GAOZHONG SHUXUE JINGSAI
BIAOZHUN JIAOCAI

高中数学竞赛
标准教材

模拟训练

《数学竞赛之窗》编辑部 主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高中数学竞赛标准教材
模拟训练

《数学竞赛之窗》编辑部　主编

浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学竞赛标准教材:模拟训练 /《数学竞赛之窗》编辑部主编 .—杭州:浙江大学出版社,2006.9
ISBN 7-308-04927-2

Ⅰ.高... Ⅱ.数... Ⅲ.数学课—高中—习题
Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 109546 号

高中数学竞赛标准教材(模拟训练)

《数学竞赛之窗》编辑部 主编

责任编辑	杨晓鸣 曾小丽
出版发行	浙江大学出版社
	(杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028)
	(E-mail:zupress@mail.hz.zj.cn)
	(网址:http://www.zjupress.com)
排 版	浙江大学出版社电脑排版中心
印 刷	杭州富阳育才印刷有限公司
开 本	787mm×1092mm 1/16
印 张	15.25
字 数	380 千字
版 印 次	2006 年 9 月第 1 版 2006 年 9 月第 2 次印刷
书 号	ISBN 7-308-04927-2/G・1118
定 价	19.00 元

编写说明

一年一度的全国高中数学联合竞赛为那些具有数学潜能的学生提供了一个展示天赋平台,也激发了他们的学习兴趣。通过这项活动,发现了一批数学苗子,培养了一批数学人才。国内外诸多著名的数学家都是通过这种渠道被发现的。2006 年数学菲尔兹奖得主——俄罗斯数学家 Grigory Perelmon 和澳大利亚华裔数学家陶哲轩都曾获得过 IMO 金牌。

近来,数学竞赛遭到种种非议。尽管有些观点言过其实,但并非空穴来风。数学竞赛存在的问题之一就是竞赛命题缺少科学性。许多题目既没有深刻的数学背景,也没有实际意义,更没有体现前沿性。鉴于此,我们组织数学专家和数学竞赛命题专家,编写了 20 套竞赛模拟试题。所有试题的选择充分体现了科学性、前沿性、趣味性和学科背景,具有很强的针对性、预测性和指导性,力求使试题测出学生的数学素质,发展数学苗子。

参加本书编写的学校有:江苏启东中学、木渎中学、苏州一中,上海中学,辽宁东北育才中学,广东华南师范大学附属中学,湖南师范大学附属中学,江西景德镇二中,安徽安庆一中,浙江学军中学、绍兴一中等等。

编　者

2006 年 8 月

目 录

全国高中数学联赛模拟题(1)

第一试

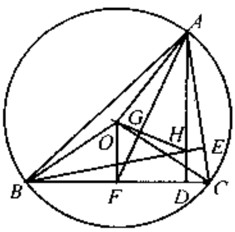
一、选择题(本题满分 36 分,每小题 6 分)

1. 函数 $f(x)=\sqrt{\frac{1}{2}-x}+\sqrt{x-\frac{1}{3}}$ 的最大值为 a,最小值为 b,则 $a+b$ 的值是(　　)

(A) $\frac{\sqrt{3}}{6}(3+\sqrt{3})$　　(B) $\frac{\sqrt{3}}{6}(2+\sqrt{2})$

(C) $\frac{\sqrt{3}}{6}(3+\sqrt{2})$　　(D) $\frac{\sqrt{3}}{6}(2+\sqrt{3})$

2. 如右图,内接于 $\odot O$ 的 $\triangle ABC$ 的两条高线 AD、BE 相交于点 H. 过圆心 O 作 $OF\perp BC$,垂足为点 F,连接 AF 交 OH 于点 G. 下列结论:



① $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$;② $\overrightarrow{OF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$;③$G$ 是 $\triangle ABC$ 的重心.

则结论正确的个数是(　　)

(A)0　　(B)1

(C)2　　(D)3

3. 有限项等差数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1$,公差为 2,其所有项的算术平均数是 2006. 若从中删去一项后,该数列剩余各项的算术平均数为整数,则删项的方法有(　　)

(A)1 种　　(B)2 种　　(C)3 种　　(D)4 种

4. 双曲线的左、右两焦点分别为 F_1,F_2,一条过 F_2 的直线与双曲线的右支交于 A、B 两点. 若 $\triangle F_1AB$ 是正三角形,则该双曲线的离心率是(　　)

(A) $\sqrt{2}$　　(B) $\sqrt{3}$

(C) $\sqrt{5}$　　(D) $\sqrt{6}$

5. 如果一个正四棱锥的表面积和体积的大小在数值上相等，则该四棱锥的体积的最小值是(　　)

(A)48　　(B)144

(C)288　　(D)432

6. 给定集合 P、Q 满足 $P=\{x \mid \cot[x]\cdot\cot\{x\}=1, x\in\mathbf{R}\}$(其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数，$\{x\}=x-[x]$)，$Q=\left\{x \mid \sin^2 x+\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{2}, x\in\mathbf{R}\right\}$，则 $P\cap Q=$ (　　)

(A) P　　(B) Q

(C) $\varnothing$　　(D) $P\cup Q$

二、填空题(本题满分 54 分，每小题 9 分)

7. 若函数 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{bx^2+2a^2})$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 是奇函数，则实数对 $(a,b)=$ ________.

8. 从集合 $S=\{1,2,\cdots,10\}$ 中任取 4 个元素 a,b,c,d (允许重复)，使得 $ab+cd$ 为奇数，则这样的有序数组 (a,b,c,d) 的组数为________.

9. 已知函数 $f(x)$ 对任意实数 x,y 均有 $f(xy)-f(x-y)=0$，且 $f(-3)=3$，则 $f(2006)=$ ________.

10. 若 $2n+1$ 和 $20n+1$ (n 是正整数) 是同一个正整数的方幂，则 n 的所有可能值是________.

11. 函数 $f(x)=\left|\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x\right|$ 的值域是________.

12. 一个人练习打靶，开始时他距靶 100 米，此时进行第一次射击. 若此次射击不中，则后退 50 米进行第二次射击. 一直进行下去，每次射击前都后退 50 米. 已知他第一次的命中率为$\frac{1}{4}$，且命中率跟距离的平方成反比，则他命中的概率是________.

三、解答题(本题满分 60 分，每小题 20 分)

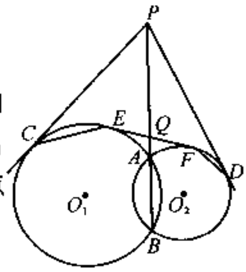
13. 设 a 为实常数，解方程 $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin 2x+a$.

14. 点 F 是中心在坐标原点 O 的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点，点 A、B 是椭圆上不同于长轴端点的两点，且直线 AB 过点 F. 连接 AO 并延长，交椭圆于点 C，求 $\triangle ABC$ 的面积的最大值.

15. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1 = a_2 = 2$，$2na_{n+1} - (3n+2)a_n + (n+1)a_{n-1} = 0 (n \geqslant 2)$，求$a_{2006}$的值.

第二试

一、(本题满分 50 分)



如图 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 相交于 A、B 两点，P 是直线 AB 上一点，过点 P 向两圆作切线，分别切 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 于点 C 和 D. 两圆公切线分别切 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 于点 E 和 F，EF 与 PB 交于点 Q. 求证：直线 AB、CE、DF 共点.

二、(本题满分 50 分)

给定 $n+1(n\geqslant 2)$ 个正实数 $x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n$. 求证：

$$\frac{x_1}{2(x_0^2+x_1^2)}+\frac{x_2}{3(x_0^2+x_1^2+x_2^2)}+\cdots+\frac{x_n}{(n+1)(x_0^2+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}<\frac{1}{x_0}.$$

三、(本题满分 50 分)

已知偶数 $n \geqslant 4$，现发行一种数字彩票，在一张彩票填上前 n^2 个正整数中的 n 个数. 开奖时，从 $1,2,3,\cdots,n^2$ 中划去 n 个数，若彩票上的 n 个数均在剩余的 n^2-n 个数中，则该彩票中奖. 问至少需要购买多少张彩票，才能通过适当地填写彩票以保证至少有一张中奖？证明你的结论.

全国高中数学联赛模拟题(2)

第一试

一、选择题(本题满分 36 分,每小题 6 分)

1. 函数 $y=\cos^3 x+\sin^2 x-\cos x$ 的最大值等于(　　)

(A) $\frac{32}{27}$　　(B) $\frac{16}{27}$

(C) $\frac{8}{27}$　　(D) $\frac{4}{27}$

2. $\triangle ABC$ 的三条边长 $BC=a, AC=b, AB=c$,若三顶点 A,B,C 对于某定点 O 的位置向量为 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$,且 $a\boldsymbol{\alpha}+b\boldsymbol{\beta}+c\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$,则点 O 是 $\triangle ABC$ 的(　　)

(A) 外心　　(B) 内心

(C) 重心　　(D) 垂心

3. 设 F_1,F_2 为椭圆的两个焦点,P 为椭圆上一点. 若 $\angle PF_1F_2=\alpha$,$\angle PF_2F_1=\beta$,则该椭圆的离心率 e 等于(　　)

(A) $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{2}$　　(B) $(1-\sin\alpha)(1-\sin\beta)$

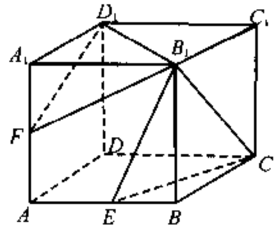
(C) $\sin\alpha\cdot\sin\beta$　　(D) $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta}$

4. 某人投掷两次骰子先后得到点数 m,n,用来作为一元二次方程 $x^2+mx+n=0$ 的系数,则使方程有实根的概率是(　　)

(A) $\frac{1}{2}$　　(B) $\frac{5}{9}$

(C) $\frac{17}{36}$　　(D) $\frac{19}{36}$

5. 如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F 分别是 AB、AA_1 的中点，则平面 CEB_1 与平面 D_1FB_1 所成二面角的平面角的正弦值为(　　)



(A) $\frac{1}{2}$　　(B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(D)1

6. 两个正整数 a,b 适合等式 $a+2a^2=b+3b^2$，则两数 $\sqrt{1+2a+2b}$ 与 $\sqrt{1+3a+3b}$ 的情况是(　　)

(A) 都是有理数

(B) 都是无理数

(C) 一个有理数，一个无理数

(D) 以上三种情况都可能出现

二、填空题(本题满分 54 分，每小题 9 分)

7. 数列 $a_0,a_1,a_2,\cdots$ 满足：$a_0=\sqrt{3}$，$a_{n+1}=[a_n]+\frac{1}{\{a_n\}}$（$[a_n]$ 与 $\{a_n\}$ 分别表示 a_n 的整数部分和分数部分），则 $a_{2004}=$ ________.

8. 函数 $y=x^2-x$ 与 $y=\cos 10\pi x$ 图像的交点有 ________ 个.

9. 若 $0<a,b,c<1$ 满足 $ab+bc+ca=1$，则 $\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}$ 的最小值是 ________.

10. 四面体 $ABCD$ 中，$AB=CD=a$，$BC=AD=b$，$CA=BD=c$，如果异面直线 AB 与 CD 所成的角为 θ，那么 $\cos\theta=$ ________.

11. 已知 $f(x)=x^2-6x+5$，则同时满足 $f(x)+f(y)\leqslant 0$ 和 $f(x)-f(y)\geqslant 0$ 的点 (x,y) 所在平面区域的面积是 ________.

12. 用 1,2,3,4,5 排成一个五位数，使任意相邻数码之差至少是 2，则这种五位数有 ________ 个.

三、解答题(本题满分 60 分,每小题 20 分)

13. 设 $a,b,c \in \mathbf{R}^{+}$,求$\frac{a}{b+3c}+\frac{b}{8c+4a}+\frac{9c}{3a+2b}$的最小值.

14. 已知数列$\{a_n\}$,$a_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}(n=1,2,3,\cdots)$,其中$\alpha,\beta$是方程$x^2-x-1=0$的两个根.

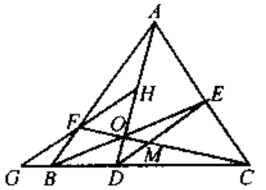
(1) 证明:对任意正整数 n,都有 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$;

(2) 证明:数列$\{a_n\}$中的项都是正整数,且任意相邻两项都互质.

15. 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$过定点$A(1,0)$，且焦点在$x$轴上，椭圆与曲线$|y|=x$的交点为$B,C$. 现有以$A$为焦点，过点$B,C$且开口向左的抛物线，抛物线的顶点坐标为$M(m,0)$. 当椭圆的离心率$e$满足$1>e^2>\frac{2}{3}$时，求实数$m$的取值范围.

第二试

一、(本题满分 50 分)



如图,O 为 $\triangle ABC$ 内一点,直线 AO,BO,CO 分别交对边于点 D,E,F,过点 F 作一直线平行于 DE,分别交直线 BC,AD 于 G,H. 求证:$GF = HF$.

二、(本题满分 50 分)

设 a,b,c 为满足 $a+b+c=1$ 的正数,求证:$27(a-bc)(b-ca)(c-ab) \leqslant 8abc$.

三、(本题满分 50 分)

设自然数 $n \geqslant 25$,求证:全体不大于 n 的合数可以排成一行,使得每三个依次相邻的数都有大于 1 的公因数.