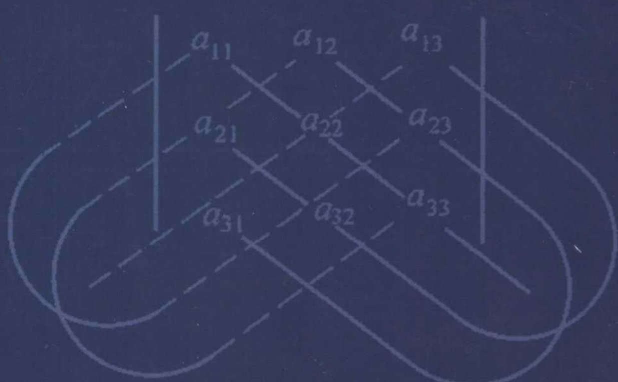
应用数学

YINGYONG SHUXUE

主 编 王东红 耿悦敏



华南理工大学出版社

应用数学

应 用 数 学

主编　王东红　耿悦敏
主审　徐振昌

华南理工大学出版社
·广州·

图书在版编目（CIP）数据

应用数学/王东红，耿悦敏主编 .—广州：华南理工大学出版社，2007.2
ISBN 978-7-5623-2552-9

Ⅰ.应… Ⅱ.①王…②耿… Ⅲ.应用数学-高等学校-教材 Ⅳ.O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 008786 号

总 发 行：华南理工大学出版社（广州五山华南理工大学 17 号楼，邮编 510640）
营销部电话：020－87113487　87110964　87111048(传真)
E-mail：scutc13@scut.edu.cn　　http://www.scutpress.com.cn
责任编辑：吴兆强
印 刷 者：湛江日报社印刷厂
开　　本：787mm×1092mm　1/16　**印张**：15.25　**字数**：372 千
版　　次：2007 年 2 月第 1 版　2007 年 2 月第 1 次印刷
印　　次：1～3 000 册
定　　价：27.00 元(含习题解答)

前　　言

本教材是为了适应高等职业技术学院培养高等技术应用型人才的需要，以及根据我院相应专业课程对数学课的要求而编写的。全书内容包括线性代数、概率论基本知识和数理统计初步。

在编写过程中，本着以应用为目的，力求满足专业发展的需要，以必需、够用为度的原则，侧重加强基础知识，减少理论证明，通过几何直观和具体实例来阐明理论，注重培养学生的分析问题和解决问题的能力。本教材重视理论联系实际，内容通俗易懂，做到有针对性和实用性，尽力体现高职高专数学课的特色。

本书每章都配有习题，并有一本与之完全配套的内容详尽的《应用数学习题解答》，以方便学生在学习过程中参考，提高学生的学习效率。同时，也节省教学时间，缓解数学课时偏紧的难题。

本教材的基本教学时数为 70 学时。

本书由广东交通职业技术学院的王东红、耿悦敏主编，敖屹兰参编，由徐振昌教授主审，全书框架结构安排、定稿由敖屹兰教授承担。

本书在编写过程中得到广东交通职业技术学院领导的大力支持，在此表示衷心的感谢。

由于水平有限，书中难免存在一些缺点和错误，敬请读者批评指正。

编　者

2006 年 11 月

目　录

第一篇　线性代数

线性代数是重要的数学分支，它主要研究线性函数. 在研究运输管理最优化的问题中，线性代数更有其独特的重要位置，是重要的数学基础知识. 而行列式、矩阵又是线性代数的一个重要概念，它是研究线性关系的有力的工具. 因此，在第一篇里主要介绍行列式、线性方程组和矩阵的一些基础知识.

第一章　行列式

行列式是线性代数的基础. 它是研究矩阵、线性方程组等问题的重要工具，不仅可以应用于数学的许多分支，而且在一些应用学科的理论研究中也都有着广泛的应用. 本章主要介绍了 n 阶行列式的定义、性质及其计算方法，给出了用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克莱姆法则.

1.1　二、三阶行列式

一、二阶行列式

设有二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1-1}$$

用消元法可得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \end{cases} \tag{1-2}$$

为了便于使用及记忆，引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

用它表示 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1-3}$$

$$- \qquad\qquad +$$

式（1-3）左端称为二阶行列式，其中 a_{ij}（$i=1$，2；$j=1$，2）称为这个行列式的第 i 行第 j 列的元素；式（1-3）的右端称为二阶行列式的展开式.

二阶行列式有两行、两列，其中展开式中有两项：从行列式的左上角到右下角（称主对角线）上的两个元素的乘积，前置符号取正；从右上角到左下角（称次对角线）上的两个元素的乘积，前置符号取负．即二阶行列式等于主对角线（实线）上两个元素的乘积减去次对角线（虚线）上两个元素的乘积.

根据二阶行列式的定义，式（1-2）中右端可用行列式表示如下：

$$a_{22}b_1 - a_{12}b_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{122} \end{vmatrix},$$

$$a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

则当 $D \neq 0$ 时，方程组（1-1）的解可表示为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D} \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D} \end{cases} \tag{1-4}$$

在式（1-4）中行列式 D 是由式（1-1）中未知数的系数按原来的次序组成的，故称系数行列式．而 D_1，D_2 是用式（1-1）中的常数项 b_1，b_2 分别代替系数行列式 D 中的第一列和第二列的结果．这样二元线性方程组的求解问题，便可归结为二阶行列式的计算问题，故此解法称为行列式解法.

【例 1】 用行列式解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 9 = 0 \end{cases}.$$

解 先把方程组化为一般形式

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 = 9 \end{cases},$$

因为

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2 \neq 0,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 18 = 2,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&5\\3&9\end{vmatrix}=9-15=-6\ .$$

所以方程组的解为

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{2}{-2}=-1\\ x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{-6}{-2}=3\end{cases}.$$

二、三阶行列式

设有三元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}\tag{1-5}$$

现在仍用消元法解方程组，先从前两式消去 x_3，后两式也消去 x_3，得到只含有 x_1 和 x_2 的两个新的方程，再从这两个新方程中消去 x_2，得

$$\begin{aligned}&(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_1\\ &=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{23}-a_{13}a_{22}b_3\end{aligned}\tag{1-6}$$

引进记号

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\tag{1-7}$$

用它表示式（1-6）中 x_1 的系数，即

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\begin{aligned}&a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-\\&a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\end{aligned}\tag{1-8}$$

式（1-8）左端称为三阶行列式，右端称为三阶行列式的展开式．它也可用图形（如图1-1)来记忆，用实线连结的 3 个元素之积，前置符号取正；用虚线连结的 3 个元素之积，前置符号取负．这种展开三阶行列式的方法称为对角线法则．

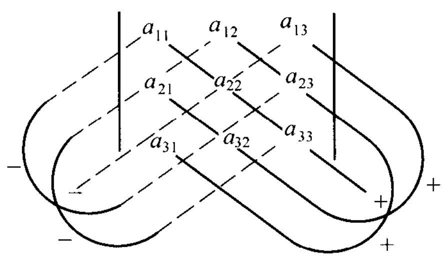


图 1-1

根据三阶行列式的定义，式（1-6）右端可写成行列式

$$D_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

若记行列式（1－7）为 D，则当 $D\neq0$ 时，式（1－6）可写成

$$x_1=\frac{D_1}{D}.$$

用同样的方法可求得方程组（1－5）的另两个未知数的值，$x_2=\dfrac{D_2}{D}$，$x_3=\dfrac{D_3}{D}$. 故方程组（1－5）的解可表示为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D} \\ x_2=\dfrac{D_2}{D} \\ x_3=\dfrac{D_3}{D} \end{cases} \tag{1-9}$$

其中 D 是方程组（1－5）的系数按它们在方程组中的次序排列而成的行列式，称为方程组的系数行列式，D_1，D_2，D_3 是用常数项 b_1，b_2，b_3 分别替换 D 中 x_1，x_2，x_3 的系数所在的列后得到的行列式.

【例 2】 用行列式解线性方程组

$$\begin{cases} -2x_1+3x_2-x_3=1 \\ \quad x_1+2x_2-x_3=4 \\ -2x_1-\ x_2+x_3=-3 \end{cases}.$$

解 因为

$$D=\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-2\neq0,\quad D_1=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-4.$$

$$D_2=\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}=-6,\qquad D=\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix}=-8.$$

所以方程组的解为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}=2 \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}=3 \\ x_3=\dfrac{D_3}{D}=4 \end{cases}.$$

1.2 n 阶行列式

三阶行列式除了用对角线法计算外，还可用降阶的方法化成二阶行列式来计算，其方法如下：

$$
\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}a_{22}a_{23} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\
&= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad (1-10)
\end{aligned}
$$

记
$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad (1-11)$$

$A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11}$；$A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12}$；$A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13}$. 称 M_{1j} 为元素 a_{1j} 的余子式，A_{1j} 为元素 a_{1j} 的**代数余子式**($j=1, 2, 3$).

则三阶行列式 D 可写成

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \qquad (1-12)$$

称上式为三阶行列式 D 按第一行展开的展开式.

把上式作为三阶行列式的定义，并把它推广到高阶行列式，作为 n 阶行列式的定义.

定义 由 n^2 个数组成的记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1-13)$$

称为 n 阶行列式，且规定

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} \qquad (1-14)$$

其中
$$A_{1j} = (-1)^{1+j}M_{1j} \quad (j = 1,2,\cdots,n)$$

$$M_{1j} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (j = 1,2,\cdots,n) \qquad (1-15)$$

称 M_{1j} 为 D 中元素 a_{1j} 的余子式，它是 D 中划去第一行、第 j 列后剩下的元素按原来的顺序组成的 $n-1$ 阶行列式，A_{1j} 为 D 中元素 a_{1j} 的代数余子式.

由此定义，n 阶行列式可以降成 $n-1$ 阶行列式来计算. 例如，四阶行列式可降成三阶行列式来计算，依次类推便可计算出任意 n 阶行列式的值.

【例 1】 计算四阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 根据 n 阶行列式的定义，得

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times 1 + 2 \times 6 = 13.$$

【例 2】 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 根据 n 阶行列式的定义，得

$$D = a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 2 中出现的行列式又称下三角形行列式，其值等于主对角线元素的乘积，同样可得上三角形行列式及对角行列式的值.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

1.3 行列式的性质

为了进一步研究 n 阶行列式，简化 n 阶行列式的计算，下面介绍 n 阶行列式的基本性质. 先引入 n 阶行列式的转置行列式、余子式和代数余子式的概念.

将行列式 D 的行与相应的列互换后得到的行列式，称为行列式 D 的转置行列式，记作 D^{T}，即设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

则 D 的转置行列式

$$D^{T}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{n1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{n2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

在行列式 D 中，划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列剩下的元素按原来顺序组成的 $n-1$阶行列式，称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}，而将 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的代数余子式，记作 A_{ij}，即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

下面只叙述行列式的性质，而不加以证明.

性质 1 行列式与它的转置行列式的值相等.

$$D=\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&-2&-1\\3&1&2\end{vmatrix}=9.$$

例如

$$D^{T}=\begin{vmatrix}1&1&3\\-1&-2&1\\1&-1&2\end{vmatrix}=9.$$

性质 2 互换行列式的两行（列），行列式的值仅改变符号.

例如交换上例 D 中的第 1 行和第 2 行，得

$$\begin{vmatrix}1&-2&-1\\1&-1&1\\3&1&2\end{vmatrix}=-9.$$

由性质 2 可以推出下列结论：

推论 1 如果行列式中有两行（列）的对应元素相同，则此行列式的值为零.

设此行列式为 D，则有 $D=-D$，即 $2D=0$，故 $D=0$.

性质 3 行列式中某一行（列）中所有的元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式.

例如

$$\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&-2&-1\\3\times3&3\times1&3\times2\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&-2&-1\\3&1&2\end{vmatrix}=27.$$

推论 2 如果行列式中某行（列）的元素有公因子，则可把公因子提到行列式的外面.

推论 3 如果行列式中有两行（列）的对应元素成比例，则此行列式的值为零.

性质 4 如果行列式的某一行（列）所有元素都是两个数之和，则此行列式可按该行（列）拆成两个行列式之和.

例如

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}+b_{21}&a_{22}+b_{22}&a_{23}+b_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}.$$

由性质 4 和推论 3 可以得到下面的性质：

性质 5 在行列式中，把某一行（列）的倍数加到另一行（列）对应的元素上去，那么行列式的值不变.

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} & a_{23}+ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

性质 6 行列式 D 的值等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和. 即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{1-16}$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1,2,\cdots,n)$$

例如

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

若按第二行展开，得

$$\begin{aligned} D &= 3(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 0 + (-3)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 84 - 12 = 72. \end{aligned}$$

推论 4 行列式 D 中任一行（列）中的元素与另一行（列）对应元素的代数余子式的乘积之和等于零. 即

$$a_{i1}A_{s1} + a_{i2}A_{s2} + \cdots + a_{in}A_{sn} = 0 \quad (i \neq s) \tag{1-17}$$

或

$$a_{1j}A_{1t} + a_{2j}A_{2t} + \cdots + a_{nj}A_{nt} = 0 \quad (j \neq t)$$

1.4 行列式的计算

以上介绍了行列式的 6 个性质及 4 个推论，下面举一些例题说明如何利用这些性质和推论来计算行列式的值.

在计算行列式时，为了便于书写和复查，作如下约定：

(1) 用 r_i 表示行列式的第 i 行，c_j 表示第 j 列；

(2) 用 $r_i + kr_s$ 表示将第 s 行各元素的 k 倍加到第 i 行的对应元素上，列的记法类似.

(3) 用 $r_i \rightleftharpoons r_s$ 表示将第 i 行和第 s 行互换，列的记法类似.

【例 1】 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 & -3 \\ 1 & -6 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & -12 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

解

$$D\xlongequal[r_4-3r_2]{r_1+3r_2}\begin{vmatrix}5&-14&-2&0\\1&-6&-2&1\\-3&5&2&0\\1&6&6&0\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{2+4}\cdot\begin{vmatrix}5&-14&-2\\-3&5&2\\1&6&6\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3+3r_1]{r_2+r_1}\begin{vmatrix}5&-14&-2\\2&-9&0\\16&-36&0\end{vmatrix}=(-2)\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}2&-9\\16&-36\end{vmatrix}=-144.$$

【例 2】 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}.$$

解

$$D\xlongequal[\substack{r_1+r_3\\r_1+r_4}]{r_1+r_2}6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}\xlongequal[\substack{r_3-r_1\\r_4-r_1}]{r_2-r_1}6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix}=48.$$

【例 3】 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&2&3&4\\3&2&1&2&3\\4&3&2&1&2\\5&4&3&2&1\end{vmatrix}.$$

解 从最后一列开始，依次每列减去前一列，然后将第一行加到其余各行，得到

$$D\xlongequal[\substack{c_3-c_2\\c_2-c_1}]{\substack{c_5-c_4\\c_4-c_3}}\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\2&-1&1&1&1\\3&-1&-1&1&1\\4&-1&-1&-1&1\\5&-1&-1&-1&-1\end{vmatrix}\xlongequal[\substack{r_4+r_1\\r_5+r_1}]{\substack{r_2+r_1\\r_3+r_1}}\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\3&0&2&2&2\\4&0&0&2&2\\5&0&0&0&2\\6&0&0&0&0\end{vmatrix}$$

$$=6(-1)^{5+1}\cdot\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&2&2\\0&0&2&2\\0&0&0&2\end{vmatrix}=48\quad.$$

【例 4】 解方程

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&x&2&2\\2&2&x&3\\3&3&3&x\end{vmatrix}=0\quad.$$

解 因为

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&x&2&2\\2&2&x&3\\3&3&3&x\end{vmatrix}\xlongequal[\substack{r_3-2r_1\\r_4-3r_1}]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&x-1&1&1\\0&0&x-2&1\\0&0&0&x-3\end{vmatrix}$$
$$=(x-1)(x-2)(x-3)=0\,.$$
所以方程的解为：$x=1$，$x=2$，$x=3$.

由此可见，计算行列式时，也可用行列式的性质将行列式化为上（下）三角形行列式，然后再计算.

1.5 克莱姆法则

含有 n 个未知数、n 个方程的线性方程组的一般形式是

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\qquad\quad\vdots\qquad\quad\vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}\tag{1-18}$$

它的系数组成的行列式为

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

此称为系数行列式.

与二、三元线性方程组相类似，方程组（1-18）的解也可用行列式表示，对于方程组(1-18)有下面的定理成立.

定理（克莱姆法则）　若线性方程组（1-18）的系数行列式 $D\neq0$，则这个方程组有唯一的一组解：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n=\frac{D_n}{D}.$$

其中 D_j（$j=1$，2，…，n）是用常数项 b_1，b_2，…，b_n 依次替换D 中第j 列元素后得到的行列式.

证　用 D 中第j 列的代数余子式A_{1j}，A_{2j}，…，A_{nj}分别乘以方程组（1-18）的第一个，第二个，…，第 n 个方程，得

$$\begin{aligned}A_{1j}(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n)&=b_1A_{1j}\\A_{2j}(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n)&=b_2A_{2j}\\\vdots\quad\ \vdots\qquad\quad\vdots\qquad\qquad\quad\vdots\qquad&\qquad\vdots\\A_{nj}(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n)&=b_nA_{nj}\end{aligned}$$

再将方程左、右两边分别相加，得

$$(a_{11}A_{1j}+a_{21}A_{2j}+\cdots+a_{n1}A_{nj})x_1+(a_{12}A_{1j}+a_{22}A_{2j}+\cdots+a_{n2}A_{nj})x_2+\cdots+$$