汇集/名校/精英

打造/教辅/精品

2007

高考探究与测试

GAOKAO TANJIU YU CESHI

数学

学生用书

丛书主编◎阮祥久

（本地版）

华文出版社

高考

探究与测试

数学

学生用书

主　　编：何先俊　曾　兵

副 主 编：张仲文　王　黎　鲜松林　邓伟民　彭文甫　沈官德

参编作者：何先俊　王　黎　张仲文　郭　虹　鲁英杰　刘联文　虞尚军　罗　雨
(按所编章节为序)　汪智怀　曾　兵　杜　炜　彭文甫　文正周　冉西宁　易　俊　邓伟民
奉文清　许盛文　陈旭奉　鲜松郭　刘兴发　杨　华　宋　刚　李云建
郑声从　张向华　周慧娟　彭洪辉　沈官德

评　　审：何先俊

华文出版社

图书在版编目（CIP）数据

高考探究与测试.高三第一轮复习.数学/阮祥久编著.
北京：华文出版社，2006.7
（探究与测试系列丛书）
ISBN 7-5075-2050-1

Ⅰ.高… Ⅱ.阮… Ⅲ.数学课－高中－升学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第073478号

装帧设计：文　汇
责任编辑：方明亮　赵连荣
责任校对：吴素莲
策　　划：文　汇

华文出版社出版发行
（邮编：100055　北京市宣武区广安门外大街305号8区5号楼）
网址：http://www.hwcbs.com.cn
网络实名：华文出版社
电子信箱：hwcbs@263.net
电话：010-63370154　63370169
成都报华印务有限责任公司印刷
880×1230　16开本　印张：200　字数：6200千字
2006年7月第1版　2006年7月第1次印刷
全套定价：398.00元

邮 购 信 息

《高考探究与测试》丛书以能力为编写主题和线索，重点在明思路，点方法，传技巧，为此，除知识讲解外，特设计了以下板块：

【考点探究】提供实用的备考“基础知识”，建构清晰的知识体系；“重点提示”点击高考重点，突出有效的应考策略。

【典例精析】“经典例题”让知识转化为能力，规范审题答题思维，准确解读考查知识；“创新例题”“年年岁岁花相同，今年花胜去年红”，寻找规律，力求创新，对接高考，给考生提供一块考前的实验田，举一反三。

【精彩演路】“链接高考”原题，既是复习的范本，也是破解高考重点难点的钥匙，贴近高考实际；“冲刺高考”训练，检测复习效果，让考生积累大量的感性材料，摸索规律，寻找最佳途径，获取高考高分。

出版说明

为帮助考生有针对性地作好第一轮总复习，迎接2007年高考，我们组织众多高考命题研究专家、高考阅卷指导委员、指导高考复习的名校一线教师，对2006年高考进行了深入、细致、全面的研讨和预测，编写了这套《高考探究与测试》丛书。

本书在编写过程中，为凸显本套丛书“针对性、适用性、创新性、实战性”的特点，依据最新的考纲精神，为广大师生建构了高考考查体系，梳理了考点基础知识，解读了考题检测方向，明确了高考重点难点，突出了知识与能力的全面提高，具有极强的前瞻性和权威性。

本书以能力为编写主题和线索，重点在明思路，点方法，传技巧，为此，除知识讲解外，特别设计了以下板块：

【考点探究】 提供实用的备考“基础知识”，建构清晰的知识体系；“重点提示”点击高考重点，突出有效的应考策略。

【典例精析】 “经典例题”让知识转化为能力，规范审题答题思维，准确解读考查知识；“创新例题” “年年岁岁花相同，今年花胜去年红”，寻找规律，力求创新，对接高考，给考生提供一块考前的实验田，举一反三。

【精彩演练】 “链接高考”原题，既是复习的范本，也是破解高考重点难点的钥匙，贴近高考实际；“冲刺高考”训练，检测复习效果，让考生积累大量的感性材料，摸索规律，寻找最佳途径，获取高考高分。

《高考探究与测试》依托名校名师，借力业内行家，打造高考助学读物精品，服务寒窗苦读的莘莘学子。

《高考探究与测试》助你高考成功！

《高考探究与测试》编写组

2006年7月

目录

第一章

集合与简易逻辑

§1.1 简单不等式的解法

考点解读

1. 能熟练掌握一元一次不等式的解法. 任意一个一元一次不等式经过同解变形均可化成 $ax>b(ax\geqslant b)(a\neq 0)$ 的形式. 特别注意,不等式 $ax>b$ 在未注明 $a\neq 0$ 的情况时,要对 $a=0$ 的情况进行研究. 而当 $a=0$ 时求不等式 $ax>b$ 的解集,就要讨论 b 的正负. 当 $b<0$ 时解集是 $\mathbf{R}$,当 $b\geqslant 0$ 时解集是 $\varnothing$.

2. 能熟练掌握一元二次不等式的解法. 任意一个一元二次不等式经过同解变形都能化成 $ax^2+bx+c>0(a>0)$ 或 $ax^2+bx+c<0(a>0)$ 的形式,并能将一元二次不等式的解集和相应的抛物线与 x 轴的相关位置进行比较,理解它们之间的内在联系. 在这部分知识的题目设置中特别注意下面两点:

(1) $ax^2+bx+c>0(a\neq 0)$ 的解集是 $\mathbf{R}\Leftrightarrow ax^2+bx+c>0$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立 $\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta<0\end{cases}$;

(2) 关于函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的有关问题,需讨论 $a=0$ 与 $a\neq 0$ 两种情况.

3. 掌握含绝对值的不等式 $|x|<a(a>0)$ 及 $|x|>a(a>0)$ 的解集,领会在导出这个解集的过程中所体现的化归思想及由特殊到一般的思想方法. 解绝对值不等式的主要手段就是去掉绝对值符号,通常有以下三种方法:

(1) 公式法:当 $a>0$ 时有:$|x|>a\Leftrightarrow x^2>a^2\Leftrightarrow x>a$ 或 $x<-a$;$|x|<a\Leftrightarrow x^2<a^2\Leftrightarrow -a<x<a$.

一般地,$|f(x)|>g(x)\Leftrightarrow f(x)>g(x)$ 或 $f(x)<-g(x)$,$|f(x)|<g(x)\Leftrightarrow -g(x)<f(x)<g(x)$.

(2) 零点分段讨论法:由绝对值的定义 $|a|=\begin{cases}a(a\geqslant 0)\\ -a(a<0)\end{cases}$ 进行讨论,从而去掉绝对值符号.

(3) 平方法:不等式两边同时平方去掉绝对值符号(要注意能够平方的前提).

4. 掌握常规分式、高次不等式的解法(数轴标根法).

其步骤是:

(1) 化成 $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow f(x)g(x)>0$(其方法是移项、通分、因式分解等)的形式.

(2) 首项系数大于零——标准式(若系数含参数时,须判断或讨论系数的正负,化负为正后再求解).

(3) 判断或比较各因式根的大小.

(4) 标根连线.

典例精析

例1 求 k 的值,使得关于 x 的不等式 $kx^2+(5+2k)x+10\leqslant 0$ 的解集分别是

(Ⅰ) $[-2,-1]$; (Ⅱ) $(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)$;

(Ⅲ) $\{-2\}$; (Ⅳ) $(-\infty,-2]$.

例2 解不等式 $1<|2x+1|\leqslant 3$.

例3　已知函数$f(x)=\dfrac{x^2}{ax+b}$（a,b为常数），且$\boldsymbol{u}=(a,1)$，$\boldsymbol{v}=(-2,b)$，$\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{v}$均为直线$x+y+1=0$的方向向量.

（Ⅰ）求函数$f(x)$的解析式；

（Ⅱ）设$k>1$，解关于x的不等式$f(x)<\dfrac{(k+1)x-k}{2-x}$.

例4　在圆$x^2+y^2=5x$内，过点$A\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{3}{2}\right)$有$n$条弦的长度成等差数列，最短弦长为数列的首项$a_1$，最长弦长为$a_n$，若$n$的取值集合为$\{4,5,6,7\}$时对应公差$d$的取值范围为$[k_1,k_2]$.

（Ⅰ）试确定k_1、k_2的值；

（Ⅱ）当$\dfrac{x}{6}\in(k_1,k_2]$时，不等式$\dfrac{\lg 2ax}{\lg(a+x)}<1$恒成立，求实数$a$的取值范围.

分析　本题是解析几何、数列、不等式的综合试题. 由题中反映出的信息可知必须通过求弦的最短和最长值，利用通项公式确定k_1、k_2的值.

解答　（Ⅰ）圆的一般方程化为标准方程为$\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{5}{2}\right)^2$，其圆心$B\left(\dfrac{5}{2},0\right)$. 当弦过圆心$B$时弦最长，故$a_n=5$. 当弦与$BA$垂直时，弦最短，故$a_1=4$. 由等差数列通项公式$a_n=a_1+(n-1)d$得$d=\dfrac{1}{n-1}$，由$n\in\{4,5,6,7\}$可得

$\dfrac{1}{7-1}\leqslant d\leqslant\dfrac{1}{4-1}\Rightarrow\dfrac{1}{6}\leqslant d\leqslant\dfrac{1}{3}$，$\therefore k_1=\dfrac{1}{6}$，$k_2=\dfrac{1}{3}$.

（Ⅱ）已知$\dfrac{x}{6}\in(k_1,k_2]$，$\therefore x\in(1,2]$.

由$\dfrac{\lg 2ax}{\lg(a+x)}<1$可得$a>0$故$a+x>1$.

$\therefore\lg(a+x)>0$，原不等式化为$\lg 2ax<\lg(a+x)$恒成立$\Leftrightarrow a+x>2ax>0$恒成立$\Leftrightarrow 0<a<\dfrac{x}{2x-1}$恒成立

$\Leftrightarrow 0<a<\left(\dfrac{x}{2x-1}\right)_{\min}$. 令$u=\dfrac{x}{2x-1}$，$\therefore u=\dfrac{1}{2-\frac{1}{x}}$，

$\therefore u\in\left[\dfrac{2}{3},1\right)$，故$0<a<\dfrac{2}{3}$.

点评　在不等式的转化过程中，一定要注意前后的等价性；对恒成立问题的探讨，一般会利用分离变量的思想.

方法指导

1. 解一元二次不等式主要用图象法，用二次函数$f(x)=ax^2+bx+c$的图象来解一元二次不等式$ax^2+bx+c>0$或$ax^2+bx+c<0$，一方面这种解法直观易掌握，另一方面，利用这种解法又能将一元二次不等式和二次函数、一元二次方程自觉地联系起来，有助于树立"函数与方程""数形结合"等数学思想，沟通知识间的内在联系.

2. 解含绝对值的不等式的指导思想是等价转化，即把含绝对值的不等式转化为不含绝对值的不等式. 解分式不等式的指导思想也是等价转化，即把分式不等式转化为整式不等式.

3. 特别要注意含参数的不等式的求解过程中的分类讨论思想，分类标准的确定是关键；特别要注意为什么讨论，对谁讨论，怎么讨论.

精彩演练

链接高考

1.（**2004年全国Ⅲ**）不等式$\dfrac{x(x+2)}{x-3}<0$的解集为　（　　）

A. $\{x|x<-2$或$0<x<3\}$　　B. $\{x|-2<x<0$或$x>3\}$

C. $\{x|x<-2$或$x>0\}$　　D. $\{x|x<0$或$x>3\}$

2.（**2004年重庆**）不等式$x+\dfrac{2}{x+1}>2$的解集是　（　　）

A. $(-1,0)\cup(1,+\infty)$

B. $(-\infty,-1)\cup(0,1)$

C. $(-1,0)\cup(0,1)$

D. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

3.（**2004年全国Ⅰ**）不等式$|x+2|\geqslant|x|$的解集是________.

4.（**2004年湖北**）设集合$P=\{m|-1<m<0\}$，$Q=\{m\in\mathbf{R}|mx^2+4mx-4<0$对任意实数$x$恒成立$\}$，则下列关系中成立的是　（　　）

A. $P \subsetneqq Q$　B. $Q \subsetneqq P$　C. $P=Q$　D. $P\cap Q=\varnothing$

5. (2005 年全国Ⅱ) 设函数 $f(x)=2^{|x+1|-|x-1|}$，求使 $f(x)\geqslant 2\sqrt{2}$ 成立的 x 取值范围.

能力培训

一、选择题

1. 不等式 $\frac{x-1}{x}\geqslant 2$ 的解集为 (　　)

A. $(-1,0)\cup(1,+\infty)$

B. $(-\infty,-1)\cup(0,1)$

C. $[-1,0)$

D. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

2. 不等式 $1<|x+1|<3$ 的解集为 (　　)

A. $(0,2)$　B. $(-2,0)\cup(2,4)$

C. $(-4,0)$　D. $(-4,-2)\cup(0,2)$

3. 若集合 $M=\{x\mid |x|\leqslant 2\}$，$N=\{x\mid x^2-3x=0\}$，则 $M\cap N$ 等于 (　　)

A. $\{3\}$　B. $\{0\}$　C. $\{0,2\}$　D. $\{0,3\}$

4. 若 $a>0,b>0$，则与不等式 $-b<\frac{1}{x}<a$ 等价的是 (　　)

A. $x<-\frac{1}{b}$ 或 $x>\frac{1}{a}$

B. $-\frac{1}{a}<x<\frac{1}{b}$

C. $-\frac{1}{b}<x<0$ 或 $0<x<\frac{1}{a}$

D. $-\frac{1}{a}<x<0$ 或 $0<x<\frac{1}{b}$

二、填空题

5. 不等式 $(x^2-3x+2)\cdot\sqrt{9-x^2}\geqslant 0$ 的解集是__________.

6. 函数 $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)}$ 的定义域是________________.

7. 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且在 $(-\infty,0)$ 上是增函数，已知 $x_1<0,x_2<0,|x_1|<|x_2|$，那么 $f(-x_1)$ 与 $f(-x_2)$ 的大小关系是____________________.

8. 若正数 a、b 满足 $ab=a+b+3$，则 ab 的取值范围是______.

三、解答题

9. 已知实数 a 满足不等式 $|a+1|<3$，解关于 x 的不等式 $[x-(a+1)](x+1)>0$.

10. 已知商品定价上涨 x 成，销量便减少 $\frac{x}{2}$ 成，税收是从营业额中按比例进行纳税. 若无论如何涨价，营业额里扣除税金后所得金额均比涨价前的营业额要少，试求税率的取值范围.

11. (文科) 已知 $\boldsymbol{a}=(1,x)$，$\boldsymbol{b}=(x^2+x,-x)$，解关于 x 的不等式 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2>\frac{2}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}+1$.

(理科) 已知 $\boldsymbol{a}=(1,x)$，$\boldsymbol{b}=(x^2+x,-x)$，解关于 x 的不等式 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2>m\left(\frac{2}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}+1\right)(m\in\mathbf{R})$.

§12 集合及其运算

考点解读

1. 理解集合的概念,必须掌握集合中元素的特征:①确定性;②互异性;③无序性.以此作为判断集合的标准.

2. 掌握集合的三种表示方法:①列举法;②描述法;③图示法.

3. 要准确掌握元素与集合只有属于与不属于的两种对应关系,即对任意元素 a 与集合 A,$a\in A$ 与 $a\notin A$ 中有且只有一个成立.

4. 要掌握集合与集合的关系.子集:任意 $a\in A$,有 $a\in B\Leftrightarrow A\subseteq B$;真子集:$A\subseteq B$,且 B 中至少存在一个元素不在 A 中,记作 $A\subsetneqq B$;相等集:$A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A\Leftrightarrow A=B$.

注意一些常见结论:记集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,则集合 A 的子集有 2^n 个,真子集有 2^n-1,非空真子集有 2^n-2 个.满足 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\subseteq A\subsetneqq\{a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_m\}$ 的集合 A 有 2^m 个($m,n\in\mathbf{N}^*$).

5. 要准确掌握集合的运算.并集:$A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$;交集:$A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$;补集:$\complement_U A=\{x|x\in U$ 且 $x\notin A\}$.

特别理解一些常见的运算式,更要关注以下重要结论:$A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$($B=\varnothing$ 也成立);$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$($A=\varnothing$ 也成立);$\complement_U(A\cup B)=\complement_U A\cap\complement_U B$;$\complement_U(A\cap B)=\complement_U A\cup\complement_U B$.

典例精析

例1 解下列各题:

1. 集合 $M=\{x|x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$,$N=\{x|x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$,则 M、N 的关系为________.

2. (文科)设非空集合 $S\subseteq\{1,2,3,4,5\}$,且满足"若 $a\in S$,则 $6-a\in S$",这样的 S 共有 ( )

A. 5 个 B. 7 个 C. 15 个 D. 31 个

(理科)定义一种运算"[ ]",$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,解方程 $x^2+[x]-2=0$.

例2 已知集合 $A=\{x|x^2-x-6<0\}$,$B=\{x|x^2+2x-8>0\}$,$C=\{x|x^2-4ax+3a^2<0\}$,求当 $A\cap B\subseteq C$ 时实数 a 的取值范围.

例3 已知集合 $A=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$,$B=\{(x,y)||x|+|y|\leqslant a\}$,求解下列问题:

(Ⅰ)若 $B\subseteq A$,求实数 a 的取值范围;

(Ⅱ)若 $A\subseteq B$,求实数 a 的取值范围;

(Ⅲ)若点 $(x,y)\in A$,求 $u(x,y)=(x-2)^2+(y-1)^2$ 的值域;

(Ⅳ)若点 $(x,y)\in A$,求 $\frac{y-1}{x-2}$ 的值域.

例4 对于函数$f(x)$，若$f(x)=x$，则称x为$f(x)$的"不动点"；若$f[f(x)]=x$，则称x为$f(x)$的"稳定点"．函数$f(x)$的"不动点"和"稳定点"的集合分别记为A和B，即$A=\{x|f(x)=x\}$，$B=\{x|f[f(x)]=x\}$．

（Ⅰ）求证：$A\subseteq B$；

（Ⅱ）若$f(x)=ax^2-1(a\in\mathbf{R},x\in\mathbf{R})$，且$A=B\neq\varnothing$，求实数$a$的取值范围．

分析 本题的入手点应为对集合A、B中元素的确定和求解．

解答 （Ⅰ）若$A=\varnothing$，则$A\subseteq B$显然成立；若$A\neq\varnothing$，设$t\in A$，$f(t)=t$，则$f[f(t)]=f(t)=t$，即$t\in B$，从而$A\subseteq B$．综上$A\subseteq B$．

（Ⅱ）A中元素是方程$f(x)=x$，即$ax^2-1=x$的实根，由$A\neq\varnothing$，知

$$a=0\text{ 或}\begin{cases}a\neq0\\ \Delta=1+4a\geqslant0\end{cases}\Rightarrow a\geqslant-\frac{1}{4}.$$

B中元素是方程$a(ax^2-1)^2-1=x$，即$a^3x^4-2a^2x^2-x+a-1=0$的实根．由$A\subseteq B$知上述方程左边含有一个因式ax^2-x-1，即方程可化为$(ax^2-x-1)(a^2x^2+ax-a+1)=0$．因此，要使$A=B$即要使方程$a^2x^2+ax-a+1=0$……①要么没有实根，要么实根是方程$ax^2-x-1=0$……②的根．

若①没有实根，则$a=0$或$\Delta=a^2-4a^2(1-a)<0$，由此解得$a<\frac{3}{4}$或$a=0$；

若①有实根，且①的实根是②的实根，则由②有$a^2x^2=ax+a$，代入①有$2ax+1=0$，由此解得$x=-\frac{1}{2a}$，再代入②得$\frac{1}{4a}+\frac{1}{2a}-1=0$，由此得$a=\frac{3}{4}$．

故$a\in\left[-\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$．

点评 本题是集合与方程的综合题，首先要清楚集合A、B的元素就是方程的根，其次在研究方程的根时要有分类讨论的意识和严密的逻辑思维能力．

方法指导

1．本节重点突出了数形结合的思想，主要反映在以下三个方面：

（1）在深刻理解集合的交、并、补概念的基础上，用韦恩图解决有关集合的问题，可化难为易；

（2）两个集合都是不等式的解集时，求它们的交、并、补通常用数轴直观显示；

（3）若集合中的元素用坐标形式表示时，要想到满足条件的点所构成的图形是什么，画出草图，再利用图形的直观性寻找解题途径．

2．本节中转化的思想体现得较为充分，如将$\complement_U A\cap\complement_U B$转化为$\complement_U(A\cup B)$，将$A\cup B=A$和$A\cap B=B$转化为$B\subseteq A$，但要注意空集的存在．

精彩演练

链接高考

1．（2004年全国Ⅲ）已知集合$M=\{0,1,2\}$，$N=\{x|x=2a,a\in M\}$，则集合$M\cap N=$ （　　）

A．$\{0\}$　　B．$\{0,1\}$　　C．$\{1,2\}$　　D．$\{0,2\}$

2．（2005年全国Ⅰ）设I为全集，S_1、S_2、S_3是I的三个非空子集，且$S_1\cup S_2\cup S_3=I$，则下面论断正确的是 （　　）

A．$\complement_I S_1\cap(S_2\cup S_3)=\varnothing$

B．$S_1\subseteq(\complement_I S_2\cap\complement_I S_3)$

C．$\complement_I S_1\cap(\complement_I S_2\cap\complement_I S_3)=\varnothing$

D．$S_1\subseteq(\complement_I S_2\cup\complement_I S_3)$

3．（2004年全国Ⅰ）设A、B、I均为非空集合，且满足$A\subseteq B\subseteq I$，则下列各式中错误的是 （　　）

A．$(\complement_I A)\cup B=I$　　B．$(\complement_I A)\cup(\complement_I B)=I$

C．$A\cap(\complement_I B)=\varnothing$　　D．$(\complement_I A)\cap(\complement_I B)=\complement_I B$

4．（2005年山东）设集合A、B是全集U的两个子集，则$A\subset B$是$(\complement_U A)\cup B=U$的 （　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

5．（2004年湖北）设A、B为两个集合，下列四个命题：①$A\not\subseteq B\Leftrightarrow$对任意$x\in A$，有$x\notin B$；②$A\not\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$；③$A\not\subseteq B\Leftrightarrow B\not\supseteq A$；④$A\not\subseteq B$，存在$x\in A$，使得$x\notin B$．其中真命题的是________．（把符合要求的命题序号都填上）

能力培训

一、选择题

1．（文科）已知集合$M=\{x|-4\leqslant x\leqslant7\}$，$N=\{x|x^2-x-6>0\}$，则$M\cap N$为 （　　）

A．$\{x|-4\leqslant x<-2\text{ 或 }3<x\leqslant7\}$

B．$\{x|-4<x\leqslant-2\text{ 或 }3\leqslant x<7\}$

C．$\{x|x\leqslant-2\text{ 或 }x>3\}$

D．$\{x|x<-2\text{ 或 }x\geqslant3\}$

（理科）已知集合$M=\{x|x^2-3x-28\leqslant0\}$，$N=\{x|x^2-x-6>0\}$，则$M\cap N$为 （　　）

A．$\{x|-4\leqslant x<-2\text{ 或 }3<x\leqslant7\}$

B．$\{x|-4<x\leqslant-2\text{ 或 }3\leqslant x<7\}$

C．$\{x|x\leqslant-2\text{ 或 }x>3\}$

D. $\{x|x<-2$ 或 $x\geqslant3\}$

2. 定义集合 M 与 N 的新运算：$M*N=\{x|x\in M$ 或 $x\in N$ 且 $x\notin M\cap N\}$，则 $(M*N)*M$ 等于　　（　　）

A. $M\cap N$　　B. $M\cup N$　　C. M　　D. N

3. 已知 R 为全集，$A=\{x|\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\geqslant-2\}$，$B=\{x|\frac{5}{x+2}\geqslant1\}$，则 $\complement_R(A\cap B)=$　　（　　）

A. $\{x|x\leqslant-1$ 或 $x>3\}$　　B. $\{x|x<-1$ 或 $x\geqslant3\}$

C. $\{x|-1\leqslant x<3\}$　　D. $\{x|-1<x\leqslant3\}$

4. 设集合 $M=\left\{x|m\leqslant x\leqslant m+\frac{3}{4}\right\}$，$N=\left\{x|n-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant n\right\}$，且 M、N 都是集合 $\{x|0\leqslant x\leqslant1\}$ 的子集. 如果把 $b-a$ 叫做集合 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 的"长度"，那么集合 $M\cap N$ 的"长度"的最小值为　　（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{1}{12}$　　D. $\frac{5}{12}$

二、填空题

5. 设 $A=\left\{x|\frac{6}{5-x}\in\mathbf{N}^*,x\in\mathbf{Z}\right\}$，则 $A=$__________.

6. 定义 $A-B=\{x|x\in A$，且 $x\notin B\}$，若 $M=\{1,2,3,4,5\}$，$N=\{2,4,8\}$，则 $N-M=$__________.

7. 已知集合 $A=\{x|x^2+x-6=0\}$，$B=\{x|mx+1=0\}$，若 $A\cap B=B$，则 m 的值为__________.

8. 已知集合 $A=\{a,ab,\lg(ab)\}$，$B=\{0,|a|,b\}$，并且 $A=B$，则 $a=$________，$b=$________.

三、解答题

9. 已知 $A=\{x|ax-2\geqslant0\}$，$B=\{x|x^2-3x-4\leqslant0\}$，问 a 为何值时 $A\cap B=\varnothing$.

10. 已知集合 $A=\{x|x^2+(p+2)x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{y|y=2^{1-2x},x\in\mathbf{R}\}$. 若 $A\cap B=\varnothing$，求实数 p 的取值范围.

11. 已知集合 $A=\left\{x||x-\frac{\pi}{3}|\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$，集合 $B=\left\{y|y=-\frac{1}{2}\cos2x-2a\sin x+\frac{3}{2},x\in A\right\}$，其中 $\frac{\pi}{6}\leqslant a\leqslant\pi$. 欲使 $B\subseteq A$，求实数 a 的取值范围.

§1.3 简易逻辑与四种命题

考点解读

1. 了解命题的概念和含有"或""且""非"的复合命题的构成,理解逻辑联结词"或""且""非"的含义,注意三种复合命题与集合的并、交、补的关系. 能根据真值表判断一些较简单的复合命题的真假.

2. 掌握四种命题及其相互关系:原命题⇔逆否命题,逆命题⇔否命题. 它们之间互为逆否的关系,是等价的、真假性相同的命题. 注意命题的否定与否命题的区分.

3. 正确理解充分条件、必要条件和充要条件的概念,掌握判断命题的充分性、必要性的方法. 方法1——定义法;方法2——等价法;方法3——利用集合间的包含进行判断. 如果条件 p 和结论 q 都是集合,或可改写为集合形式,那么若 $p\subseteq q$,则 p 是 q 的充分条件,q 是 p 的必要条件;若 $p=q$,则 p 是 q 的充要条件. 理解充要条件与命题等价性的联系.

4. 能用反证法证明较简单的数学问题. 用反证法的常见题型:"存在型""唯一型""否定型""至多至少型""任意型""定义型";运用原则:正难则反;步骤:否定结论→与已知真命题矛盾→肯定结论正确.

典例精析

例1 解答下列各题:

1. 如果命题"非 p 或非 q"是假命题,则下列各结论中,正确的是 ( )

①命题"p 或 q"是真命题;

②命题"p 且 q"是假命题;

③命题"p 且 q"是真命题;

④命题"p 或 q"是假命题.

A. ①③　　B. ②④

C. ②③　　D. ①④

2. "已知 a,b,c,d 是实数,若 $a>c,b>d$,则 $a+b>c+d$",写出上述命题的逆命题、否命题与逆否命题,并分别判定其真假.

例2 已知 $p:\left|1-\dfrac{x-1}{3}\right|\leqslant 2$,$q:x^2-2x+1-m^2\leqslant 0(m>0)$,且 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件,求实数 m 的取值范围.

例3 已知条件 $p:|5x-1|>a$ 和条件 $q:\dfrac{1}{2x^2-3x+1}>0$,请选取适当的实数 a 的值,分别利用所给出的两个条件作为 A、B 构造命题"若 A 则 B",并使得构造的原命题为真命题,而其逆命题为假命题,则这样的一个原命题可以是什么? 并说明为什么这一命题是符合要求的命题.

例4 已知 $m\in\mathbf{R}$，设 p：x_1 和 x_2 是方程 $x^2-ax-2=0$ 的两个实根，不等式 $|m^2-5m-3|\geq|x_1-x_2|$ 对任意实数 $a\in[-1,1]$ 恒成立；q：函数 $f(x)=x^3+mx^2+\left(m+\frac{4}{3}\right)x+6$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有极值. 求使 p 正确且 q 正确的 m 的取值范围.

分析 本题主要考查集合的运算、绝对值不等式、应用导数研究函数的单调性及极值等基础知识，考查综合分析和解决问题的能力.

解答 由题设 x_1 和 x_2 是方程 $x^2-ax-2=0$ 的两个实根，得 $x_1+x_2=a$ 且 $x_1x_2=-2$.

$\therefore |x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{a^2+8}$，当 $a\in[-1,1]$ 时，a^2+8 的最大值为 9，即 $|x_1-x_2|\leq3$.

由题意，不等式 $|m^2-5m-3|\geq|x_1-x_2|$ 对任意实数 $a\in[-1,1]$ 恒成立，等价于 $|m^2-5m-3|\geq3$ 恒成立，解得 $m\leq-1$ 或 $0\leq m\leq5$ 或 $m\geq6$. $\therefore$ 当 $m\leq-1$ 或 $0\leq m\leq5$ 或 $m\geq6$ 时，p 是真命题.

对函数 $f(x)=x^3+mx^2+\left(m+\frac{4}{3}\right)x+6$，求导数得 $f'(x)=3x^2+2mx+m+\frac{4}{3}$. 令 $f'(x)=0$，

此一元二次方程的判别式为：

$\Delta=4m^2-12\left(m+\frac{4}{3}\right)=4m^2-12m-16$.

若 $\Delta=0$，则 $f'(x)=0$ 有两个相等的实数根 x_0，从而 $f'(x)$ 的符号如下：

x	$(-\infty,x_0)$	x_0	$(x_0,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	+

因此，$f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值.

若 $\Delta>0$，则 $f'(x)=0$ 有两个不相等的实数根 x_1 和 $x_2(x_1<x_2)$，且 $f'(x)$ 的符号如下：

x	$(-\infty,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+

因此，函数 $f(x)$ 在 $x=x_1$ 处取得极大值，在 $x=x_2$ 处取得极小值.

综上所述，当且仅当 $\Delta>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有极值.

由 $\Delta=4m^2-12m-16>0$ 得 $m<-1$ 或 $m>4$. 因此，当 $m<-1$ 或 $m>4$ 时，q 是真命题.

综上，使 p 正确且 q 正确时，实数 m 的取值范围是 $(-\infty,-1)\cup(4,5]\cup[6,+\infty)$.

点评 该题主要是寻找使 p 正确与 q 正确时 m 的取值，然后求其交集，是一道综合性较强的题目. 可将此题改成若命题 p 与 q 中有且仅有一个成立，求实数 m 的取值范围.

方法指导

1. 判断一个命题的真假时，真值表是判断复合命题的主要依据. 确定一个"若 p 则 q"形式的命题为真，一般要由条件 p 经过一定的逻辑推理得出结论 q. 确定一个"若 p 则 q"形式的命题为假，一般只需举一个反例说明即可.

2. 在判断命题中的充分条件与必要条件时，一定要分清"充分"与"必要"这二者的不同，千万不能搞混. 若条件 p 以集合 A 的形式出现，结论 q 以集合 B 的形式出现时，则有：若 $A\subseteq B$，则 p 是 q 的充分条件；若 $B\subseteq A$，则 p 是 q 的必要条件；若 $A=B$，则 p 是 q 的充要条件.

3. 反证法出现什么样的矛盾，事先无法预知，因此，用反证法时，应随时审视每个推理的结论是否与题设、定义、公理、公式、法则等矛盾，甚至自相矛盾等. 在利用反证法证明问题时，还应注意原命题结论的否定事项是只有一个还是不只一个，总之只有将否定事项逐一驳倒，才能肯定原命题成立.

精练演练

链接高考

1. (2001 年津晋赣) 在空间，①若四点不共面，则这四点中任何三点都不共线；②若两条直线没有公共点，则这两条直线是异面直线. 以上两个命题中，逆命题为真命题的是________.

2. (2004 年福建) 命题 p：若 $a,b\in\mathbf{R}$，则 $|a|+|b|>1$ 是 $|a+b|>1$ 的充分而不必要条件. 命题 q：函数 $y=\sqrt{|x-1|-2}$ 的定义域是 $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$，则 ( )

A. "p 或 q"为假　　B. "p 且 q"为真

C. p 真 q 假　　D. p 假 q 真

3. (2004 年湖北) 已知 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为非零的平面向量.

甲：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，乙：$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，则 ( )

A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件

B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件

C. 甲是乙的充要条件

D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

4. (2004 年浙江) 在 $\triangle ABC$ 中，"$A>30°$"是"$\sin A>\frac{1}{2}$"的 ( )

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

5. (2005 年湖北)设 P、Q 为两个非空实数集合，定义集合 $P+Q=\{a+b|a\in P,b\in Q\}$，若 $P=\{0,2,5\}$，$Q=\{1,2,6\}$，则 $P+Q$ 中元素的个数是 ( )

A. 9　　B. 8　　C. 7　　D. 6

能力培训

一、选择题

1. 已知命题甲：$x>0$，命题乙：$|x|>0$，那么 ( )

A. 甲是乙的充分非必要条件

B. 甲是乙的必要非充分条件

C. 甲是乙的充要条件

D. 甲是乙的既非充分也非必要条件

2. 使不等式 $2x^2-5x-3\geqslant 0$ 成立的一个充分而不必要条件是 ( )

A. $x<0$　　B. $x\geqslant 0$

C. $x\in\{-1,3,5\}$　　D. $x\leqslant -\frac{1}{2}$ 或 $x\geqslant 3$

3. "$a\neq 1$ 或 $b\neq 2$"是"$a+b\neq 3$"的 ( )

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充要条件　　D. 既非充分也非必要条件

4. 已知函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数，且 x、$y\in\mathbf{R}$，对于命题 p：若 $a+b>0$，则 $f(a)+f(b)<f(-a)+f(-b)$，给出下列结论：

①命题 p 的逆命题为真；

②命题 p 的否命题为真；

③命题 p 的逆否命题为真；

④命题 p 的逆命题和否命题恰有一个假命题.

其中的正确结论恰有 ( )

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 3 个

二、填空题

5. 命题"x、$y\in\mathbf{R}$ 且 $x^2+y^2=0$，则 x、y 全为 0"的否命题是 ________.

6. 方程 $ax^2+2x+1=0$ 至少有一个负根的充要条件是 ______.

7. 在 $\triangle ABC$ 中，$A>B$ 是 $\sin A>\sin B$ 成立的 ________ 条件.

8. 小张参加全国数学联赛，有三位同学对他作出如下猜测：

甲：小张非第一名，也非第二名；

乙：小张非第一名，而是第二名；

丙：小张非第三名，而是第一名.

联赛结束后发现，有一人猜对，一人猜对一半，一人猜错，问小张得了第 ______ 名.

三、解答题

9. 已知 p、q 都是 r 的必要条件，s 是 r 的充分条件，q 是 s 的充分条件，问：

(Ⅰ) s 是 q 的什么条件？

(Ⅱ) r 是 q 的什么条件？

(Ⅲ) p 是 q 的什么条件？

10. 设 x、$y\in\mathbf{R}$，求证：$|x+y|=|x|+|y|$ 成立的充要条件是 $xy\geqslant 0$.

11. 如图 1－1，有两个同心圆盘，各分成 n 个相等的小格子，大盘固定，小盘可以转动，大小盘的格内分别填有实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，$b_1,b_2,\cdots,b_n$，且 $a_1+a_2+\cdots+a_n<0$，$b_1+b_2+\cdots+b_n<0$. 证明：必可将小圆盘转到一个适当的位置，使两圆的小格对齐. 这时，两圆盘 n 个对应小格内的数字的乘积之和为正数.

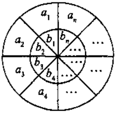

图 1－1

新题新选

1. 若集合 $A=\{x|x^2-2x-8\leqslant 8\}$，$B=\{x|C_5^x\leqslant 5\}$ 则 $A\cap B$ 中元素个数为 ( )

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

2. 已知集合 $A=\{12,14,16,18,20\}$，$B=\{11,13,15,17,19\}$，在 A 中任取一个元素 $a_i(i=1,2,3,4,5)$，在 B 中任取一个元素 $b_j(j=1,2,3,4,5)$，则所取两数 a_i、b_j 满足 $a_i>b_j$ 的概率为 ( )

A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{5}$

3. 已知全集 $U=\mathbf{R}$，$A=\left\{x|\frac{x+1}{2x-2}\geqslant 0\right\}$，$B=\{y|y=2\arcsin x\}$，则 $(\complement_U A)\cap B$ 等于 ( )

A. $\{x|-1<x\leqslant 1\}$ B. $\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$

C. $\{x|-1<x\leqslant 2\}$ D. $\varnothing$

4. 对于函数 $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$，设 $f_2(x)=f(f(x))$，$f_3(x)=f(f_2(x))$，$\cdots f_{n+1}(x)=f(f_n(x))$。令 $M=\{x|f_{2005}(x)=x,x\in\mathbf{R}\}$，则 M ( )

A. 等于$\varnothing$ B. 等于实数集 $\mathbf{R}$

C. 为单元素集合 D. 为二元素集合

5. 设集合 $M=\{x\in\mathbf{Z}|x^2-2x+b\leqslant 0\}$ 有且只有一个元素，则 b 的取值范围是 ( )

A. $[1,+\infty)$ B. $(-\infty,1]$ C. $(0,+\infty]$ D. $(0,1]$

6. 设有两个命题：①不等式 $\left(\frac{1}{3}\right)^x+4>m>2x-x^2$ 对一切实数 x 都成立；②函数 $f(x)=-(7-2m)^x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数. 若这两个命题都是真命题，则实数 m 的取值范围是________.

7. 某城市数、理、化竞赛时，高一某班有 24 名学生参加数学竞赛，28 名学生参加物理竞赛，19 名学生参加化学竞赛，其中参加数、理、化三科竞赛的有 7 名，只参加数、物两科的有 5 名，只参加物、化两科的有 3 名，只参加数、化两科的有 4 名. 若该班学生共有 48 名，则没有参加任何一科竞赛的学生有______名.

8. 任意两个集合 X 和 Y，定义 X 和 Y 的差为 $X-Y=\{x|x\in X,x\notin Y\}$，集合 X 和 Y 的对称差 $X\triangle Y$ 规定为 $X\triangle Y=(X-Y)\cup(Y-X)$. 设集合 $A=\{y|y=x^2,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{y|y=3\sin x,x\in\mathbf{R}\}$，求 $A\triangle B$.

9. 给定两个命题，P：对任意实数 x 都有 $ax^2+ax+1>0$ 恒成立；Q：关于 x 的方程 $x^2-x+a=0$ 有实数根. 如果 P 与 Q 中有且仅有一个为真命题，求实数 a 的取值范围.

10. 已知命题 p：方程 $a^2x^2+ax-2=0$ 在 $[-1,1]$ 上有解；命题 q：只有一个实数 x 满足不等式 $x^2+2ax+2a\leqslant 0$. 若命题"p 或 q"是假命题，求 a 的取值范围.

11. 设集合 $M=\{x||x|<1\}$，在集合 M 中定义一种运算 $*$，使得 $a*b=\frac{a+b}{1+ab}$.

(Ⅰ)证明：若 $a\in M,b\in M$，则 $a*b\in M$；

(Ⅱ)证明：$(a*b)*c=a*(b*c)$.