



智慧的阶梯

初中数学

解题易错点剖析

马 飞 编著

- 贯彻新课程标准
- 燃起智慧火焰
- 激发浓厚兴趣
- 掌握思维窍门
- 步入成才阶梯



金盾出版社

JINDUN CHUBANSHE

智慧的阶梯
初中数学解题易错点剖析

马 飞 编著

金盾出版社

内 容 提 要

本书的特点在于错例与剖析、正解、启示并举,所选题目来自学生作业,或期中、期末、中考考试试卷,或来自全国各地的竞赛试卷,囊括了初中数学解题的全部易错点,具有广泛的代表性和典型性。通过剖析错例,指点学生如何分析题意,阐述正确的思维方法和技巧,给出正确解答。力求通过反、正两方面的剖析,使学生加深对数学知识的理解 and 应用,提高分析问题和解决问题的能力。

本书是你智慧的阶梯。

图书在版编目(CIP)数据

智慧的阶梯·初中数学解题易错点剖析/马飞编著. —北京:金盾出版社,2007.2

ISBN 978-7-5082-4471-6

I. 智… II. 马… III. 数学课—初中—解题 IV. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 005355 号

金盾出版社出版、总发行

北京太平路 5 号(地铁万寿路站往南)

邮政编码:100036 电话:68214039 83219215

传真:68276683 网址:www.jdcbs.cn

封面印刷:北京精彩雅恒印刷有限公司

正文印刷:北京金星剑印刷有限公司

装订:第七装订厂

各地新华书店经销

开本:850×1168 1/32 印张:9.875 字数:250 千字

2007 年 2 月第 1 版第 1 次印刷

印数:1-10000 册 定价:15.00 元

(凡购买金盾出版社的图书,如有缺页、
倒页、脱页者,本社发行部负责调换)

**金盾版教辅图书,科学实用,
物美价廉,欢迎选购**

高中物理知识结构图解(第三次修订的彩色版)	12.00 元
高考数学(文科)应试诀窍	28.50 元
高考数学(理科)应试诀窍	25.00 元
高考智取三关·数学	19.00 元
高考智取三关·物理	19.50 元
高考智取三关·化学	20.00 元
高考智取三关·生物	22.00 元
高考智取三关·理科综合	21.00 元
高考智取三关·语文	21.00 元
高考智取三关·英语	29.00 元
高考智取三关·政治	18.00 元
高考智取三关·历史	16.00 元
高考智取三关·地理	17.00 元
高考智取三关·文科综合	17.50 元
全国十年高考状元作文精析	15.50 元
中学语文学习指导	20.50 元
学生汉字图示速记手册	19.00 元
高考文言文优选精练	16.50 元
高考现代文语段优选精练	13.50 元
高考数学命题背景与解法指导	29.00 元
高考语文命题背景与备考指导	25.00 元
高考物理命题趋势与试题解析	7.00 元
高考数学选择题双解 100 例	4.00 元
高考数学解答题多解 125 例	13.00 元
智慧的阶梯·初中数学解题思维窍门	15.50 元
智慧的阶梯·初中数学策略开放题集锦	15.50 元

黄冈高考文科综合阶段复习新题解	22.00 元
黄冈名题详解精练新题典·初中几何	22.00 元
黄冈名题详解精练新题典·初中代数	17.50 元
黄冈名题详解精练新题典·初中物理	22.00 元
黄冈名题详解精练新题典·初中化学	20.00 元
黄冈名题详解精练新题典·高中数学	28.00 元
黄冈名题详解精练新题典·高中物理	19.50 元
黄冈名题详解精练新题典·高中化学	24.00 元
黄冈名题详解精练新题典·高中生物	18.00 元
黄冈名题详解精练新题典·理科综合	18.00 元
黄冈名题详解精练新题典·初中语文	14.00 元
黄冈名题详解精练新题典·初中英语	32.00 元
黄冈名题详解精练新题典·高中语文	29.00 元
黄冈名题详解精练新题典·高中英语	25.00 元
黄冈名题详解精练新题典·高中政治	16.00 元
黄冈名题详解精练新题典·高中历史	17.00 元
黄冈名题详解精练新题典·高中地理	18.00 元
黄冈名题详解精练新题典·文科综合	23.00 元
黄冈中考三级跳丛书·初中数学总复习	17.00 元
黄冈中考三级跳丛书·初中物理总复习	13.00 元
黄冈中考三级跳丛书·初中化学总复习	16.50 元
黄冈中考三级跳丛书·初中语文总复习	19.50 元
黄冈中考三级跳丛书·初中英语总复习	24.00 元
黄冈名师帮你学·七年级语文(上)	19.00 元
黄冈名师帮你学·八年级语文(上)	15.00 元
黄冈名师帮你学·九年级语文(上)	13.50 元
黄冈名师帮你学·九年级语文(下)	16.00 元

以上图书由全国各地新华书店经销。凡向本社邮购图书者,另加 10% 邮挂费。书价如有变动,多退少补。邮购地址:北京市丰台区晓月中路 29 号院金盾出版社邮购部,联系人:徐玉珏,邮政编码:100072,电话:(010)66886188,传真:(010)83219217。

作者简介

马飞,1961年生,陕西榆林市人,大学本科毕业,任多家报刊的特约撰稿人、专栏主持人、编辑、记者。已在《数学通报》等全国各类数学刊物上发表论文600余篇,出版《智慧的阶梯·初中数学解题思维窍门》等19部专著。在近20年的教学和科研生涯中,总结出一套科学实用的数学教与学的方法。已出版的《马飞数学教室》丛书,得到许多老师、学生和有关专家的广泛好评,省市报纸、电台、电视台曾多次报道其先进事迹,名字和学术业绩已被收入《世界名人录》。

前 言

也许你在为解题中出现这样或那样的错误而烦恼,那么,你就打开眼前的这本《初中数学解题易错点剖析》,它会让你豁然开朗!

本书为错解剖析类书籍之典范,通过对初中数学中的易错点举例进行剖析,指出错在哪里,原因是什么?还提出了纠正错误的方法,这样可以避免重蹈覆辙,帮助同学们更牢固地掌握初中数学的基本知识,更深刻地领悟一些基本思想和方法,真正能够“吃一堑,长一智”,从错误中悟出一些道理,起到“治病、预防、免疫”的作用,对全面提高你的数学素质与解题能力是大有裨益的。

最后,我们以德国著名作家哥德的一句名言作为结束语:

错误同真理的关系,就像睡梦同清醒的关系一样。一个人从错误中醒来,就会以新的力量走向真理。

作者

目 录

第一章 有理数	(1)
第二章 代数式	(26)
第三章 整式的加减	(35)
第四章 一元一次方程	(46)
第五章 二元一次方程组	(63)
第六章 一元一次不等式和一元一次不等式组	(79)
第七章 整式的乘除	(92)
第八章 因式分解	(105)
第九章 分 式	(113)
第十章 二次根式	(136)
第十一章 一元二次方程	(152)
第十二章 函数及其图象	(175)
第十三章 概率与统计	(195)
第十四章 几何入门	(208)
第十五章 三角形	(222)
第十六章 四边形	(247)
第十七章 相似形	(262)
第十八章 解直角三角形	(273)
第十九章 圆	(285)
参考答案与提示	(297)
附录:怎样避免或者减少解题错误	(305)

 第一章 有理数

【例1】 以下是有理数概念中的常见错误,请大家指出错误所在,并予以纠正.

- (1)最小的自然数是1;
- (2)最小的整数是1;
- (3)绝对值最小的整数是-1;
- (4)一个有理数的倒数等于这个数本身,则这个数是1;
- (5)一个有理数的绝对值等于这个数本身,则这个数是正数;
- (6)一个有理数的平方等于它本身,这个数是1;
- (7)一个数的立方等于它本身,这个数是1和-1;
- (8)一个有理数的相反数和它的绝对值都不可能相等;
- (9)若两个有理数互为相反数,则这两个数互为倒数;
- (10)若两个数的绝对值相等,那么这两个有理数也相等.

剖析 (1)在小学里,自然数指的是1,2,3,4,5,……其中不包括0.而现在的中学教材中,规定“0”也是自然数.这就是说,非负整数都是自然数.

对于0是不是自然数历来存在两种规定,我国过去的大、中、小学教科书中,都规定“0”不是自然数.为什么现在的中学教材中规定“0”也是自然数呢?这是因为大多数国家的教科书中,都规定了“0”是自然数,为了方便与国际上的交流,我国曾在1993年12月27日发布,从1994年7月1日起实施的《中华人民共和国国家标准——量和单位》中规定:“0”是自然数.因此,2000年后出版的初、高中教科书中,都规定“0”是自然数.对初中生来说,应该遵照这个新规定.

本题的正确说法应该是:(1)最小的自然数是0.

(2)整数包括正整数,0,负整数,所以说不存在最小整数的.
正确说法:最小的整数不存在.

(3)绝对值最小的整数是0.

(4)-1的倒数也等于-1.正确说法:一个有理数的倒数等于这个数本身,则这个数是1和-1.

(5)0的绝对值是0,所以上述说法漏掉了“0”.正确说法:一个有理数的绝对值等于这个数本身,这个数是0和正数.

(6)0的平方等于0,上面说法漏掉了“0”.正确说法:一个有理数的平方等于它本身,这个数是0和1.

(7)0的立方也等于0.正确说法:一个数的立方等于它本身,这个数是1,-1和0.

(8)产生错误的原因,一是误认为一个有理数 a 的相反数 $-a$ 总是负数,二是误认为 $|a|=a$,因而得到 $|a| \neq -a$ 的错误结论.事实上,-2的相反数是2,而 $|-2| = -(-2) = 2$,所以-2的相反数和它的绝对值是相等的.正确说法:任何一个有理数的相反数和它的绝对值不一定相等.

(9)2与-2互为相反数,2与-2显然不互为倒数.正确说法:略.

(10) $|-2| = |2|$,但 $-2 \neq 2$.正确说法:若两个数的绝对值相等,那么这两个数相等或互为相反数.

► 启示 数的概念是不断扩展的,每次新数的出现,往往都是由于生产、生活实际的需要,以及数学学科本身的需要而产生的.

引进负数以后,使数的概念得以扩展,实现了算术数到有理数的飞跃,许多小学形成的认识被推翻了:(1)“+”和“-”除了仍表示运算符号外,还可以看作是一个数的性质符号;(2)减法可以转化为加法.在小学里,加法与减法是两回事,但引进负数后,减法就不再作为独立的运算而存在,而是把减法转化为加法;(3)原来的

一些结论不再成立,如“差一定小于(或等于)被减数”这个结论就不是永远正确了;(4)数“0”被赋予了新的含义,具有独特的性质,思考有关问题要全面,否则的话,极易掉入“0”设置的陷阱.

【例2】 什么叫数轴?试用图表示出来.

❖ 错解 数轴就是一条带有箭头和长度单位的直线.如图 1-1.



图 1-1

❖ 剖析 规定了原点、正方向和单位长度的直线叫数轴.这里的“原点”、“正方向”和“单位长度”是构成数轴缺一不可的三个条件.上面解答中,第一是缺少原点,通常是画出一条直线后,在上面任取一点 0 作为原点,用这点表示数零;第二,带箭头的说法不明确、不科学,应当说规定了这条直线的—个方向为正方向;第三,不是长度单位,而是单位长度.长度单位通常指厘米、米、千米、海里、英里等,而单位长度则是任意取定长度的一条线段,把它作为量度另一条线段的一个单位,这任意取定的线段的实际长度可能是 0.5 厘米,1 厘米,2.5 厘米等.

❖ 正解 在一条直线上规定了原点、正方向、单位长度,这样的图形叫做数轴.

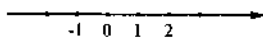


图 1-2

如图 1-2.

【例3】 两个互为相反数的数中,是否必有一个是正数,一个是负数?

❖ 错解 是.

❖ 剖析 零的相反数是零本身,所以认为两个互为相反数的数,一定是一正一负是错误的,这里忽略“零的相反数是零本身”.

❖ 正解 不一定.特别地,零的相反数是零本身,并非一个是正数,另一个是负数.

► 启示 数学中的每一个概念的定义都是严密的,一定要有一个严谨的学风.

【例4】 下列结论正确的是().

$$\text{A. } -\frac{2}{5} > -\frac{1}{5}$$

$$\text{B. } \frac{5}{7} > \frac{5}{8}$$

C. 比负数大的数都在原点的右边

D. 数轴上的点表示的数都是有理数

 **错解** 比负数大的数是正数,而正数处于原点的右边,故选 C.

 **剖析** 上述解法中选 C,忽略了有理数分类中 0 的存在,也就是忽略了数轴上原点的意义.

 **正解** 选 B.

 **启示** 数轴是重要的数学工具,是它实现了数与形的第一次联姻,使数与直线上的点建立了对应关系,揭示了数与形的内在联系,并由此成为数形结合的基础,且使得抽象的数成为有“形”可依.

【例 5】 下面说法:①两个表示相反意义的数是相反数 ②符号不同的两数是相反数 ③任何一个数的相反数与这个数本身不相同 ④在数轴上,表示 $-a$ 的相反数的点一定在原点的左边.

其中正确的个数是().

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 0 个

 **错解** 因为①②的说法表述了相反的意义,故①②正确,选 B.

 **剖析** 相反数是体现两个数间关系的定义,强调“只有符号不同”.其本质特征:①两数符号相反;②两数除符号外的数字相同,二者缺一不可.由此可知①②都是错误的.③中忽略了 0 的相反数仍是 0.④中当 a 为负数或 0 时,数轴上表示 a 的点在原点左边或在原点上,故知④错.

 **正解** 选 D.

 **启示** “-”号除了作为运算符号外,还可以用来表示原数的

相反数,即是说在一个数前面添上“-”号即可得到原数的相反数,明白了这一点,有关相反数的错误就可避免了.关于相反数还可得,连续求两次相反数即回到原数本身,从而有,当一个数前面有偶数个负号时,即可去掉所有负号;一个数前面有奇数个负号时,保留一个负号,都不改变原数的大小.如, $-(-3)=3$, $-[-(-6)]=-6$.

【例6】 数轴上有一点到原点的距离是 $5\frac{1}{2}$,那么这个点表示的数是_____.

错解 $5\frac{1}{2}$.

剖析 此解忽略了原点的左边还有一个距离原点是 $5\frac{1}{2}$ 的点.

正解 $\pm 5\frac{1}{2}$.

【例7】 下面对有理数的分类正确吗?

有理数 $\begin{cases} \text{正有理数} \\ \text{负有理数} \end{cases}$

错解 正确.

剖析 上述分类漏掉了零,零既不是正数,也不是负数,是惟一的中性数.

正解 不正确.

【例8】 求绝对值不大于3的整数.

错解 0,1,2,3.

剖析 由于 $|-3|=|+3|=3$, $|-2|=|+2|=2$, $|-1|=|+1|=1$, $|0|=0$,所以上述解法漏掉了绝对值不大于3的负整数.

正解 0, ± 1 , ± 2 , ± 3 .

【例9】 计算 $(+25)+(-32)$.

错解 $(+25)+(-32)$

$$=32-25=7.$$

剖析 因为在进行运算时,没有先确定符号,以致出错.

正解 $(+25)+(-32)$

$$=-(32-25)=-7.$$

启示 解有理数计算题,一般要根据运算法则进行计算.如本题中,应按照“异号两数相加,取绝对值较大加数的符号,并用较大的绝对值减去较小的绝对值”.

【例10】 比较 $-\frac{2}{3}$ 与 $-\frac{3}{4}$ 的大小.

错解 $-\frac{3}{4} > -\frac{2}{3}.$

剖析 错解在于对比较两个负数大小的意义不清楚,把比较两个正数的大小的方法“迁移”到比较两个负数的大小上.其实,“两个负数,绝对值大的反而小”.

正解 $\because \left| -\frac{2}{3} \right| = \frac{2}{3} = \frac{8}{12},$
 $\left| -\frac{3}{4} \right| = \frac{3}{4} = \frac{9}{12},$

$$\text{又} \because \frac{8}{12} < \frac{9}{12},$$

$$\therefore -\frac{2}{3} > -\frac{3}{4}.$$

启示 这里是用绝对值比较法,还可用数轴法来比较,即正确用数轴上的点表示出数后,应用“数轴上点表示的数,右边的总比左边的大”进行比较.应当注意的是,两个负数的大小关系与它们的绝对值的大小关系正好相反.这就是说,进行负数大小比较时,思路要拐个弯,并且得到的结论与习惯性思维似乎有些悖论.如 $-3 < -2$ 不易让人接受,是因为总受着 $2 > 1$ 的习惯的影响.

【例 11】 出租车司机小李某天下午的营运全是在东西方向的人民大街上进行的,如果规定向东为正,向西为负,他这天下午行车里程表示如下:

$$+15, -2, +5, -1, +10, -3, -2, +12, +4, -5, +6.$$

(1)将最后一名乘客送到目的地时,小李距离下午出车时的出发点多远?

(2)若汽车耗油量为 a 升/千米,这天下午小李共耗油多少升?

错解 (1) $(+15) + (-2) + (+5) + (-1) + (+10) + (-3) + (-2) + (+12) + (+4) + (-5) + (+6) = 39.$

$\therefore$ 小李最后距出发点 39 千米.

(2) 共耗油 $39a$ 升.

剖析 本例上述解法中,(1)是正确的,此时已考虑了出租车行进方向;(2)的计算方法不对,计算耗油量只考虑出租车行驶的路程,必须把上述数据取绝对值求和.

正解 (2) $\because | +15 | + | -2 | + | +5 | + | -1 | + | +10 | + | -3 | + | -2 | + | +12 | + | +4 | + | -5 | + | +6 | = 65.$

$\therefore$ 这天下午共耗油 $65a$ 升.

► 启示 出租车沿一条笔直的大道上来回行驶,只改变车与出发点的位置,但无论怎么走都得耗油,故计算耗油量时,“+”、“-”号没有意义,这题也给我们一个启示:遇到实际问题时,要结合现实生活的具体情况加以考虑,不能仅从理论上去推断;数学知识的学习是建立在生活中,身边的许多问题都是理解数学和学习数学的源泉,不是空中楼阁.

【例 12】 下列说法中:①减去一个数等于加上这个数 ②零减去一个数,仍得这个数 ③互为相反数的两个数相减得零 ④有理数减法中,被减数不一定比减数或差大.其中错误的说法有 ().

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 0 个

 **错解** 选 D.

 **剖析** 解答者由于基础知识掌握不牢,又读题不清,审题不准,因而没看清问题中的错误说法. ①中应是加上这个数的相反数,所以①不对;②中应是等于这个数的相反数,所以②不对;③中,如 $3 - (-3) = 6$,所以③不对;④是正确的.

 **正解** 选 C.

> 启示 小学数学中,减数不大于被减数,这已让人们形成了习惯认识.但在有理数范围内,减数可以大于被减数,如 $2 - 3 = -1$.由此可见,初中阶段的数学学习,要十分注重与小学数学知识的衔接与区别,既要传承小学数学中的基础知识,也要明了新旧知识的不同,不能总被旧思维所左右,而影响对新知识的接受.

【例 13】 计算 $(-15) + (-9)$.

 **错解** $(-15) + (-9) = 24$.

 **剖析** 解答的错误是错选了性质符号,其原因是混淆了两负数的相加法则与相反数的求法,误以为出现两个负号就要“负负得正”.

 **正解** $(-15) + (-9) = -24$.

> 启示 进行有理数加法运算,熟练掌握法则是很重要的.具体运算时,要先考虑和的符号.

【例 14】 计算 $0 - (-11)$.

 **错解** $0 - (-11) = -11$.

 **剖析** 错误的原因是机械地模仿“一个数与零相加,其和仍得这个数”的结论,误认为“零减去一个数,仍得这个数”.

 **正解** $0 - (-11) = 0 + (+11) = +11$.

> 启示 进行有理数减法,切记其法则“减去一个数,等于加上这个数的相反数”.

【例 15】 计算 $-3\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2}$.

错解 $-3\frac{1}{2}-3\frac{1}{2}=0.$

剖析 上述解法混淆了性质符号与运算符号,犯了“一号两用”的错误,以为原式是 $-3\frac{1}{2}$ 减去 $-3\frac{1}{2}$,结果当然是零.

正解 $-3\frac{1}{2}-3\frac{1}{2}=-7.$

【例16】 计算 $(1\frac{2}{3}-2\frac{3}{4})+2\frac{3}{4}.$

错解 $(1\frac{2}{3}-2\frac{3}{4})+2\frac{3}{4}$
 $=1\frac{2}{3}-(2\frac{3}{4}+2\frac{3}{4})$
 $=1\frac{2}{3}-5\frac{1}{2}$
 $=-3\frac{5}{6}.$

剖析 上述解法的错误在于滥用了“加法结合律”,把 $-2\frac{3}{4}+2\frac{3}{4}$ 结合成 $-(2\frac{3}{4}+2\frac{3}{4})$,出现了括号里第二个加数的符号错误.

正解 $(1\frac{2}{3}-2\frac{3}{4})+2\frac{3}{4}$
 $=1\frac{2}{3}+(-2\frac{3}{4})+2\frac{3}{4}$
 $=1\frac{2}{3}+[(-2\frac{3}{4})+2\frac{3}{4}]$
 $=1\frac{2}{3}+0=1\frac{2}{3}.$

►启示 灵活应用加法运算律,可使过程简化,避免出错,这是初中生应具备的素质.解题时要认真观察题目特点,选取适当的简