海河南中路二一一號

中國圖書發行公司發行

商務印書館上海廠印刷

（55783.）

1953年8月初版　版面字數399,000

印數1—3,500　定價￥28,000

上海市書刊出版業營業許可證出〇二五號

序　言

在俄文的數學書籍中，有許多自編的和翻譯的微積分習題集，這些習題集是爲大學及高等師範學校初級課程用的。但是，這些習題課本不能充分滿足現時大學及高等師範學校中數學教學的需要。這些參考書大多數是在我們這一世紀之初編寫的，當時把從形式上訓練微分法和積分法的技能這件事當作數學分析練習的基本任務。較晚近的習題集作者們照例保持這些觀點。自那時候起，在大學和高等師範學校中，數學教學的科學水平有顯著的提高。在微積分學的舊課本中所沒有的許多概念，例如，無理數的理論，“ε, δ 定義”，均勻連續性，一致收斂性，廣義重積分等等，現在於大學和高等師範學校數學分析教程中佔了應有的地位。在使用着提高了的數學教學大綱的高等工業學校裏，也必須應用到“ε, δ 論證法”。可是同時在習題集中，這些重要的概念，或是完全沒有提到，或是提得很不充分。這就會使一、二年級的學生由於沒有適當的練習，只是形式地來理解這些概念，而常常不明瞭他們的意義。

本習題集的目的是使數學分的習題儘量地符合於現行大學的數學分析教學大綱，而用許多練習來包括課程的一切重要部份。把特殊的注意力集中在學生難於消化的理論問題上，例如“ε, δ 定理”，均勻性的概念等等。本習題集同時包括有大量的定理，這些定理含有補充基本課程的性質。數學分析的幾何應用提得較少，因爲這些問題實質上屬於微分幾何。

這本習題集是由作者在榮獲列寧勳章的國立莫斯科羅蒙諾索夫大學數學力學系多年的數學分析教學的結果所編成。

當本習題集編纂時閱讀並採用了一些俄國的和外國的資料。

我感謝國立莫斯科大學副教授 Н. Д. 阿伊仁什特和 З. М. 克什克娜閱讀習題集的原稿，並作了許多極重要的批評，感謝國立莫斯科大學研究生 Н. П. 特里佛羅夫和 А. Н. 伊娃諾娃驗算習題答案，同時感謝國營技術理論書籍出版社主編 Л. А. 捷多夫作了改進本書質量的重大工作。

Б. П. 吉米多維奇。

目　錄

數學分析習題集

第一章　分析引論

§1. 實數

1°. 數學歸納法　爲了證明某定理對任意的自然數爲眞，只須證明下面兩點就夠了：（1）這定理對 $n=1$ 爲眞，（2）設這定理對任何的自然數 n 爲眞，則它對其次的一自然數 $n+1$ 也爲眞。

2°. 分割　假設分有理數爲 A 和 B 兩類使其滿足於下列條件：（1）兩類均非空集，（2）每一個有理數必屬於一類，且僅屬於一類，（3）屬於 A 類(下類)的任一數小於屬於 B 類(上類)的任何數，這樣的一個分類法稱爲分割。分割 A/B 定出：（a）有理數，若或是下類 A 有最大的數，或是上類 B 有最小的數；(б)無理數，若 A 類無最大數，而 B 類亦無最小數。有理數和無理數統稱爲實數❶。

3°. 絕對值　設 x 爲實數，則用下列條件所確定的非負數 $|x|$ 稱爲絕對值；

$$|x|=\begin{cases} x, & 若\ x\geqslant 0, \\ -x, & 若\ x<0。\end{cases}$$

對於任何的實數 x 和 y 有不等式

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|。$$

4°. 上界和下界　設 $X=\{x\}$ 爲實數的有限集合，若：

---

❶ 在以後若沒有相反的附帶說明，這個數字我們將理解爲實數。

(1)每一個 $x\subset X$[1] 滿足不等式

$$x\geqslant m;$$

(2)對於任何的 $\varepsilon>0$，存在有 $x'\subset X$，而且

$$x'<m+\varepsilon,$$

則數 $m=\inf\{x\}$ 稱為集合 X 的下界。

同樣地，若：

(1)每一個 $x\subset X$ 滿足不等式

$$x\leqslant M;$$

(2)對於任何的 $\varepsilon>0$，存在有 $x''\subset X$，而

$$x''>M-\varepsilon,$$

則數 $M=\sup\{x\}$ 稱為集合 X 的上界。

若集合 X 不囿於下，則通常說

$$\inf\{x\}=-\infty;$$

若集合 X 不囿於上，則認為

$$\sup\{x\}=+\infty。$$

5°. 絕對誤差和相對誤差　設 $a(a\neq 0)$是被測的量的正確數值，而 x 是這個量的近似值，則

$$\Delta=|x-a|$$

稱為絕對誤差，而

$$\delta=\frac{\Delta}{|a|}$$

稱為被測的量的相對誤差。

假若 x 的絕對誤差不超過它的第 n 位有意義數目字的單位的一半，則說 x 有 n 位準確的數字。

[1] 符號 $x\subset X$ 表示 x 屬於集合 X。

利用數學歸納法求證下列等式對任何自然數 n 皆成立：

1．$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$。

2．$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$。

3．$1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$。

4．$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$。

5．證明牛頓二項式公式

$$(1+x)^n=\sum_{m=0}^{n}C_n^m x^m,$$

式中 C_n^m 是由 n 個元素中每次取 m 個的組合數。

6．證明貝努里不等式：

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

式中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是符號相同且大於 -1 的數。

7．證明若 $x>-1$，則不等式

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx\,(n>1)$$

爲眞，且僅當 $x=0$ 時，取等號。

8．設 c 爲正整數，而不爲整數的平方，且 A/B 爲確定實數 $\sqrt{c}$ 的分割，其中 B 類包含所有 $b^2>c$ 的正有理數，而 A 類包含所有其餘的有理數。求證在 A 類中無最大數，而在 B 類中也無最小數。

9．確定數 $\sqrt[3]{2}$ 的分割 A/B 用下面的方法來作成：A 類包含所有的有理數 a，而 $a^3<2$；B 類包含所有其餘的有理數。證明在 A 類中無最大數，而在 B 類中亦無最小數。

10．作出適當的分割來證明等式

$$\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{18}。)$$

11．證明等式

$$\sqrt{2}\sqrt{3}=\sqrt{b}。$$

12．求證：一切非空且囿於下的數集都有下界，而所有非空的囿於上的數集有上界。

13．證明一切有理眞分式

$$\frac{m}{n}$$

（式中 m 和 n 爲自然數，且 $0<m<n$）的集合無最小和最大的元素，求這個集合的上界和下界。

14．有理數 r 滿足不等式

$$r^2<2。$$

求有理數 r 的集合的下界和上界。

15．設一切的數 $x\subset\{x\}$ 滿足不等式

$$m\leqslant x\leqslant M。$$

求證

$$m\leqslant \inf\{x\}\leqslant \sup\{x\}\leqslant M。$$

16．設 $\{-x\}$ 爲數的集合，這些數是與 $x\subset\{x\}$ 符號相反的數，證明

(a) $\inf\{-x\}=\sup\{x\}$；　　(б) $\sup\{-x\}=-\inf\{x\}$。

17．設 $\{x+y\}$ 爲所有 $x+y$ 這些和的集合，其中 $x\subset\{x\}$ 及 $y\subset\{y\}$，證明等式：

(a) $\inf\{x+y\}=\inf\{x\}+\inf\{y\}$；

(б) $\sup\{x+y\}=\sup\{x\}+\sup\{y\}$。

18．設 $\{xy\}$ 爲一切 xy 乘積的集合，其中 $x\subset\{x\}$ 及 $y\subset\{y\}$，且 $x\geqslant 0$ 及 $y\geqslant 0$。證明等式：

(a) $\inf\{xy\}=\inf\{x\}\inf\{y\}$；　(б) $\sup\{xy\}=\sup\{x\}\sup\{y\}$。

19．求證不等式：

(a) $|x-y|\geqslant\big||x|-|y|\big|$；

(б) $|x+x_1+\cdots+x_n|\geqslant|x|-(|x_1|+\cdots+|x_n|)$。

解不等式:

20. $|x+1|<0.01$。　　21. $|x|>|x+1|$。

22. $|2x-1|<|x-1|$。　　23. $\big||x+1|-|x-1|\big|<1$。

24. $|x(1-x)|<0.05$。

25. 證明恆等式

$$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2=x^2。$$

26. 當測量長度 10 厘米時,絕對誤差爲 0.5 毫米;當測量距離 500 仟米時,絕對誤差等於 200 米。那種測量較爲精確?

27. 設數

$$x=2.3752$$

的相對誤差爲 1%，試求此數包含若干位準確數字?

28. 數

$$x=12.125$$

包含 3 位準確數字。試求此數的相對誤差?

29. 矩形的邊等於:

$$x=2.50\text{ 厘米 }\pm0.01\text{ 厘米},$$

$$y=4.00\text{ 厘米 }\pm0.02\text{ 厘米}。$$

這個矩形的面積 S 在甚麽範圍內? 設其邊長取平均值時，矩形面積的絕對誤差 Δ 和相對誤差 δ 爲何? 要怎樣選擇矩形的面積，方可使絕對誤差的估計最佳?

30. 物體的重量 $p=12.59$ 克 ±0.01克，其體積 $v=3.2$ 厘米^3 ±0.2 厘米^3。若對物體的重量和體積都取其平均值，試求物體的比重，並估計比重的絕對誤差和相對誤差。

31. 圓半徑

$$r=7.2\text{ 米 }\pm0.1\text{ 米}。$$

若取 $\pi=3.14$，則求出的圓面積的最小相對誤差爲何？

32．對正平行六面體測得

$$x=24.7\text{米}\pm0.2\text{米};$$

$$y=6.5\text{米}\pm0.1\text{米};$$

$$z=1.2\text{米}\pm0.1\text{米}。$$

這個平行六面體的體積 v 在甚麽範圍內？若測量的各結果都取其平均值，則所求出平行六面體的體積可能有的絕對誤差和相對誤差爲何？

33．測量正方形的邊 x，此處 2 米 $<x<3$ 米，應有怎樣的絕對誤差，才能使此正方形面積有可能精確到 0.001 米^2？

34．設 $\delta(x)$ 及 $\delta(y)$ 爲數 a 和 b 的近似值 x 和 y 的相對誤差 $(a>0,\ b>0)$，$\delta(xy)$ 爲數 xy 的相對誤差。求證

$$\delta(xy)\leqslant\delta(x)+\delta(y)+\delta(x)\delta(y)。$$

§2．敍列原理

1°．敍列的極限的概念　假設對於任何的 $\varepsilon>0$，存在有數 $N=N(\varepsilon)$，使

$$\text{當 } n>N \text{ 時，} |x_n-a|<\varepsilon,$$

則謂敍列 $x_1, x_2\cdots, x_n, \cdots$ 有極限 a（或敍列 $x_1, x_2\cdots, x_n$ 是**收斂的**）：

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a。$$

特別情形，若

$$\lim_{n\to\infty} x_n=0,$$

則稱 x_n 爲**無窮小**。

沒有極限的敍列，稱爲是**發散的**。

2°．極限存在的判別準則

（1）設

$$y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$$

及

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = c,$$

則

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c。$$

（2）單調並有界的敍列有極限。

（3）哥西的判别法　對於任何的 $\varepsilon>0$，存在有數 $N=N(\varepsilon)$ 使

只要是 $m>N$ 和 $n>N$，則 $|x_m-x_n|<\varepsilon$，

爲敍列 $\{x_n\}$ 的極限存在的必要而且充足的條件。

3°. 關於敍列的極限的基本定理　設

$$a=\lim_{n\to\infty} x_n \text{ 和 } b=\lim_{n\to\infty} y_n$$

存在，則有：

（1）如

$$x_n \leqslant y_n$$

則

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim_{n\to\infty} y_n,$$

（2）$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n,$$

（3）$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n,$$

（4）$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}\left(\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0\right)。$$

4°. 數 e　敍列

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n (n=1,2,\cdots)$$

有確定的極限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e=2.718281824\cdots$$

5°. 無窮極限 符號

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\infty$$

表示對於任何的 $E>0$，存在有數 $N=N(E)$，使

當 $n>N$ 時，$|x_n|>E$。

6°. 極限點 設已知敍列 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 假若其子敍列

$$x_{p_1},\ x_{p_2},\cdots,x_{p_n},\cdots$$

存在，且有

$$\lim_{n\to\infty} x_{p_n}=\xi,$$

則稱數 ξ（或符號 ∞）為已知敍列 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 的極限點。

一切有界的敍列至少有一個有窮的極限點（波列查——外爾什特納斯原理）。若這個極限點是唯一的，則它也爲已知敍列的有窮極限。

敍列 x_n 的最小極限點（有窮的或無窮的）

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n$$

稱為下極限，而它的最大極限點

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n$$

稱爲此敍列的上極限。

等式

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n=\varlimsup_{n\to\infty} x_n$$

爲敍列 x_n 的有窮或無窮極限存在的必要而且充分的條件。

35. 設

$$x_n=\frac{n}{n+1}\ (n=1,2,\cdots)$$

證明

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1,$$

卽對於任一個 $\varepsilon>0$, 有數 $N=N(\varepsilon)$使

$$若\ n>N,\ 則\ |x_n-1|<\varepsilon。$$

填充下表:

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	……
N					

36. 已知對於任何的 $\varepsilon>0$, 有數 $N=N(\varepsilon)$,使

$$當\ n>N\ 時,\ |x_n|<\varepsilon。$$

設:

(a) $x_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$;　　(б) $x_n=\dfrac{2n}{n^3+1}$;

(в) $x_n=\dfrac{1}{n!}$;　　(г) $x_n=(-1)^n\cdot 0.999^n$,

求證 $x_n(n=1,2,\cdots)$爲無窮小(卽是說,有極限値爲 0)。

針對上面四種情形,填充下表:

ε	0.1	0.01	0.001	……
N				

37. 證明敍列

(a) $x_n=(-1)^n n$,　(б) $x_n=2^{\sqrt{n}}$,　(в) $x_n=\lg(\lg n)$　$(n\geqslant 2)$

當 $n\to\infty$ 時,爲無限(卽是成爲無窮大量),卽對任意的 $E>0$,有數 $N=N(E)$使

$$當\ n>N\ 時,\ |x_n|>E。$$

針對上面的每一種情形填充下表:

E	10	100	1000	10000	……
N					