福建名师 年度力作
闽派图书 独树一帜

2007最新版

布衣精英

GAOKAOZONGFUXI QUANFANGWEI DIANBOYUXUNLIAN

高考总复习 全方位 点拨与训练

总主编：严玉魁

数学

版社

布 衣 精 英 系 列

高考总复习全方位点拨与训练

数 学

总主编 严玉魁

本书编委会

本册主编：陈建国 陈 晨

本册副主编：郑 璋 吴庆铭

杨 升 许本华

中央民族大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高考总复习全方位点拨与训练. 数学/严玉魁主编.
北京：中央民族大学出版社. 2006.7
ISBN 7-81108-225-X

Ⅰ.高… Ⅱ.严… Ⅲ.数学课—高中—升学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第078706号

高考总复习全方位点拨与训练 · 数学

主　　编	严玉魁
责任编辑	吴　云
封面设计	布衣精英工作室
出 版 者	中央民族大学出版社 北京市海淀区中关村南大街27号　邮编：100081 电话：68472815（发行部）　传真：68932751（发行部） 68932218（总编室）　68932447（办公室）
发 行 者	全国各地新华书店
印 刷 者	福州荣欣彩色印刷有限公司
开　　本	787毫米×1092毫米　1/16　印张 213.75
字　　数	4760千字
版　　次	2006年7月第1版　2006年7月第1次印刷
书　　号	ISBN 7-81108-225-X/G·407
定　　价	385.20 元

目　录

高考总复习全方位点拨与训练·数学

第一章　集合与简易逻辑

第一节　集合

(一)知识整合

1. 集合的概念

(1)集合中元素特征:确定性,互异性,无序性;

(2)集合的分类:

①按元素个数分:有限集,无限集;

②按元素特征分:数集,点集. 如数集$\{y|y=x^2\}$表示非负实数集,点集$\{(x,y)|y=x^2\}$表示开口向上,以y轴为对称轴的抛物线;

(3)集合的表示法:

①列举法:用来表示有限集或具有显著规律的无限集,如$N_+=\{0,1,2,3,\cdots\}$;

②描述法;

③图示法

2. 两类关系

(1)元素与集合的关系,用$\in$或$\notin$表示;

(2)集合与集合的关系,用$\subseteq$,$\subsetneqq$,$=$表示,当$A\subseteq B$时,称A是B的子集;当$A\subsetneqq B$时,称A是B的真子集.

3. 集合运算

(1)交,并,补,定义:$A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$,$A\cup B=\{x|x\in A$,或 $x\in B\}$,$\complement_U A=\{x|x\in U$,且 $x\notin A\}$,集合U表示全集;

(2)运算律,如$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$,$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$等.

4. 空集

(1)空集$\varnothing$是指不含任何元素的集合,它是任何一个集合的子集,是任何一个非空集合的真子集;

(2)集合$\{\varnothing\}$不是空集;但$\varnothing\in\{\varnothing\}$、$\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$;$\varnothing\subsetneqq\{\varnothing\}$三种表示法都是对的

5. 基本结论

(1)若$A\subseteq B$,$B\subseteq C$,则$A\subseteq C$;若$A\subsetneqq B$,$B\subsetneqq C$;则$A\subsetneqq C$;

(2)若有限集A中有n个元素,则A的子集个数有2^n个;非空子集个数有2^n-1个;真子集有2^n-1个;

(3)$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$,$A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$

(4)$\mathrm{Card}(A\cup B)=\mathrm{Card}(A)+\mathrm{Card}(B)-\mathrm{Card}(A\cap B)$

(二)名师点拨

【题型之一】基本概念

解题点拨:本题型主要考查集合的基本概念,常用的解法为紧扣题意,并注意集合语言、数学语言之间的转换.

【例 1】已知集合$M=\{m|m=r+\frac{1}{6},r\in\mathbf{Z}\}$,$N=\{n|n=\frac{s}{2}-\frac{1}{3},s\in\mathbf{Z}\}$,$P=\{p|p=\frac{t}{2}+\frac{1}{6},t\in\mathbf{Z}\}$,则$M$、$N$、$P$满足关系　　(　　)

A. $M=N\subsetneqq P$　　B. $M\subsetneqq N=P$

C. $M\subsetneqq N\subsetneqq P$　　D. $N\subsetneqq P\subsetneqq M$

解析:$M=\{m|m=\frac{6r+1}{6},r\in\mathbf{Z}\}$,

$N=\{n|n=\frac{3s-2}{6}=\frac{3(n-1)+1}{6},s\in\mathbf{Z}\}$,

$P=\{p|p=\frac{3t+1}{6},t\in\mathbf{Z}\}$

由于$3(n-1)+1$和$3t+1$都表示被3除余1的整数,而$6r+1$表示被6除余1的整数,故$M\subsetneqq N=P$,应选B

解题小结:由于本题中$r,s,t\in\mathbf{Z}$,故有的同学会通过列举法观察三个集合之间的关系,这种解法虽然直观,但其停留在原始的归纳阶段,不能从理论上解决问题,可能产生判断

错误. 整数常见的分类有①分为两类:$2n$, $2n+1$ ($n\in\mathbf{Z}$) ②分为三类:$3n,3n+1,3n+2$ ($n\in\mathbf{Z}$)

【跟踪训练 1】已知全集 $S=\{1,3,x^3-x^2-2x\}$, $A=\{1,|2x-1|\}$如果$\complement_S A=\{0\}$,则这样的实数 x 是否存在? 若存在,求出 x,若不存在,说明理由.

【题型之二】基本运算和常用结论

解题点拨:本题型主要考查集合的基本运算,注意空集是一个特殊且重要的集合,它不含任何元素,在解题过程中极易被忽视.

【例 2】已知集合 $A=\{x|x^2+6x=0\}$, $B=\{x|x^2+3(a+1)x+a^2-1=0\}$,且 $A\cup B=A$,求实数 a 的值.

解析:$\because A=\{x|x^2+6x=0\}=\{0,-6\}$,由 $A\cup B=A$,

$\therefore B\subseteq A$

(1)当 $B=\varnothing$ 时,$x^2+3(a+1)x+a^2-1=0$ 中 $\Delta<0$

解得 $-\frac{13}{5}<a<-1$

(2)当 $B\neq\varnothing$ 时,

(Ⅰ)$B=A$,由根与系数的关系$\begin{cases}-3(a+1)=-6\\a^2-1=0\end{cases}$

解得 $a=1$,符合 $A=B$

(Ⅱ)若 $B\subsetneqq A$,则 $B=\{0\}$或$\{-6\}$,则 $x^2+3(a+1)x+a^2-1=0$ 中的 $\Delta=0$ 且有相等实根 0 或 -6

由$\Delta=0$得 $a=-1$ 或 $-\frac{13}{5}$,当 $a=-1$ 时,$B=\{0\}$;

当 $a=-\frac{13}{5}$时,$B=\{\frac{12}{5}\}$不合题意.

综上所述,实数 a 的取值范围是 $-\frac{13}{5}<a\leqslant -1$ 或 $a=1$

解题小结:遇到 $A\cup B=A$ 注意利用结论将其转化. 子集关系要注意对是否取空集进行讨论,这一点解题者往往容易疏忽.

【跟踪训练 2】设集合 $A=\{y|\frac{y+2}{y-5}\geqslant\frac{1}{2}\}$, $B=\{y|y=ax^2-6x+4a$, 其中 $a\neq0,x\in\mathbf{R}\}$, 已知 $B\subseteq A$,求实数 a 的取值范围.

【题型之三】元素个数问题

解题点拨:此类题以集合为背景,求集合的个数、集合中元素的个数等,常用的解法是①子集个数公式;②图示法等.

【例 3】设 S 为满足下列两个条件的实数所构成的集合:(1)S 内不含 1;(2) 若 $a\in S$,则 $\frac{1}{1-a}\in S$,解答下列问题:

(1)若 $2\in S$,则 S 中必有其他两个数,求出这两个数;

(2)求证:若 $a\in S$,则 $1-\frac{1}{a}\in S$

(3)在集合 S 中元素的个数能否只有一个?请说明理由.

解析:(1) $\because 2\in S$, $\therefore 1-\frac{1}{2}\in S$,即 $-1\in S$,

$\therefore \frac{1}{1-(-1)}\in S$,即$\frac{1}{2}\in S$

(2)证明: $\because a\in S$, $\therefore \frac{1}{1-a}\in S$,

$\therefore \frac{1}{1-\frac{1}{1-a}}=1-\frac{1}{a}\in S$

(3)(用反证法证明)假设 S 中只有一个元素,则

有 $a=\frac{1}{1-a}$，即 $a^2-a+1=0$ 方程无实数解，

$\therefore S$ 中不能只有一个元素.

解题小结：本题求解的关键是用好递推关系：若 $a\in S$，则 $1-\frac{1}{a}\in S$；对问题的思考，若从正面考虑有困难，可逆向，即正难则反.

【跟踪训练 3】已知集合 $A=\{x|ax^2+2x+1=0, a\in \mathbf{R}, x\in \mathbf{R}\}$ 中至多有一个元素，求 a 的取值范围.

【题型之四】可用数形结合解决的问题

解题点拨：这类问题一般把集合用数轴上的点集、坐标平面上的点集、角集、韦恩图表示等. 它们都体现了数形结合的思想方法.

【例 4】已知集合 $A=\{(x,y)|x^2+mx-y+2=0\}$，$B=\{(x,y)|x-y+1=0, 0\leqslant x\leqslant 2\}$，如果 $A\cap B\neq\varnothing$，求实数 m 的取值范围.

解析：由 $\begin{cases} x^2+mx-y+2=0, \\ x-y+1=0(0\leqslant x\leqslant 2), \end{cases}$ 得

$$x^2+(m-1)x+1=0 \quad ①$$

$\because A\cap B\neq\varnothing$，$\therefore$ 方程①在区间 $[0,2]$ 上至少有一个实数解.

首先，由 $\Delta=(m-1)^2-4\geqslant 0$，得 $m\geqslant 3$ 或 $m\leqslant -1$.

当 $m\geqslant 3$ 时，由 $x_1+x_2=-(m-1)<0$ 及 $x_1x_2=1$ 知，方程①只有负根，不符合要求；

当 $m\leqslant -1$ 时，由 $x_1+x_2=-(m-1)>0$ 及 $x_1x_2=1>0$ 知，方程①有两个互为倒数的正根. 故必有一根在区间 $(0,1]$ 内，从而方程①至少有一个根在区间 $[0,2]$ 内.

综上所述，所求 m 的取值范围是 $(-\infty,-1]$.

解题小结：如果目光总是停留在集合这一狭窄的知识范围内，此题的思维方法是很难找到的. 事实上，集合符号在本题中只起了一种"化妆品"的作用，它的实际背景是"抛物线 $x^2+mx-y+2=0$ 与线段 $x-y+1=0(0\leqslant x\leqslant 2)$ 有公共点，求实数 m 的取值范围". 这种数学符号与数学语言的互译，是考生必须具备的一种数学素质. 上述解法应用了数形结合的思想. 如果注意到抛物线 $x^2+mx-y+2=0$ 与线段 $x-y+1=0(0\leqslant x\leqslant 2)$ 的公共点在线段上，本题也可以利用公共点内分线段的比 λ 的取值范围建立关于 m 的不等式来解.

【跟踪训练 4】求 1 到 200 这 200 个数中既不是 2 的倍数，又不是 3 的倍数，也不是 5 的倍数的自然数共有多少个？

【题型之五】集合的应用

解题点拨：本题以集合和逻辑为背景，主要考查对数学符号语言的阅读、理解以及迁移转化的能力.

【例 5】已知集合 $A=\{t|t$ 使 $\{x|x^2+2tx-4t-3\neq 0\}=R\}$，集合 $B=\{t|t$ 使 $\{x|x^2+2tx-2t=0\}\neq\varnothing\}$，其中 x,t 均为实数.

(1)求 $A\cap B$；

(2)设 m 为实数，$g(m)=m^2-3$，求 $M=\{m|g(m)\in A\cap B\}$.

解析：(1)集合 A 实际上是：使得 $x^2+2tx-4t-3>0$ 恒成立的所有实数 t 的集合. 故令 $\Delta_1=(2t)^2-4(-4t-3)<0$，解得：$-3<t<-1$.

集合 B 实际上是：使得方程 $x^2+2tx-2t=0$

有解的所有实数 t 的集合. 故令 $\Delta_2=(2t)^2-4\cdot(-2t)\geq 0$,解得:$t\geq 0$ 或 $t\leq -2$

所以,$A=(-3,-1)$,$B=(-\infty,-2]\cup[0,+\infty)$,$A\cap B=(-3,-2)$

(2)设 $g(m)=u$,则问题(2)可转化为:已知函数 $u=g(m)$ 的值域($u\in(-3,-2)$),求其定义域. 令 $-3<m^2-3<-2$,可解得:$-1<m<0$ 或 $0<m<1$.

所以,$M=\{m|-1<m<0$ 或 $0<m<1\}$

解题小结:学习数学,需要全面的理解概念,正确地进行表述、判断和推理,这就离不开对逻辑知识的掌握和运用. 而集合作为近、现代数学的重要基础,集合语言、集合思想也已经渗透到数学的方方面面. 集合和简易逻辑,是学习、掌握和使用数学语言的基础.

【跟踪训练 5】设 $m\in\mathbf{R}$,集合 $A=\{(x,y)|y=-\sqrt{3}x+m\}$,$B=\{(x,y)|x=\cos\theta,y=\sin\theta,0<\theta<2\pi\}$. 若 $A\cap B=\{(\cos\theta_1,\sin\theta_1),(\cos\theta_2,\sin\theta_2),\theta_1\neq\theta_2\}$,求 m 的取值范围.

(三)解题规律

认识集合是解决集合问题的基础. 认识集合的基本方法是:从不同的角度去分析集合中的元素是什么,元素有何特性. 一般,我们常从代数或几何两个角度去认识一个集合. 这时集合可以看作方程的解集、函数的定义域、函数的值域,或数轴上的点集、坐标平面内的点集等. 这些常用集合的表示要熟练掌握. 数形结合是解决问题的常见的手段. 从不同的角度看问题,就会有不同的思路. 集合中经常利用数轴、韦恩图等图形来解决问题.

(四)名题精练

1. 已知集合 $M=\{(x,y)|(1,2)+k(3,4),k\in\mathbf{R}\}$,集合 $N=\{(x,y)|(-2,-2)+m(4,5),m\in\mathbf{R}\}$,则 $M\cap N=$ ( )

A. $\{(-2,-2)\}$ B. $\{(1,2),(-2,-2)\}$

C. $\{(4,2)\}$ D. $\{(1,2)\}$

2. 设全集为 U,在下列条件下,哪些是 $B\subseteq A$ 的充要条件?

①$A\cup B=A$,②$(\complement_U A)\cap B=\varnothing$,③$(\complement_U A)\subseteq(\complement_U B)$,④$A\cup(\complement_U B)=U$. 答案是(填序号)______.

3. 设函数 $f(x)=\lg\left(\dfrac{2}{x+1}-1\right)$ 的定义域为 A,$g(x)=\sqrt{(x-a)^2-1}$ 的定义域为 B,

(1)当 $a=1$ 时,求集合 $A\cap B$;

(2)若 $A\subsetneqq B$,求 a 的取值范围.

(五)基础检测

一、选择题

1.(06·广东省中山市高三上学期期末)已知集合 $A=\{0,2,3\}$,$B=\{x|x=ab,a、b\in A\}$,且 $a\neq b$,则 B 的子集的个数是 ( )

A. 4 B. 8 C. 16 D. 15

2. 已知全集 $U=\mathbf{R}$,集合 $M=\{x|x\geq 1\}$,$N=\{x|\dfrac{x+1}{x-2}\geq 0\}$,则 $\complement_U(M\cap N)$ ( )

A. $\{x|x<2\}$ B. $\{x|x\leq 2\}$

C. $\{x|-1<x\leq 2\}$ D. $\{x|-1\leq x<2\}$

3. 已知 $M=\{y|y=x+1\}$,$N=\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$,则集合 $M\cap N$ 中元素的个数 ( )

A. 0 B. 1 C. 2 D. 多个

4. 若 $I=\{(x,y)|x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$,$A=\{(x,y)|(x-1)^2+y^2$

$>16\}$, $B=\{(x,y)|y<x-1\}$则点集$\complement_I A\cap B$所在区域的面积是（　　）

A. 0　　B. 4π　　C. 8π　　D. 16π

5.（06·河北省保定市模拟）设集合$I=\{(x,y)|x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$，$M=\{(x,y)|m^{x+y-a}\geqslant 1\}$，$N=\{(x,y)|\log_m(x-y+b+1)<0\}$，（其中$0<m<1$），当$S(2,-1)\in N\cup(\complement_I M)$时$a$、$b$满足的条件是（　　）

A. $a<1$且$b<-4$　　B. $a\geqslant 1$且$b\leqslant -3$

C. $a\geqslant 1$或$b\geqslant -4$　　D. $a<1$或$b>-3$

二、填空题

6. 若非空集合$A=\{x|2a+1\leqslant x\leqslant 3a-5\}$，$B=\{x|3\leqslant x\leqslant 22\}$，则能使$A\subseteq A\cap B$成立的所有$a$的集合是________.

7.（06·广东佛山二模）设$A=\{1,2,3,4,5,6\}$，$B=\{1,3,5,7,9\}$，集合C是从$A\cup B$中任取2个元素组成的集合，则$C\subsetneqq A\cap B$的概率是________.

三、解答题

8. 已知集合$A=\{x|x^2-5x+6=0\}$，$B=\{x|mx+1=0\}$，且$A\cup B=A$，求实数m的值组成的集合.

9. 函数$f(x)=\sqrt{\dfrac{2-x}{x-1}}$的定义域为集合$A$，关于$x$的不等式$2^{2ax}<2^{a+x}(a\in\mathbf{R})$的解集为$B$，求使$A\cap B=A$的实数$a$的取值范围.

10. 若$A=\{x|x^2-x-2>0, x\in \mathrm{R}\}$，$B=\{x|2x^2+(5+2a)x+5a<0, x\in \mathrm{R}\}$,且$A\cap B\cap Z=\{-2\}$，其中$Z$为整数集,求实数$a$的取值范围.

第二节　绝对值不等式与一元二次不等式

(一)知识整合

1. 绝对值不等式

$|x|<a$ 与 $|x|>a(a>0)$ 型不等式 $|ax+b|<c$ 与 $|ax+b|>c(c>0)$ 型不等式的解法与解集：

不等式 $|x|<a(a>0)$ 的解集是 $\{x|-a<x<a\}$；

不等式 $|x|>a(a>0)$ 的解集是 $\{x|x>a$，或 $x<-a\}$；

不等式 $|ax+b|<c(c>0)$ 的解集为 $\{x|-c<ax+b<c\}(c>0)$；

不等式 $|ax+b|>c(c>0)$ 的解集为 $\{x|ax+b<-c$，或 $ax+b>c\}(c>0)$

2. 解一元一次不等式 $ax>b(a\neq0)$

① $a>0,\{x|x>\frac{b}{a}\}$　② $a<0,\{x|x<\frac{b}{a}\}$

3. 韦达定理

方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的二实根为 x_1、x_2，

则 $\Delta=b^2-4ac\geqslant0$ 且 $\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{b}{a}\\x_1x_2=\frac{c}{a}\end{cases}$

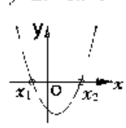
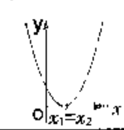
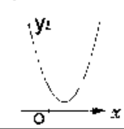
①两个正根，则需满足 $\begin{cases}\Delta\geqslant0\\x_1+x_2>0,\\x_1x_2>0\end{cases}$

②两个负根，则需满足 $\begin{cases}\Delta\geqslant0\\x_1+x_2<0,\\x_1x_2>0\end{cases}$

③一正根和一负根，则需满足 $\begin{cases}\Delta>0\\x_1x_2<0\end{cases}$

4. 一元二次不等式的解法步骤

对于一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0\ (a>0)$，设相应的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a>0)$ 的两根为 x_1、x_2 且 $x_1\leqslant x_2$，$\Delta=b^2-4ac$，则不等式的解的各种情况如下表：

	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$ 的图象	$y=ax^2+bx+c$ 	$y=ax^2+bx+c$ 	$y=ax^2+bx+c$ 
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$ 的根	有两相异实根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$	有两相等实根 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	无实根
$ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$ 的解集	$\{x|x<x_1$ 或 $x>x_2\}$	$\{x|x\neq-\frac{b}{2a}\}$	R
$ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$ 的解集	$\{x|x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

方程的根→函数草图→观察得解，对于 $a<0$ 的情况可以化为 $a>0$ 的情况解决.

5. 含参数的不等式 $ax^2+bx+c>0$ 恒成立问题 $\Leftrightarrow$ 含参不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 R；其解答分 $a=0$（验证 $bx+c>0$ 是否恒成立）、$a\neq0$（$a<0$ 且 $\Delta<0$）两种情况.

(二)名师点拨

【题型之一】含绝对值不等式的解法

解题点拨：本题型解题的基本思想是去掉绝对值符号，将其等价转化为一元一次或二次不等式(组)，使问题得解. 解含有绝对值符号的不等式的基本方法如下：若数 $x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n$ 分别使含有 $|x-x_1|$、$|x-x_2|\cdots\cdots$，$|x-x_n|$ 的代数式中相应的一个绝对值为零，则称 $x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n$ 为相应绝对值的零点，零点 $x_1,x_2\cdots\cdots,x_n$ 将数轴分成 $n+1$ 段，利用绝对值定义去绝对值符号，从而得到代数式的各段上的简化式，这种"零点分段法"化去绝对值符号的方法，是解决有关问题的简捷而有效的方法.

【例 1】解不等式：$|x-3|-|x+1|<1$.

解析(1)零点分段讨论法

①当 $x<-1$ 时，$x-3<0$，$x+1<0$

$\therefore -(x-3)+(x+1)<1 \quad \therefore 4<1 \Rightarrow x\in\varnothing$

②当 $-1\leqslant x<3$时

$\therefore -(x-3)-(x+1)<1 \Rightarrow x>\frac{1}{2}$，$\therefore \{x|\frac{1}{2}<x<3\}$

③当 $x\geqslant 3$ 时

$(x-3)-(x+1)<1 \Rightarrow -4<1 \Rightarrow x\in \mathbf{R} \quad \therefore \{x|x\geqslant 3\}$

综上，原不等式的解集为$\{x|x>\frac{1}{2}\}$.

也可以这样写：

解析：原不等式等价于

①$\begin{cases}x<-1\\-(x-3)+(x+1)<1\end{cases}$或②$\begin{cases}-1\leqslant x<3\\-(x-3)-(x+1)<1\end{cases}$

或③$\begin{cases}x\geqslant 3\\(x-3)-(x+1)<1\end{cases}$，

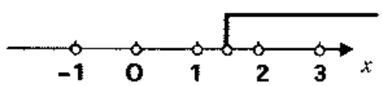
解①的解集为$\varnothing$，②的解集为$\{x|\frac{1}{2}<x<3\}$，

③的解集为$\{x|x\geqslant 3\}$，

$\therefore$ 原不等式的解集为$\{x|x>\frac{1}{2}\}$.

解析(2)数形结合

从形的方面考虑，不等式 $|x-3|-|x+1|<1$ 表示数轴上到 3 和 -1 两点的距离之差小于 1 的点.



$\therefore$ 原不等式的解集为$\{x|x>\frac{1}{2}\}$

解题小结：此不等式可称为多项含绝对值不等式，关键是利用绝对值的代数定义去掉绝对值. 这种不等式的解法一般是找零点分段讨论法.

【跟踪训练 1】已知 $a>0$，不等式 $|x-4|+|x-3|<a$ 在实数集 R 上的解集不是空集，求 a 的取值范围.

【题型之二】一元二次不等式的解法

解题点拨：本题型是根据二次函数，二次方程有关知识分析得出的，利用二次函数图象的直观性研究一元二次函数的解集及其变化，以及含字母参数的问题的讨论，渗透数形结合、函数方程、分类讨论等基本数学思想，应引起足够的重视.

【例 2】解关于 x 的不等式 $a^2x+b^2(1-x)\geqslant[ax+b(1-x)]^2$，$(a\neq b)$

解析：原不等式化为

$(a^2-b^2)x+b^2\geqslant(a-b)^2x^2+2(a-b)bx+b^2$

$\Rightarrow(a-b)^2(x^2-x)\leqslant 0$

$\because a\neq b \quad \therefore (a-b)^2>0$

$\therefore x^2-x\leqslant 0$

故原不等式的解集为$\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$

解题小结：这是关于 x 的一元二次不等式，将其“标准化”即转化为 $Ax^2+Bx+C\leqslant 0$ $(A\neq 0)$. 解题思维方向的确定，有助于形成解题过程. 注意：①从“模型识别”到“标准化”化归，对许多数学问题的求解具有一般的指导意义. 在解不等式时要讨论不等式两边所同乘、除的代数式值的正负. ②本题的实质是：已知 $a,b\in\mathbf{R}$，$0<\lambda<1$，求证：$a^2\lambda+b^2(1-\lambda)\geqslant[a\lambda+b(1-\lambda)]^2$

【跟踪训练 2】解关于 x 的不等式 $x^2-5ax+6a^2>0$

【题型之三】含参数的不等式$ax^2+bx+c>0$恒成立问题

解题点拨：不等式$f(x)>a$恒成立等价于$f(x)_{min}>a$；不等式$f(x)<a$恒成立等价于$f(x)_{max}<a$. 据此，可将恒成立的不等式问题转化为求函数的最大或最小值问题，从而使问题获解的方法.

【例3】已知不等式$2x-1>m(x^2-1)$

(1)若对于所有实数x不等式恒成立，求m的取值范围；

(2)若对满足$-2\leqslant m\leqslant 2$的一切m都成立，求实数x的取值范围.

解析：(1)原不等式等价于：$mx^2-2x+(1-m)<0$对$x\in \mathbf{R}$成立，

当且仅当$\begin{cases} m<0 \\ \Delta=4-4m(1-m)<0 \end{cases}$，解得$m\in\varnothing$

(2)设$f(m)=(x^2-1)m-(2x-1)$，则可转化为函数$f(m)$在区间$[-2,2]$上的最大值小于零，而$f(m)$是"一次函数"或"常数函数"，其最值在区间端点取得，故$f(-2)<0$且$f(2)<0$，解之得，x的取值范围是$(\frac{\sqrt{7}-1}{2},\frac{\sqrt{3}+1}{2})$.

解题小结：若将原问题转化为集合$\{-2,2\}$是关于m的不等式的解集的子集，则不可避免地要分类讨论. $ax+b>0$在$[m,n]$上恒成立$\Leftrightarrow\begin{cases} am+b>0 \\ an+b>0 \end{cases}$

【跟踪训练3】若不等式$x^2-m(4xy-y^2)+4m^2y^2\geqslant 0$对一切非负实数$x$、$y$恒成立，试求实数$m$的取值范围.

【题型之四】绝对值不等式与一元二次不等式的应用

解题点拨：绝对值不等式与一元二次不等式是数学的解题工具，解题中遇到绝对值结构与二次式结构应该联想到相关结论灵活解题.

【例4】设$0<a\leqslant\frac{5}{4}$，若满足不等式$|x-a|<b$的一切实数x，亦满足不等式$|x-a^2|<\frac{1}{2}$求正实数b的取值范围.

解析：此例看不出明显的恒成立问题，我们可以设法转化：

设集合$A=\{x|\ |x-a|<b\}=(a-b,a+b)$，

$$B=\{x|\ |x-a^2|<\frac{1}{2}\}=(a^2-\frac{1}{2},a^2+\frac{1}{2})$$

由题设知$A\subseteq B$，则：$\begin{cases} a-b\geqslant a^2-\frac{1}{2} \\ a+b\leqslant a^2+\frac{1}{2} \end{cases}$

于是得不等式组：$\begin{cases} b\leqslant -a^2+a+\frac{1}{2} \\ b\leqslant a^2-a+\frac{1}{2} \end{cases}(0<a\leqslant\frac{5}{4})$

又$-a^2+a-\frac{1}{2}=-(a-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$，最小值为$\frac{3}{16}$；

$a^2-a+\frac{1}{2}=-(a-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}$，最小值为$\frac{1}{4}$；

$\therefore\ b\leqslant\frac{3}{16}$，

即b的取值范围是$(0,\frac{3}{16}]$

解题小结：集合A上恒成立的不等式意即不等式的解集以A为子集. 据此，求出不等式的解集并研究集合间的包含关系，进而求出参数取值范围的方法.

【跟踪训练4】已知函数$f(x)=ax^2+bx+c$的图象过点$(-1,0)$，是否存在常数a、b、c，使不等式$x\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{2}(1+x^2)$对一切实数$x$都成立？

(三)解题规律

关于解不等式.以熟练掌握一元二次不等式及可化为一元二次不等式的综合题型为目标,突出灵活转化,突出分类讨论.解不等式往往带有字母、需要讨论,还需要掌握转化、数形结合等方法以及函数与方程的思想和八种常见不等式的一般解法.在解不等式时,需对不等式进行必要的变形,要注意不等式的同解性,即注意保持字母的允许值范围不发生变化.

(四)名题精练

1.若不等式 $ax^2+x+a<0$ 的解集为 $\varnothing$,则实数 a 的取值范围　　(　　)

A. $a\leqslant -\frac{1}{2}$ 或 $a\geqslant \frac{1}{2}$　　B. $a<\frac{1}{2}$

C. $-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant \frac{1}{2}$　　D. $a\geqslant \frac{1}{2}$

2.若对于任意 $x\in \mathbf{R}$,都有 $(m-2)x^2-2(m-2)x-4<0$ 恒成立,则实数 m 的取值范围是________.

3.已知适合不等式 $|x^2-4x+p|+|x-3|\leqslant 5$ 的 x 的最大值为3,求 p 的值.

(五)基础检测

一、选择题

1.(06·杭州市高三第一次模拟卷)不等式 $|x+3|>x+3$ 的解是　　(　　)

A. $x>0$　B. $x<0$　C. $x<-3$　D. $x\leqslant -3$

2.(06·南通市高三第一次调研)若不等式 $|8x+9|<7$ 和不等式 $ax^2+bx-2>0$ 的解集相等,则实数 a、b 的值为　　(　　)

A. $a=-8,b=-10$　　B. $c=-4,b=-9$

C. $a=-1,b=9$　　D. $a=-1,b=2$

3.(06·华中师大一附中高考适应性考试)在 $\mathbf{R}$ 上定义运算 $\otimes$: $x\otimes y=x(1-y)$,若不等式 $(x-a)\otimes(x+a)<1$ 对任意实数 x 都成立,则实数 a 的取值范围为　　(　　)

A. $(-\infty,-\frac{1}{2})$　　B. $(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$

C. $(\frac{3}{2},1)$　　D. $(1,+\infty)$

4.不等式组 $\begin{cases}|x-2|<2,\\ \log_2(x^2-1)>1\end{cases}$ 的解集是　　(　　)

A. $(0,\sqrt{3})$　　B. $(\sqrt{3},2)$

C. $(\sqrt{3},4)$　　D. $(2,4)$

5.某地2004年第一季度应聘和招聘人数排行榜前5个行业的情况列表如下:

行业名称	计算机	机械	营销	物流	贸易
应聘人数	215 830	200 250	154 676	74 570	65 280
行业名称	计算机	营销	机械	建筑	化工
应聘人数	124 620	102 935	89 115	76 518	70 436

若用同一行业中应聘人数与招聘人数比值的大小来衡量该行业的就业情况,则根据表中数据,就业形势一定是　　(　　)

A.计算机行业好于化工行业

B.建筑行业好于物流行业

C.机械行业最紧张

D.营销行业比贸易行业紧张

二、填空题

6.(06·重庆市重点中学高考最后演练卷)已知

函数 $f(x)=\begin{cases}2 & (x\geq 0)\\ -2 & (x<0)\end{cases}$，则不等式 $x+(x-1)\cdot f(x+1)\leq 4$ 的解集是 ________

7. (06·辽西十三校高三联考)以下四个命题：

(1) $f(x+2)=f(4-x)$，则 $y=f(x)$ 关于 $x=3$ 对称.

(2) $y=f(x+2)$ 与 $y=f(4-x)$ 关于 $x=3$ 对称.

(3) $|x|+|x-1|<a$ 的解集为 $\varnothing$ 的充要条件是 $a<1$.

(4) $(a-2)x^2+(a-2)x+1>0$ 的解集为 R 的充要条件是 $2<a<6$.

其中正确的命题是 __________(填序号).

三、解答题

8. 关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集为 $\{x|x<\alpha$ 或 $x>\beta\}$，$(\alpha<\beta<0)$，求不等式 $ax^2-bx+c>0$ 的解集.

9. 解关于 x 的不等式 $2+a<a|x-1|$.

10. 某段城铁线路上依次有 A、B、C 三站，$AB=5$km，$BC=3$km，在列车运行时刻表上，规定列车 8 时整从 A 站发车，8 时 07 分到达 B 站并停车 1 分钟，8 时 12 分到达 C 站.在实际运行中，假设列车从 A 站正点发车，在 B 站停留 1 分钟，并在行驶时以同一速度 $v$km/h 匀速行驶，列车从 A 站到达某站的时间与时刻表上相应时间之差的绝对值称为列车在该站的运行误差.

(1)分别写出列车在 B、C 两站的运行误差；

(2)若要求列车在 B，C 两站的运行误差之和不超过 2 分钟，求 v 的取值范围.