

中央人民政府高等教育部推薦

高等學校教材試用本

# 數學分析習題集

В. П. ДЕМИДОВИЧ 著

李 榮 凍 譯



商 務 印 書 館

中央人民政府高等教育部推薦  
高等學校教材試用本



# 數 學 分 析 習 題 集

B. II. 吉米多維奇著  
李 榮 煉 譯  
張 鴻 基 校 訂

商 務 印 書 館

本書係根據蘇聯國營技術理論書籍出版社 (ГОСТЕХИЗДАТ) 出版的吉米多維奇 (Б. П. Демидович) 所著“數學分析習題集” (Сборник задач и упражнений по математическому анализу) 初版譯出的。原書經蘇聯高等教育部審定為綜合性大學及師範學院數理系教學參考書。

## 數 學 分 析 習 題 集

李 榮 涼 譯

---

★ 版權所有 ★  
商 務 印 書 館 出 版  
上海河南中路二一一號

中 國 圖 書 發 行 公 司 發 行  
商 務 印 書 館 上 海 廠 印 刷  
(55783.)

---

1953年8月初版 版面字數399,000  
印數1—3,500 定價¥28,000

上海市書刊出版業營業許可證出〇二五號

## 序 言

在俄文的數學書籍中，有許多自編的和翻譯的微積分習題集，這些習題集是為大學及高等師範學校初級課程用的。但是，這些習題課本不能充分滿足現時大學及高等師範學校中數學教學的需要。這些參考書大多數是在我們這一世紀之初編寫的，當時把從形式上訓練微分法和積分法的技能這件事當作數學分析練習的基本任務。較晚近的習題集作者們照例保持這些觀點。自那時候起，在大學和高等師範學校中，數學教學的科學水平有顯著的提高。在微積分學的舊課本中所沒有的許多概念，例如，無理數的理論，“ $\epsilon, \delta$  定義”，均勻連續性，一致收斂性，廣義重積分等等，現在於大學和高等師範學校數學分析教程中佔了應有的地位。在使用着提高了的數學教學大綱的高等工業學校裏，也必須應用到“ $\epsilon, \delta$  論證法”。可是同時在習題集中，這些重要的概念，或是完全沒有提到，或是提得很不充分。這就會使一、二年級的學生由於沒有適當的練習，只是形式地來理解這些概念，而常常不明瞭他們的意義。

本習題集的目的是使數學分的習題盡量地符合於現行大學的數學分析教學大綱，而用許多練習來包括課程的一切重要部份。把特殊的注意力集中在學生難於消化的理論問題上，例如“ $\epsilon, \delta$  定理”，均勻性的概念等等。本習題集同時包括有大量的定理，這些定理含有補充基本課程的性質。數學分析的幾何應用提得較少，因為這些問題實質上屬於微分幾何。

這本習題集是由作者在榮獲列寧勳章的國立莫斯科羅蒙諾索夫大學數學力學系多年的數學分析教學的結果所編成。

當本習題集編纂時閱讀並採用了一些俄國的和外國的資料。

我感謝國立莫斯科大學副教授 Н. Д. 阿伊仁什特和 З. М. 克什克娜閱讀習題集的原稿,並作了許多極重要的批評,感謝國立莫斯科大學研究生 Н. И. 特里佛羅夫和 А. Н. 伊娃諾娃驗算習題答案,同時感謝國營技術理論書籍出版社主編 И. А. 捷多夫作了改進本書質量的重大工作。

Б. И. 吉米多維奇。

# 目 錄

## 序言

第一章 分析引論	1
§1. 實數	1
§2. 數列原理	6
§3. 函數的概念	20
§4. 函數的圖形表示法	28
§5. 函數的極限	38
§6. 函數無窮小和無窮大的階	53
§7. 函數的連續性	58
§8. 反函數、以參數表出的函數	69
§9. 函數的均勻連續性	73
§10. 函數方程式	75
第二章 微分學	79
§1. 顯函數的導函數	79
§2. 反函數的導函數、以參變數表出的函數的導函數	89
§3. 導函數的幾何意義	91
§4. 函數的微分	94
§5. 高階的導函數和微分	97
§6. 飛耳馬及達爾佈定理	106
§7. 洛兒、拉格郎奇及哥西定理	107
§8. 函數的增大與減小、不等式	113
§9. 凹的方向、拐點	117
§10. 不定式的求值法	120
§11. 合勞公式	123
§12. 函數的極值、函數的極大值和極小值	127
§13. 依據函數的特徵點求函數圖形的作圖法	132
§14. 函數的極大值和極小值的問題	134
§15. 曲線的相切、曲率圓、漸屈線	137

§16. 方程式的近似解 .....	137
<b>第三章 不定積分</b> .....	<b>141</b>
§1. 最簡單的不定積分 .....	141
§2. 有理函數的積分法 .....	151
§3. 無理函數的積分法 .....	153
§4. 三角函數的積分法 .....	157
§5. 各種超越函數的積分法 .....	163
<b>第四章 定積分</b> .....	<b>167</b>
§1. 利用不定積分以計算定積分的方法 .....	167
§2. 定積分為和的極限 .....	173
§3. 中值定理 .....	178
§4. 瑕積分 .....	180
§5. 面積的計算法 .....	186
§6. 體積的計算法 .....	189
§7. 弧長的計算法 .....	192
§8. 旋轉面表面積的計算法 .....	194
§9. 距的計算法、重心的坐標 .....	195
§10. 物理和力學中的問題 .....	197
§11. 定積分的近似計算法 .....	199
<b>第五章 級數</b> .....	<b>201</b>
§1. 數列、各項符號固定的級數、其收斂性的判別法則 .....	201
§2. 各項符號固定的級數、其收斂性的判別法則 .....	209
§3. 級數之運算 .....	215
§4. 冪級數 .....	216
§5. 函數級數 .....	226
§6. 福里級數 .....	238
§7. 級數求和法 .....	244
§8. 無窮乘積 .....	247
§9. 斯基耳林格公式 .....	255
§10. 用多項式表示連續函數的近似式 .....	256
<b>第六章 多變量的函數</b> .....	<b>259</b>

§1. 函數的極限、連續性	259
§2. 偏導函數、函數的微分	264
§3. 隱函數的微分法	279
§4. 變數代換	289
§5. 幾何上的應用	300
§6. 台勞公式	306
§7. 多變數函數的極值	309
<b>第七章 有賴於參數的積分</b>	<b>318</b>
§1. 有賴於參數的常義積分	318
§2. 有賴於參數的瑕積分、積分的一致收斂性	323
§3. 積分符號下瑕積分的微分法和積分法	328
§4. 尤拉積分	334
§5. 福里積分	337
<b>第八章 重積分和線積分</b>	<b>341</b>
§1. 二重積分	341
§2. 面積的計算法	348
§3. 體積的計算法	350
§4. 曲面面積計算法	351
§5. 二重積分在力學上的應用	353
§6. 三重積分	356
§7. 利用三重積分計算體積法	369
§8. 三重積分在力學上的應用	362
§9. 二重瑕積分和三重瑕積分	367
§10. 多重積分	372
§11. 線積分	376
§12. 格林公式	383
§13. 線積分的物理應用	388
§14. 面積分	391
§15. 斯托克斯公式	396
§16. 奧斯特洛格拉德斯基公式	398
§17. 場論的原理	403
<b>答案</b>	<b>411</b>



# 數學分析習題集

## 第一章 分析引論

### § 1. 實數

1°. 數學歸納法 爲了證明某定理對任意的自然數爲真, 只須證明下面兩點就夠了: (1) 這定理對  $n=1$  爲真, (2) 設這定理對任何的自  
然數  $n$  爲真, 則它對其次的一自然數  $n+1$  也爲真。

2°. 分割 假設分有理數爲  $A$  和  $B$  兩類使其滿足於下列條件: (1) 兩類均非空集, (2) 每一個有理數必屬於一類, 且僅屬於一類, (3) 屬於  $A$  類(下類)的任一數小於屬於  $B$  類(上類)的任何數, 這樣的一個分類法稱爲分割。分割  $A/B$  定出: (a) 有理數, 若或是下類  $A$  有最大的數, 或是上類  $B$  有最小的數; (b) 無理數, 若  $A$  類無最大數, 而  $B$  類亦無最小數。有理數和無理數統稱爲實數<sup>①</sup>。

3°. 絕對值 設  $x$  爲實數, 則用下列條件所確定的非負數  $|x|$  稱爲絕對值;

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{若 } x \geq 0, \\ -x, & \text{若 } x < 0. \end{cases}$$

對於任何的實數  $x$  和  $y$  有不等式

$$|x+y| \leq |x| + |y|。$$

4°. 上界和下界 設  $X = \{x\}$  爲實數的有限集合, 若:

---

① 在以後若沒有相反的附帶說明, 這個數字我們將理解爲實數。

(1) 每一個  $x \in X$  ① 滿足不等式

$$x > m;$$

(2) 對於任何的  $\varepsilon > 0$ , 存在有  $x' \in X$ , 而且

$$x' < m + \varepsilon,$$

則數  $m = \inf\{x\}$  稱爲集合  $X$  的下界。

同樣地, 若:

(1) 每一個  $x \in X$  滿足不等式

$$x < M;$$

(2) 對於任何的  $\varepsilon > 0$ , 存在有  $x'' \in X$ , 而

$$x'' > M - \varepsilon,$$

則數  $M = \sup\{x\}$  稱爲集合  $X$  的上界。

若集合  $X$  不圍於下, 則通常說

$$\inf\{x\} = -\infty;$$

若集合  $X$  不圍於上, 則認爲

$$\sup\{x\} = +\infty.$$

5°. 絕對誤差和相對誤差 設  $a (a \neq 0)$  是被測的量的正確數值, 而  $x$  是這個量的近似值, 則

$$\Delta = |x - a|$$

稱爲絕對誤差, 而

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|}$$

稱爲被測的量的相對誤差。

假若  $x$  的絕對誤差不超過它的第  $n$  位有意義數目字的單位的一半, 則說  $x$  有  $n$  位準確的數字。

① 符號  $x \in X$  表示  $x$  屬於集合  $X$ 。

利用數學歸納法求證下列等式對任何自然數  $n$  皆成立：

$$1. 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$2. 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$3. 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1+2+\cdots+n)^2.$$

$$4. 1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1.$$

5. 證明牛頓二項式公式

$$(1+x)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m x^m,$$

式中  $C_n^m$  是由  $n$  個元素中每次取  $m$  個的組合數。

6. 證明貝奴里不等式：

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

式中  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是符號相同且大於  $-1$  的數。

7. 證明若  $x > -1$ , 則不等式

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad (n > 1)$$

為真, 且僅當  $x=0$  時, 取等號。

8. 設  $c$  為正整數, 而不為整數的平方, 且  $A/B$  為確定實數  $\sqrt{c}$  的分割, 其中  $B$  類包含所有  $b^2 > c$  的正有理數, 而  $A$  類包含所有其餘的有理數。求證在  $A$  類中無最大數, 而在  $B$  類中也無最小數。

9. 確定數  $\sqrt[3]{2}$  的分割  $A/B$  用下面的方法來作成:  $A$  類包含所有的有理數  $a$ , 而  $a^3 < 2$ ;  $B$  類包含所有其餘的有理數。證明在  $A$  類中無最大數, 而在  $B$  類中亦無最小數。

10. 作出適當的分割來證明等式

$$\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{18}.$$

11. 證明等式

$$\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}.$$

12. 求證：一切非空且圍於下的數集都有下界，而所有非空的圍於上的數集有上界。

13. 證明一切有理真分式

$$\frac{m}{n}$$

(式中  $m$  和  $n$  爲自然數，且  $0 < m < n$ ) 的集合無最小和最大的元素，求這個集合的上界和下界。

14. 有理數  $r$  滿足不等式

$$r^2 < 2.$$

求有理數  $r$  的集合的下界和上界。

15. 設一切的數  $x \in \{x\}$  滿足不等式

$$m \leq x \leq M.$$

求證

$$m \leq \inf\{x\} \leq \sup\{x\} \leq M.$$

16. 設  $\{-x\}$  爲數的集合，這些數是與  $x \in \{x\}$  符號相反的數，證明

$$(a) \inf\{-x\} = \sup\{x\}; \quad (b) \sup\{-x\} = -\inf\{x\}.$$

17. 設  $\{x+y\}$  爲所有  $x+y$  這些和的集合，其中  $x \in \{x\}$  及  $y \in \{y\}$ ，

證明等式：

$$(a) \inf\{x+y\} = \inf\{x\} + \inf\{y\};$$

$$(b) \sup\{x+y\} = \sup\{x\} + \sup\{y\}.$$

18. 設  $\{xy\}$  爲一切  $xy$  乘積的集合，其中  $x \in \{x\}$  及  $y \in \{y\}$ ，且  $x \geq 0$  及  $y \geq 0$ 。證明等式：

$$(a) \inf\{xy\} = \inf\{x\}\inf\{y\}; \quad (b) \sup\{xy\} = \sup\{x\}\sup\{y\}.$$

19. 求證不等式：

$$(a) |x-y| \geq ||x| - |y||;$$

$$(b) |x+x_1+\cdots+x_n| \geq |x| - (|x_1|+\cdots+|x_n|).$$

解不等式：

20.  $|x+1| < 0.01$ 。

21.  $|x| > |x+1|$ 。

22.  $|2x-1| < |x-1|$ 。

23.  $||x+1| - |x-1|| < 1$ 。

24.  $|x(1-x)| < 0.05$ 。

25. 證明恆等式

$$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2 = x^2。$$

26. 當測量長度 10 厘米時，絕對誤差為 0.5 毫米；當測量距離 500 仟米時，絕對誤差等於 200 米。那種測量較為精確？

27. 設數

$$x = 2.3752$$

的相對誤差為 1%，試求此數包含若干位準確數字？

28. 數

$$x = 12.125$$

包含 3 位準確數字。試求此數的相對誤差？

29. 矩形的邊等於：

$$x = 2.50 \text{ 厘米} \pm 0.01 \text{ 厘米},$$

$$y = 4.00 \text{ 厘米} \pm 0.02 \text{ 厘米}。$$

這個矩形的面積  $S$  在甚麼範圍內？設其邊長取平均值時，矩形面積的絕對誤差  $\Delta$  和相對誤差  $\delta$  為何？要怎樣選擇矩形的面積，方可使絕對誤差的估計最佳？

30. 物體的重量  $p = 12.59 \text{ 克} \pm 0.01 \text{ 克}$ ，其體積  $v = 3.2 \text{ 厘米}^3 \pm 0.2 \text{ 厘米}^3$ 。若對物體的重量和體積都取其平均值，試求物體的比重，並估計比重的絕對誤差和相對誤差。

31. 圓半徑

$$r = 7.2 \text{ 米} \pm 0.1 \text{ 米}。$$

若取  $\pi = 3.14$ , 則求出的圓面積的最小相對誤差爲何?

32. 對正平行六面體測得

$$x = 24.7 \text{ 米} \pm 0.2 \text{ 米};$$

$$y = 6.5 \text{ 米} \pm 0.1 \text{ 米};$$

$$z = 1.2 \text{ 米} \pm 0.1 \text{ 米}.$$

這個平行六面體的體積  $v$  在甚麼範圍內? 若測量的各結果都取其平均值, 則所求出平行六面體的體積可能有的絕對誤差和相對誤差爲何?

33. 測量正方形的邊  $x$ , 此處  $2 \text{ 米} < x < 3 \text{ 米}$ , 應有怎樣的絕對誤差, 才能使此正方形面積有可能精確到  $0.001 \text{ 米}^2$ ?

34. 設  $\delta(x)$  及  $\delta(y)$  爲數  $a$  和  $b$  的近似值  $x$  和  $y$  的相對誤差 ( $a > 0, b > 0$ ),  $\delta(xy)$  爲數  $xy$  的相對誤差。求證

$$\delta(xy) \leq \delta(x) + \delta(y) + \delta(x)\delta(y).$$

## § 2. 級列原理

1°. 級列的極限的概念 假設對於任何的  $\varepsilon > 0$ , 存在有數  $N = N(\varepsilon)$ , 使

$$\text{當 } n > N \text{ 時, } |x_n - a| < \varepsilon,$$

則謂級列  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  有極限  $a$  (或級列  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是收斂的):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

特別情形, 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0,$$

則稱  $x_n$  爲無窮小。

沒有極限的級列, 稱爲是發散的。

2°. 極限存在的判別準則

(1) 設

$$y_n \leq x_n \leq z_n$$

及

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = c,$$

則

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c.$$

(2) 單調並有界的數列有極限。

(3) 哥西的判別法 對於任何的  $\varepsilon > 0$ , 存在有數  $N = N(\varepsilon)$  使

$$\text{只要是 } m > N \text{ 和 } n > N, \text{ 則 } |x_m - x_n| < \varepsilon,$$

為數列  $\{x_n\}$  的極限存在的必要而且充足的條件。

3° 關於數列的極限的基本定理 設

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ 和 } b = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

存在, 則有:

(1) 如

$$x_n \leq y_n$$

則

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} \quad (\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0).$$

4° 數  $e$  數列

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n=1, 2, \dots)$$

有確定的極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.718281824 \dots$$

5° 無窮極限 符號

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$$

表示對於任何的  $E > 0$ , 存在有數  $N = N(E)$ , 使

$$\text{當 } n > N \text{ 時, } |x_n| > E.$$

6° 極限點 設已知數列  $x_n (n=1, 2, \dots)$  假若其子數列

$$x_{p_1}, x_{p_2}, \dots, x_{p_n}, \dots$$

存在, 且有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p_n} = \xi,$$

則稱數  $\xi$  (或符號  $\infty$ ) 爲已知數列  $x_n (n=1, 2, \dots)$  的極限點。

一切有界的數列至少有一個有窮的極限點 (波列查——外爾什特納斯原理)。若這個極限點是唯一的, 則它也爲已知數列的有窮極限。

數列  $x_n$  的最小極限點 (有窮的或無窮的)

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$$

稱爲下極限, 而它的最大極限點

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$$

稱爲此數列的上極限。

等式

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$$

爲數列  $x_n$  的有窮或無窮極限存在的必要而且充分的條件。

35. 設

$$x_n = \frac{n}{n+1} \quad (n=1, 2, \dots)$$

證明



$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1,$$

即對於任一個  $\varepsilon > 0$ , 有數  $N = N(\varepsilon)$  使

$$\text{若 } n > N, \text{ 則 } |x_n - 1| < \varepsilon.$$

填充下表:

$\varepsilon$	0.1	0.01	0.001	0.0001	.....
$N$					

36. 已知對於任何的  $\varepsilon > 0$ , 有數  $N = N(\varepsilon)$ , 使

$$\text{當 } n > N \text{ 時, } |x_n| < \varepsilon.$$

設:

$$(a) x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}; \quad (\delta) x_n = \frac{2n}{n^3+1};$$

$$(B) x_n = \frac{1}{n!}; \quad (\Gamma) x_n = (-1)^n \cdot 0.999^n,$$

求證  $x_n (n=1, 2, \dots)$  爲無窮小(即是說, 有極限值爲 0)。

針對上面四種情形, 填充下表:

$\varepsilon$	0.1	0.01	0.001	.....
$N$				

37. 證明敍列

$$(a) x_n = (-1)^n n, \quad (\delta) x_n = 2^{\sqrt{n}}, \quad (B) x_n = \lg(\lg n) \quad (n \geq 2)$$

當  $n \rightarrow \infty$  時, 爲無限(即是成爲無窮大量), 即對任意的  $E > 0$ , 有數  $N = N(E)$  使

$$\text{當 } n > N \text{ 時, } |x_n| > E.$$

針對上面的每一種情形填充下表:

$E$	10	100	1000	10000	.....
$N$					