

LINGO和Excel 在数学建模中的应用

袁新生 邵大宏 郁时炼 主编

- 深入浅出地介绍LINGO的基础知识
- 案例丰富、条理清晰、讲解透彻、图文并茂
- 大学生数学建模竞赛的指导用书
- 拓宽知识面，提高分析问题、解决问题的能力



科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书深入浅出地介绍了 LINGO 的基础知识、用 LINGO 语言描述现实问题的方法和用 Excel 处理数据的方法,重点是这两种软件在解决各种优化问题以及在数学建模中的应用,通过丰富的实例介绍了把实际问题转化为数学模型的方法,以及综合运用 LINGO 等软件来求解模型的手段和技巧。

本书的主要内容包括 LINGO 的基本用法、LINGO 在图论和网络模型中的应用、用 LINGO 求解非线性规划和多目标规划、LINGO 与其他软件之间的数据传递、Excel 在数学建模中的应用和 LINGO 在数学建模中的应用实例等。

本书可作为高等院校研究生、本科生和专科生的数学建模培训教材或参考书,也是从事数学建模教学和建模竞赛指导的教师、对数学建模有兴趣的科研人员有价值的参考书,还可以作为一本内容较全面的 LINGO 软件使用和培训教材。

图书在版编目(CIP)数据

LINGO和Excel在数学建模中的应用/袁新生,邵大宏,郁时炼主编.

—北京:科学出版社,2007

ISBN 978-7-03-017981-4

I. L… II. ①袁… ②邵… ③郁… III. 数学模型—建立模型—应用软件, LINGO, Excel IV. O22-39

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 103847 号

责任编辑:陈玉琢 贾瑞娜/责任校对:包志虹

责任印制:安春生/封面设计:王 浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

丽源印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007 年 1 月第 一 版 开本: B5 (720×1000)

2007 年 1 月第一次印刷 印张: 16

印数: 1—3 000 字数: 303 000

定价: 36.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈路通〉)

前 言

在科学和技术发展的过程中,人们用建立数学模型的办法解决需要寻求数量规律的现实问题,取得了许多成果.在高科技,特别是计算机技术迅速发展的今天,计算和建模更成了数学向科学技术转化的主要途径.数学建模是联系数学和实际问题的桥梁,是数学在各个领域广泛应用的具体实现.数学建模在科学技术发展中的重要作用受到了人们的普遍重视,成为现代科技工作者必备的重要能力之一.

我国自 1992 年开始举办全国大学生数学建模竞赛,并成为国家教育部组织的全国大学生四项学科竞赛之一,是全国高校规模最大、参与院校最多、影响面最广的一项课外科技竞赛活动,受到了大学生、教师和教育工作者的广泛欢迎.通过赛前培训和参赛,使学生学到了更多东西,拓宽了知识面,提高了运用所学知识来分析和解决实际问题的能力,从而达到培养综合素质和创新意识的目的.

用数学模型来解决实际问题,不仅要对实际问题有深刻的理解,能建立起合适的数学模型,还依赖于对模型进行求解的计算技术.对于大型复杂的优化模型,往往由于变量数目大、约束条件类型众多或形式复杂,使得模型的求解需要花费大量的时间和精力,而 LINGO 软件的使用能够使人们从繁重的编程工作中解放出来.

LINGO 是美国 LINDO 系统公司(Lindo System Inc.)推出的求解最优化问题的专业软件包,它在求解各种大型线性、非线性和整数规划方面具有明显的优势. LINGO 软件内置建模语言,提供几十个内部函数,从而能以较少语句,较直观的方式描述较大规模的优化模型.它的运行速度快,计算结果可靠,能方便地与 Excel、数据库等其他软件交换数据, LINGO 是解决优化问题的最佳选择.

Excel 是 Microsoft Office 套件中的电子表格软件,它内置了数百个函数供用户调用,还允许用户根据自己的需要随意定义自己的函数,Excel 无需编程就能够实现其他软件需要编程才能完成的复杂计算,能进行各种数据的统计、运算、处理和绘制统计图形.在实际问题中,经常会遇到大量数据需要处理,还有各种统计图表需要绘制. Excel 擅长数据分析和统计,用它来处理数据能够节省大量时间,提高效率.

本书介绍了 LINGO 的基础知识和用 Excel 处理数据的方法,重点是这两种软件在数学建模中的应用,通过丰富的实例介绍了把实际问题转化为数学模型的方法,以及综合运用 LINGO 等软件来求解数学模型的手段.

书的主要特点是:

1. 有些章节的内容曾作为论文在相关学术刊物上发表过, 所有内容均有较高学术价值.

2. 所有程序都经过反复上机运算和优化, 都能可靠地运行.

3. 围绕优化模型的求解方法作了较深入的探讨, 突出 LINGO 在数学建模中的应用, 读者能从书中汲取到许多求解数学规划的技能.

4. 案例丰富、条理清晰、讲解透彻、文笔流畅、图文并茂.

本书由袁新生、邵大宏、郁时炼主编. 参加编写的人员有廖大庆、汪军、王晓燕、沐爱勤、段红梅. 由刘信斌主审.

编 者

2006 年 3 月

目 录

前言

第 1 章 LINGO 的基本用法	1
1.1 LINGO 入门	1
1.1.1 概况	1
1.1.2 LINGO 的基本用法	1
1.2 用 LINGO 编程语言建立模型	6
1.2.1 LINGO 模型的基本组成	6
1.2.2 LINGO 语言的优点	12
1.3 LINGO 的菜单	12
1.3.1 文件(File)菜单	12
1.3.2 编辑(Edit Menu)菜单	13
1.3.3 LINGO 菜单	15
1.3.4 窗口(Window)菜单	19
1.3.5 帮助(Help)菜单	22
1.4 LINGO 的参数设置	23
1.4.1 Interface(界面)选项卡	23
1.4.2 General Solver(通用求解器)选项卡	25
1.4.3 Linear Solver(线性求解器)选项卡	26
1.4.4 Nonlinear Solver(非线性求解器)选项卡	26
1.4.5 Integer Pre-Solver(整数预处理求解器)选项卡	27
1.4.6 Integer Solver(整数求解器)选项卡	28
1.4.7 Global Solver(全局最优求解器)选项卡	30
1.5 LINGO 的运算符和函数	32
1.5.1 LINGO 的常用运算符	32
1.5.2 数学函数	33
1.5.3 概率函数	34
1.5.4 集合操作函数	35
1.5.5 变量定界函数	38
1.5.6 文件输入输出函数	40
1.5.7 金融函数	40
1.5.8 结果报告函数	40

1.5.9 其他函数	41
1.6 几点补充说明	43
1.6.1 稠密集合与稀疏集合	43
1.6.2 数据段的几点说明	47
1.6.3 初始化段	49
1.6.4 模型的标题	49
1.7 LINGO 的典型应用举例	50
1.7.1 下料问题	50
1.7.2 配料问题	53
1.7.3 选址问题	55
1.7.4 指派问题	58
1.7.5 投资问题	60
1.7.6 装箱问题	60
1.8 用 LINGO 实现非线性曲线拟合	62
1.8.1 曲线拟合及最小二乘法	62
1.8.2 用 LINGO 求非线性曲线拟合的最小二乘解	62
习题一	64
第 2 章 LINGO 在图论和网络模型中的应用	70
2.1 最短路问题	70
2.1.1 图的基本概念	70
2.1.2 最短路问题	71
2.2 旅行售货商(TSP)模型	75
2.2.1 TSP 模型的数学描述	75
2.2.2 LINGO 程序设计	77
2.3 最小生成树和最优连线	77
2.3.1 把最优连线问题转化成整数规划	78
2.3.2 LINGO 程序设计	80
2.4 最大流问题	81
2.4.1 问题的描述	81
2.4.2 数学模型	82
2.4.3 最小费用最大流	84
习题二	85
第 3 章 用 LINGO 求解非线性规划和多目标规划	89
3.1 用 LINGO 求解非线性规划	89
3.1.1 飞行管理问题	89
3.1.2 火力发电厂购油计划的优化	94

3.2 LINGO 在多目标规划和最大最小化模型中的应用	100
3.2.1 多目标规划的常用解法	100
3.2.2 最大最小化模型	101
3.2.3 用 LINGO 求解多目标规划和最大最小化模型	101
习题三	108
第 4 章 LINGO 与外部文件之间的数据传递	109
4.1 通过 Windows 剪贴板传递数据	109
4.2 LINGO 与文本文件之间的数据传递	111
4.2.1 从文本文件读取数据	111
4.2.2 把数据(计算结果)写入文本文件	111
4.3 LINGO 与 Excel 文件之间的数据传递	113
4.3.1 从 Excel 文件中导入数据	113
4.3.2 将计算结果导出到 Excel 文件中	114
4.4 LINGO 与数据库的接口	119
4.4.1 LINGO 与 Access 数据库之间的数据传递	120
4.4.2 @ODBC 函数的使用格式	124
习题四	127
第 5 章 Excel 在数学建模中的应用	129
5.1 Excel 的数据处理功能	129
5.1.1 Excel 的函数	129
5.1.2 Excel 的数据分析功能	139
5.2 用 Excel 绘制图表	142
5.2.1 创建图表的步骤	143
5.2.2 编辑和修改图表	146
5.2.3 绘图实例——用 Excel 绘制任意一元函数的图像	153
5.3 总体分布的假设检验	157
5.3.1 χ^2 检验法的基本思路	157
5.3.2 方法步骤	158
5.4 回归分析	161
5.4.1 回归分析的概念	161
5.4.2 一元线性回归	162
5.4.3 多元线性回归	164
5.4.4 可化为线性的非线性回归	168
习题五	170
第 6 章 LINGO 在数学建模中的应用实例	174
6.1 最优渡江路线	174

6.1.1	问题的提出	174
6.1.2	基本假设	175
6.1.3	问题的分析	176
6.1.4	模型的建立和求解	176
6.2	钢管订购和运输计划的优化	183
6.2.1	问题的提出	183
6.2.2	符号说明	186
6.2.3	问题的分析	186
6.2.4	模型的建立	187
6.2.5	模型的求解	188
6.2.6	销价与产量上限的灵敏度分析	190
6.3	电力市场输电阻塞管理的优化	191
6.3.1	问题的提出	191
6.3.2	问题的分析	197
6.3.3	有功潮流的近似表达式	198
6.3.4	阻塞费用计算规则	201
6.3.5	问题(3)的模型	203
6.3.6	问题(4)的模型	205
6.3.7	问题(5)的模型	207
6.4	DVD 在线租赁的优化管理	214
6.4.1	问题的提出	214
6.4.2	基本假设	215
6.4.3	问题(1)的分析和解答	215
6.4.4	问题(2)的分析、建模和解答	218
6.4.5	问题(3)的分析和求解	224
6.5	露天矿生产车辆的优化安排	230
6.5.1	问题的提出	230
6.5.2	基本假设	233
6.5.3	符号说明	233
6.5.4	问题的分析	234
6.5.5	问题(1)的模型及求解	237
6.5.6	问题(2)的求解	245
	参考文献	247

第 1 章 LINGO 的基本用法

我们遇到的许多优化问题都可以归结为规划问题，如线性规划、非线性规划、二次规划、整数规划、动态规划、多目标规划等，当遇到变量比较多或者约束条件表达式比较复杂等情况时，想用手工计算来求解这类问题几乎是不可能的，编程计算虽然可行，但工作量大、程序长而繁琐，稍不小心就会出错，还可能需要花费大量的时间和精力。可行的办法是用现成的软件求解，LINGO 是专门用来求解各种规划问题的软件包，其功能十分强大，是求解优化模型的最佳选择。

1.1 LINGO 入门

1.1.1 概况

LINGO 是美国 LINDO 系统公司(Lindo System Inc)开发的求解数学规划系列软件中的一个(其他软件为 LINDO, GINO, What's Best 等)，它的主要功能是求解大型线性、非线性和整数规划问题，目前的版本是 V10.0。LINGO 分为 Demo、Solve Suite、Super、Hyper、Industrial、Extended 等六类不同版本(并有单机版和教学网络版的区分)，只有 Demo 版是免费的，其他版本需要向 LINDO 系统公司(在中国的代理商)购买，LINGO 的不同版本对模型的变量总数、非线性变量数目、整型变量数目和约束条件的数量作出不同的限制(其中 Extended 版本无限制)。

LINGO 的主要功能特色为：

- (1) 既能求解线性规划问题，也有较强的求解非线性规划问题的能力；
- (2) 输入模型简练直观；
- (3) 运行速度快、计算能力强；
- (4) 内置建模语言，提供几十个内部函数，从而能以较少语句，较直观的方式描述较大规模的优化模型；
- (5) 将集合的概念引入编程语言，很容易将实际问题转换为 LINGO 模型；
- (6) 能方便地与 Excel、数据库等其他软件交换数据。

1.1.2 LINGO 的基本用法

启动 LINGO 后，在主窗口上弹出标题为“LINGO Model-LINGO1”的窗口，称为模型窗口(通常称 LINGO 程序为“模型”)，如图 1.1.1 所示，用于输入模型，

可以在该窗口内用基本类似于数学公式的形式输入小型规划模型.

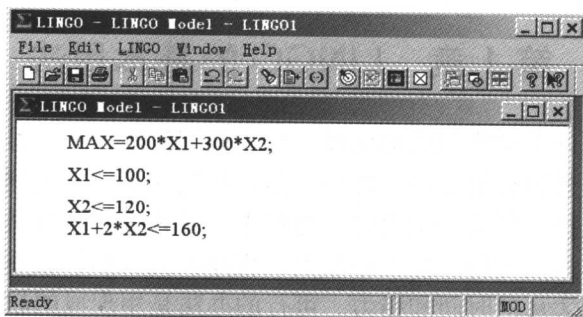


图 1.1.1 LINGO 的主窗口和模型窗口

通常, 一个优化模型由以下三部分所组成:

- (1) 目标函数. 一般表示成求某个数学表达式的最大值或最小值.
- (2) 决策变量. 目标函数值取决于哪些变量.
- (3) 约束条件. 对变量附加一些条件限制(通常用等式或不等式表示).

例 1.1.1 某工厂有两条生产线, 分别用来生产 M 和 P 两种型号的产品, 利润分别为 200 元/个和 300 元/个, 生产线的最大生产能力分别为每日 100 和 120, 生产线每生产一个 M 产品需要 1 个劳动日(1 个工人工作 8 小时称为 1 个劳动日)进行调试、检测等工作, 而每个 P 产品需要 2 个劳动日, 该厂工人每天共计能提供 160 劳动日, 假如原材料等其他条件不受限制, 问应如何安排生产计划, 才能使获得的利润最大?

解 设两种产品的生产量分别为 x_1 和 x_2 , 则该问题的数学模型为

目标函数 $\max z = 200x_1 + 300x_2$.

$$\text{约束条件} \quad \begin{cases} x_1 \leq 100, \\ x_2 \leq 120, \\ x_1 + 2x_2 \leq 160, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2. \end{cases} \quad (1.1.1)$$

在 Model 窗口内输入如下模型:

MAX=200*X1+300*X2;

X1<=100;

X2<=120;

X1+2*X2<=160;

注 LINGO 默认所有决策变量都非负, 因而变量非负条件可以不必输入.

选菜单 FileSave As(或按 F5)将输入的模型存盘, 默认文件格式的扩展名为 .lg4, 这是一种特殊的二进制格式文件, 保存了模型窗口中的所有文本和其他对象以及格式信息, 只有 LINGO 能读出它, 用其他系统打开这类文件时会出现乱码. 其他几种扩展名分别代表不同类型的文件, 见表 1.1.1.

表 1.1.1 LINGO 的文件类型

扩展名	文件类型
lng	纯文本格式模型文件, 不含格式(如字体、颜色等)信息
ldt	LINGO 数据文件
lrf	LINGO 命令脚本文件
lgr	用来存放 LINGO 的计算结果(solution report)

选 FilePrint(或按 F7)可以在打印机上输出该模型.

LINGO 的语法规定:

- (1) 求目标函数的最大值或最小值分别用 $\text{MAX}=\dots$ 或 $\text{MIN}=\dots$ 来表示;
- (2) 每个语句必须以分号 “;” 结束, 每行可以有多个语句, 语句可以跨行;
- (3) 变量名称必须以字母(A~Z)开头, 由字母、数字(0~9)和下划线所组成, 长度不超过 32 个字符, 不区分大小写;
- (4) 可以给语句加上标号, 例如[OBJ] $\text{MAX}=200*\text{X1}+300*\text{X2}$;
- (5) 以! 开头, 以 “;” 号结束的语句是注释语句;
- (6) 如果对变量的取值范围没有作特殊说明, 则默认所有决策变量都非负;
- (7) LINGO 模型以语句 “MODEL:” 开头, 以 “END” 结束, 对于比较简单的模型, 这两个语句可以省略.

选菜单 LingoSolve(或按 Ctrl+S), 或用鼠标点击 “求解” 按钮, 如果模型有语法错误, 则弹出一个标题为 “LINGO Error Message” (错误信息)的窗口, 指出在哪一行, 有怎样的错误, 每种错误都有一个编号, 具体含义见参考文献[1]. 改正错误以后再求解, 如果语法通过, LINGO 用内部所带的求解程序求出模型的解, 然后弹出一个标题为 “LINGO Solver Status” (求解状态)的窗口, 其内容为变量个数、约束条件个数、优化状态、非零变量个数、耗费内存、所花时间等信息(详见 1.3 节), 点击 Close 关闭该窗口, 屏幕上出现标题为 “Solution Report” (解的报告)的信息窗口, 显示优化计算的步数、优化后的目标函数值、列出各变量的计算结果, 本例的具体内容如下:

Global optimal solution found at iteration: 2

Objective value: 29000.00

Variable	Value	Reduced Cost
X1	100.0000	0.000000
X2	30.00000	0.000000
Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	29000.00	1.000000
2	0.000000	50.00000
3	90.00000	0.000000
4	0.000000	150.0000

该报告说明：运行 2 步找到全局最优解，目标函数值为 29000，变量值分别为 $X_1=100$ ， $X_2=30$ 。“Reduced Cost”的含义是缩减成本系数(最优解中变量的 Reduced Cost 值自动取零)，“Row”是输入模型中的行号，“Slack or Surplus”的意思为松弛或剩余，即约束条件左边与右边的差值，对于“ $\leq$ ”不等式，右边减左边的差值称为 Slack(松弛)，对于“ $\geq$ ”不等式，左边减右边的差值称为 Surplus(剩余)，当约束条件的左右两边相等时，松弛或剩余的值为零，如果约束条件无法满足，即没有可行解，则松弛或剩余的值为负数。“Dual Price”的意思是影子价格，上面报告中 Row 2 的松弛值为 0，意思是说第二行的约束条件，即第一条生产线最大生产能力已经达到饱和状态(100 个)，影子价格为 50，含义是：如果该生产线最大生产能力增加 1，能使目标函数值，即利润增加 50；报告中 Row 3 的松弛值为 90，表示按照最优解安排生产($X_2=30$)，则第三行的约束条件，即第二条生产线的最大生产能力 120 剩余了 90，因此增加该生产线的最大生产能力对目标函数的最优值不起作用，故影子价格为 0；

以上结果可以保存到文件中(扩展名为.lgr)，也可以通过打印机打印出来。

例 1.1.2 基金的优化使用(2001 年数学建模竞赛 C 题)。

假设某校基金会得到了一笔数额为 M 万元的基金，打算将其存入银行，校基金会计划在 n 年内每年用部分本息奖励优秀师生，要求每年的奖金额相同，且在 n 年末仍保留原基金数额。银行存款税后年利率见表 1.1.2。

表 1.1.2 银行存款税后利率表

存期	1 年	2 年	3 年	5 年
税后年利率/%	1.8	2.16	2.592	2.88

校基金会希望获得最佳的基金使用计划，以提高每年的奖金额，请在 $M=5000$

万元、 $n=5$ 年的情况下设计具体存款方案。

解 分析：假定首次发放奖金的时间是在基金到位后一年，以后每隔一年发放一次，每年发放的时间大致相同，校基金会希望获得最佳的基金使用计划，以提高每年的奖金额，且在 n 年末仍保留原基金数额 M ，实际上 n 年中发放的奖金总额全部来自于利息。如果全部基金都存为一年定期，每年都用到期利息发放奖金，则每年的奖金数为 $5000 \times 0.018 = 90$ 万元，这是没有优化的存款方案。显然，准备在两年后使用的款项应当存成两年定期，比存两次一年定期的收益高，以此类推。目标是合理分配基金的存款方案，使得 n 年的利息总额最多。

定义 收益比 $a = (\text{本金} + \text{利息}) / \text{本金}$ 。

于是存 2 年的收益比为 $a_2 = 1 + 2.16\% \times 2 = 1.0432$ 。按照银行存款税后利率表计算得到各存款年限对应的最优收益比见表 1.1.3。

表 1.1.3 各存款年限对应的最优收益比

存期年限	1 年	2 年	3 年	4 年(3+1 方式)	5 年
最优收益比	1.018	1.0432	1.07776	1.09715968	1.144

经分析得到两点结论：

- (1) 一次性存成最长期，优于两个(或两个以上)较短期的组合(中途转存)。
- (2) 当存款年限需要组合时，收益比与组合的先后次序无关。

建立模型 把总基金 M 分成 5+1 份，分别用 $x_1, x_2, \dots, x_6$ 表示，其中 $x_1, x_2, \dots, x_5$ 分别存成 1~5 年定期，到期后本息合计用于当年发放奖金， x_6 存 5 年定期，到期的本息合计等于原基金总数 M 。用 S 表示每年用于奖励优秀师生的奖金额，用 a_i 表示第 i 年的最优收益比。

目标函数是每年的奖金额最大，即 $\max S$ 。

约束条件有 3 个：①各年度的奖金数额相等；②基金总数为 M ；③ n 年末保留原基金总额 M 。

于是得到模型如下：

$$\begin{aligned}
 & \max S, \\
 & \text{s.t.} \begin{cases} a_i x_i = S, i = 1, 2, \dots, 5, \\ \sum_{i=1}^6 x_i = M, \\ a_5 x_6 = M. \end{cases} \quad (1.1.2)
 \end{aligned}$$

这是线性规划模型, 用 LINGO 软件求解, 令 $M=5000$, 编写程序如下:

```

MAX=S;           1.018*x1=S;       1.0432*x2=S;
1.07776*x3=S;    1.07776*1.018*x4=S;
1.144*x5=S;      1.144*x6=M;       M=5000;
x1+x2+x3+x4+x5+x6=M;

```

优化结果 求解得到优化结果: 目标函数值, 即每年度的奖金数额 $S=135.2227$ 万元, 存款方案, 即 $x_1, x_2, \dots, x_6$ 的值见表 1.1.4.

表 1.1.4 最优存款方案

变量	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
数值/万元	132.8317	129.6230	125.4664	123.2479	118.2016	4370.629

1.2 用 LINGO 编程语言建立模型

1.1 节介绍了 LINGO 的基本用法, 其优点是输入模型较直观, 一般的数学表达式无须作大的变换即可直接输入. 对于规模较小的规划模型, 用直接输入的方式是有利的, 但是, 如果模型的变量和约束条件个数都比较多, 若仍然用直接输入方式, 虽然也能求解并得出结果, 但是这种做法有明显的不足之处: 模型的篇幅很长, 不便于分析修改和扩展, 例如, 目标函数中有求和表达式 $\sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{20} c_{ij} x_{ij}$, 若

用直接输入的方式, 将有 200 个 c_{ij} 和 200 个 x_{ij} 相乘再相加, 需要输入长长一大串, 既不便于输入, 又不便于修改, 可读性较差. 幸好 LINGO 提供了建模语言, 能够用较少语句简单有效地表达上述目标函数(以及约束条件).

1.2.1 LINGO 模型的基本组成

LINGO 建模语言引入了集合的概念, 为建立大规模数学规划模型提供了方便. 用 LINGO 语言编写程序来表达一个实际优化问题, 称之为 LINGO 模型. 下面以一个运输规划模型为例说明 LINGO 模型的基本组成.

例 1.2.1 某公司有 6 个供货栈(仓库), 库存货物总数分别为 60, 55, 51, 43, 41, 52, 现有 8 个客户各要一批货, 数量分别为 35, 37, 22, 32, 41, 32, 43, 38. 各供货栈到 8 个客户处的单位货物运输价见表 1.2.1.

表 1.2.1 供货栈到客户的单位货物运价(元/每单位)

货栈 \ 客户	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8
W1	6	2	6	7	4	2	5	9
W2	4	9	5	3	8	5	8	2
W3	5	2	1	9	7	4	3	3
W4	7	6	7	3	9	2	7	1
W5	2	3	9	5	7	2	6	5
W6	5	5	2	2	8	1	4	3

试确定各货栈到各客户处的货物调运数量,使总的运输费用最小.

解 引入决策变量 x_{ij} , 代表从第 i 个货栈到第 j 个客户的货物运量. 用符号 c_{ij} 表示从第 i 个货栈到第 j 个客户的单位货物运价, a_i 表示第 i 个货栈的最大供货量, d_j 表示第 j 个客户的订货量.

目标函数是总运输费用最少.

约束条件有三条: ①各货栈运出的货物总量不超过其库存数; ②各客户收到的货物总量等于其订货数量; ③决策变量 x_{ij} 非负.

则本问题的数学模型为:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & z = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^8 c_{ij} x_{ij}, \\
 \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^8 x_{ij} \leq a_i, i=1,2,\dots,6, \\ \sum_{i=1}^6 x_{ij} = d_j, j=1,2,\dots,8, \\ x_{ij} \geq 0, i=1,2,\dots,6, j=1,2,\dots,8. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

1. 集合定义部分

LINGO 将集合(SET)的概念引入建模语言, 集合是一组相关对象构成的组合, 代表模型中的实际事物, 并与数学变量及常量联系起来, 是实际问题到数学的抽象. 例 1.2.1 中的 6 个仓库可以看成是一个集合, 8 个客户可以看成另一个集合.

每个集合在使用之前需要预先给出定义, 定义集合时要明确三方面内容: 集合的名称、集合内的成员(组成集合的个体, 也称元素)、集合的属性(可以看成是

与该集合有关的变量或常量, 相当于数组). 本例先定义仓库集合:

```
WH/W1..W6/:AI;
```

其中 WH 是集合的名称, W1..W6 是集合内的成员, “..” 是特定的省略号(如果不用该省略号, 也可以把成员一一罗列出来, 成员之间用逗号或空格分开), 表明该集合有 6 个成员, 分别对应于 6 个供货栈, AI 是集合的属性, 它可以看成是一个一维数组, 有 6 个分量, 分别表示各货栈现有货物的总数.

集合、成员、属性的命名规则与变量相同, 可按自己的意愿, 用有一定意义的字母数字串来表示, 式中 “/” 和 “/ : ” 是规定的语法规则.

本例还定义客户集合:

```
VD/V1..V8/:DJ;
```

该集合有 8 个成员, DJ 是集合的属性(有 8 个分量)表示各客户的需求量.

以上两个集合称为初始集合(或称基本集合, 原始集合), 初始集合的属性都相当于一维数组.

为了表示数学模型中从货栈到客户的运输关系以及与此相关的运输单价 c_{ij} 和运量 x_{ij} , 再定义一个表示运输关系(路线)的集合:

```
LINKS(WH,VD):C,X;
```

该集合以初始集合 WH 和 VD 为基础, 称为衍生集合(或称派生集合). C 和 X 是该衍生集合的两个属性. 衍生集合的定义语句有如下要素组成:

- (1) 集合的名称;
- (2) 对应的初始集合;
- (3) 集合的成员(可以省略不写明);
- (4) 集合的属性(可以没有).

定义衍生集合时可以用罗列的方式将衍生集合的成员一一列出来, 如果省略不写, 则默认衍生集合的成员取它所对应初始集合的所有可能的组合, 上述衍生集合 LINKS 的定义中没有指明成员, 而它对应的初始集合 WH 有 6 个成员, VD 有 8 个成员, 因此 LINKS 成员取 WH 和 VD 的所有可能组合, 即集合 LINKS 有 48 个成员, 48 个成员可以排列成一个矩阵, 其行数与集合 WH 的成员个数相等, 列数与集合 VD 的成员个数相等. 相应地, 集合 LINKS 的属性 C 和 X 都相当于二维数组, 各有 48 个分量, C 表示货栈 W_i 到客户 V_j 的单位货物运价, X 表示货栈 W_i 到客户 V_j 的货物运量.

本模型完整的集合定义为:

```
SETS:
```

```
WH/W1..W6/:AI;
```

```
VD/V1..V8/:DJ;
```

```
LINKS(WH,VD):C,X;
```


ENDSETS

注 集合定义部分以语句 SETS: 开始, 以语句 ENDSETS 结束, 这两个语句必须单独成一行. ENDSETS 后面不加标点符号.

2. 数据初始化(数据段)

以上集合中属性 X(有 48 个分量)是决策变量, 是待求未知数, 属性 AI、DJ 和 C(分别有 6, 8, 48 个分量)都是已知数, LINGO 建模语言通过数据初始化部分来实现对已知属性赋以初始值, 格式为:

DATA:

```
AI=60,55,51,43,41,52;
DJ=35,37,22,32,41,32,43,38;
C=6,2,6,7,4,2,5,9
  4,9,5,3,8,5,8,2
  5,2,1,9,7,4,3,3
  7,6,7,3,9,2,7,1
  2,3,9,5,7,2,6,5
  5,5,2,2,8,1,4,3;
```

ENDDATA

注 数据初始化部分以语句 DATA: 开始, 以语句 ENDDATA 结束, 这两个语句必须单独成一行. 数据之间的逗号和空格可以互相替换.

3. 目标函数和约束条件

目标函数表达式 $\min z = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^8 c_{ij} x_{ij}$ 用 LINGO 语句表示为:

MIN=@SUM(LINKS(I,J):C(I,J)*X(I,J));

式中, @SUM 是 LINGO 提供的内部函数, 其作用是对某个集合的所有成员, 求指定表达式的和, 该函数需要两个参数, 第一个参数是集合名称, 指定对该集合的所有成员求和, 如果此集合是一个初始集合, 它有 m 个成员, 则求和运算对这 m 个成员进行, 相当于求 $\sum_{i=1}^m$, 第二个参数是一个表达式, 表示求和运算对该表达式进行. 此处 @SUM 的第一个参数是 LINKS(I, J), 表示求和运算对衍生集合 LINKS 进行, 该集合的维数是 2, 共有 48 个成员, 运算规则是: 先对 48 个成员分别求表达式 $C(I, J)*X(I, J)$ 的值, 然后求和, 相当于求 $\sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^8 c_{ij} x_{ij}$, 表达式中的