展望中学系列丛书

全新知识
与现行教材配套

透析知识

总结规律

高中
数学题典
下册

归纳方法

点拨技巧

丛书主编：李爱宏

中国环境科学出版社

展望中学系列丛书

数学题典

(高中下册)

丛书主编　李爱宏
本册主编　刘金海
副 主 编　李向清　王敏芝
　　　　　宫忠胜　赵学磊
参　　编　郭中涛　刘卫东
　　　　　马梅贞　牟慧霞

中国环境科学出版社

·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

数学题典:高中/刘金海编 .—北京:中国环境科学出版社,2001.1

(展望中学系列丛书/李爱宏主编)

ISBN 7-80163-057-2

Ⅰ.数… Ⅱ.刘… Ⅲ.数学课-高中-解题

Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 83975 号

中国环境科学出版社出版发行

北京市海淀区普惠南里 14 号

山东省博兴县印刷厂印刷

850×1168 32 开本 15.75 印张 488 千字

2001 年 3 月第 1 版 2001 年 3 月第 1 次印刷

印数:10000 册 定价:16.80 元

前　言

编写宗旨

为全面贯彻党中央“科教兴国”“持续发展”方针，积极实施素质教育，努力展现中学教学新大纲、新教材中素质教育、创新教育、实践教育的精神，进一步克服“应试教育”和“题海战术”的弊端，造就学生积极解决问题、勇于创新的优秀思想品质，我们组织一批重点中学的一线骨干教师，精心编写了这套中学《全新知识题典》系列丛书。

丛书特色

本丛书以“题”为媒介，努力增进学生对各科重要知识点的应用规律、方法、技巧的认识与掌握，进而培养学生知识迁移能力，提高学生分析与综合解决实际问题的技能。

本丛书有两大特色：

（一）三个“全”

题型全——涵盖了中学各科教、学、练、考的全部题型。

知识全——对所有知识点进行了认真细致的梳理，通过精心选择和专门设计的题目以及针对性强的解评点拨，使学生对中学各科知识点了然于胸。

解析全——对全部题目进行全面精到的解析与点拨，正是本丛书与一般题典书的鲜明区别。

（二）三个“新”

指导思想新——从整体创意，到全部内容，到装帧设计，本丛

书自始至终贯彻的指导思想是：跳出题海、举一反三、提高能力、发展素质、积极推进教育教学观念现代化的演进，热情铸造学生的现代创新品质。

题型新——既保证题型的全面经典，又在对国内外中学教、学、练、考题型的综合研究基础上创造性构建了一些崭新的题目样式。

体例新——本丛书分五部分：(1)高考要求；(2)经典好题；(3)解析；(4)答案；(5)规律、方法、技巧。其中对(1)(3)的高度重视，体现了本丛书给广大读者带来的关怀；对(5)的设计和最大程度的关注，堪称本丛书的独到之处，使本丛书在众多教辅书中脱颖而出。它对启迪学生悟性，拓展学生思维能力空间意义非凡。

真诚心愿

本丛书融汇了众多一线骨干教师多年来积累的丰富教学经验和珍贵的教育教学心得，熔铸近10年高考命题思想、解题策略和精华，完美地体现了本丛书的全面性、经典性、现代性。我们相信通过对本丛书的阅读，将带给广大学生朋友无穷的知识与智慧，进而带动思维能力的提升和心灵的腾跃。同时，本丛书对广大的中学一线教师而言，也是一套弥足珍贵的教学参考书。

让更多的热心读者真正受益，是我们最大的心愿，诚愿广大读者朋友在使用本丛书时提出宝贵意见与建议，以便我们在修订再版时予以丰富和提高，谢谢。

编　者

2000年12月

目 录

第五章　不等式

高考要求

1. 掌握不等式的性质及其证明．掌握证明不等式的几种常用方法．掌握两个和三个(不要求四个和四个以上)正数的算术平均数不小于它们的几何平均数这两个定理．并能运用上述性质、定理和方法解决一些问题．

2. 在熟练掌握一元一次不等式(组)、一元二次不等式的解法的基础上初步掌握其他的一些简单的不等式的解法．会解含绝对值的不等式．

3. 会用不等式$|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$,解一些简单的问题．

典例解析与规律·方法·技巧

一、不等式的性质与证明

题1.若 $a<b<0$,则下列不等式中不能成立的是　(　　)

A. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　B. $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$

C. $|a|>|b|$　　D. $a^2>b^2$

[分析]从不等式的性质出发,由 $a<b<0$,有$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$,因此 A 成立.

由 $a<b<0$ 知 $-a>-b>0$,所以$|a|>|b|$,因此 C 成立

由$|a|>|b|$知 $a^2>b^2$,因此 D 成立

由排除法,知 B 不成立.

[答案]B

[规律·方法·技巧]

(1)1°. 对于任意实数 a、b 有:$\begin{cases} a-b>0\Leftrightarrow a>b \\ a-b=0\Leftrightarrow a=b \\ a-b<0\Leftrightarrow a<b \end{cases}$.这是比较两实数大小的理论依据,也是学习不等式的基石.

2°. 不等式的基本性质是:

①对称性: $a>b \Leftrightarrow b<a$.

②传递性: $a>b, b>c \Rightarrow a>c$.

③加法: $a>b \Leftrightarrow a+m>b+m$;

$a>b, c>d \Rightarrow a+c>b+d$;

$a>b, c>d \Rightarrow a-d>b-c$.

④乘法: $a>b, c>0 \Rightarrow ac>bc$;

$a>b, c<0 \Rightarrow ac<bc$;

$\left.\begin{matrix} a>b>0 \\ c>d>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow ac>bd$.

⑤乘方: $a>b>0 \Rightarrow a^n>b^n (n \in N)$.

⑥倒数: $\left.\begin{matrix} a>b \\ ab>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

⑦开方: 当 $n \in N$ 且 $n \geqslant 2$ 时, $a>b>0 \Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

不等式的性质是解证不等式的基础.要注意区分各性质的充要性和必要性。

(2)作为不等式问题,常在客观试题中考查不等式的性质.解答此类客观性试题更简捷和奏效的方法可用特殊值代入的方法.如本题令 $a=-2, b=-1$,可得答案 B.

(3)涉及大小比较问题、解不等式问题,应注意等价转化思想的运用.

题 2. a、b 是任意实数,且 $a>b$,则　　(　　)

A. $a^2>b^2$　　B. $\frac{b}{a}<1$

C. $\lg(a-b)>0$　　D. $\left(\frac{1}{2}\right)^a<\left(\frac{1}{2}\right)^b$

[分析]利用特殊值代入法.令 $a=0, b=-1$,排除 A、B、C.

[答案]D

[规律·方法·技巧]

(1)可直接由指数函数的单调性看出 $\left(\frac{1}{2}\right)^a<\left(\frac{1}{2}\right)^b$ 是正确的.

(2)不等式的性质,以及利用不等式的性质证明不等式、解不等式常常与函数性质(特别是单调性)结合.即不等式与函数密不可分.

题 3. 已知 $-1<a<-\frac{1}{2}$,则下列不等式中正确的是　　(　　)

A. $2^{a}>\left(\frac{1}{2}\right)^{a}>(0.2)^{a}$　　B. $2^{a}>(0.2)^{a}>\left(\frac{1}{2}\right)^{a}$

C. $\left(\frac{1}{2}\right)^{a}>(0.2)^{a}>2^{a}$　　D. $(0.2)^{a}>\left(\frac{1}{2}\right)^{a}>2^{a}$

[分析]首先可判断出 $2^{a}<1,\left(\frac{1}{2}\right)^{a}>1$,且 $(0.2)^{a}=\left(\frac{1}{5}\right)^{a}>1$

因此只需比较 $\left(\frac{1}{2}\right)^{a}$ 与 $\left(\frac{1}{5}\right)^{a}$ 的大小,由幂函数 $y=x^{a}(-1<a<-\frac{1}{2})$ 的性质得 $\left(\frac{1}{2}\right)^{a}<\left(\frac{1}{5}\right)^{a}$

[答案] D

[规律·方法·技巧]

(1)涉及数或式的大小比较的问题,通常应用不等式的性质和函数的单调性求解.

(2)对于多个数(或式)的比较大小问题,常取“中间介值”(如:取 0 或 1),先进行分组,再进行同组内的大小比较是减少运算量的有效方法.

题 4. 设 $\log_{a}x>\log_{b}x(0<a\neq1,0<b\neq1)$ 且 $a+b=1,x>1$,则必有　　(　　)

A. $1<a<b$　　B. $0<a<b<1$

C. $1<b<a$　　D. $0<b<a<1$

[分析] $\because a+b=1\therefore 0<a<1$ 且 $0<b<1$,因此排除 A、C. 取 $a=\frac{1}{3},b=\frac{2}{3}$ 验证可排除 D.

[答案] B

[规律·方法·技巧]

(1)分析已知条件,挖掘隐含条件对解决问题是十分重要的. 如本题首先分析得 $0<a<1,0<b<1$.

(2)从题型上看,本题可用题 2 给出的结论:当 $ab>0$ 时,$a\geqslant b\Leftrightarrow\frac{1}{a}\leqslant\frac{1}{b}$ 解答. 由 $\log_{a}x>\log_{b}x$,即 $\frac{1}{\log_{x}a}>\frac{1}{\log_{x}b}$

$\because x>1$ 且 $0<a<1,0<b<1,\therefore \log_{x}a<0,\log_{x}b<0$

$\therefore 0>\frac{1}{\log_{x}a}>\frac{1}{\log_{x}b}\Leftrightarrow\log_{x}a<\log_{x}b<0\Leftrightarrow 0<a<b<1.$

题 5. 若 $\log_{a}2<\log_{b}2<0$,则　　(　　)

A. $0<a<b<1$　　B. $0<b<a<1$

C. $a>b>1$　　　D. $b>a>1$

[分析]用特殊值代入,可令 $a,b\in(0,1)$,排除 C、D.

再令 $a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{1}{2}$,得 $\log_a 2>\log_b 2$,与题设矛盾,排除 A.

[答案]B

[规律·方法·技巧]

涉及不同底的两个对数的大小比较问题,通常先用换底公式将其化为同底的对数.如本题,由题设得 $\frac{1}{\log_2 a}<\frac{1}{\log_2 b}<0$,于是 $\log_2 b<\log_2 a<0$,由对数函数单调性得 $0<b<a<1$.

(2)本题另一种方法是数形结合.作出函数 $y=\log_a x$, $y=\log_b x$ 的图象,当 $x=2$ 时,函数值　$y_1<y_2<0$,因此 $0<b<a<1$.

(3)解此类问题的关键是掌握好对数函数的图象和性质,应用好转化的思想和数形结合的思想方法.

题6.设 $a>b>c$ 且 $a+b+c=0$,则下列不等式恒成立的是　　(　　)

A. $ab>ac$　　　B. $ac>bc$

C. $a|b|>|b|c$　　　D. $ab>bc$

[分析]由 $a>b>c$ 且 $a+b+c=0$,得 $a>b$, $c<0$,则 $ac<bc$,因此 B 不成立.当 $b=0$ 时,C、D 不成立.故选 A

[答案]A

[规律·方法·技巧]

本题也可以直接应用不等式性质求解:

由 $a>b>c$ 且 $a+b+c=0$,知必有 $a>0$, $c<0$;而 b 可正,可负,可为零.由不等式性质可知 $b>c$ 且 $a>0$,则得 $ab>ac$.故 A 项不等式恒成立.

题7.设 a,b 是满足 $ab<0$ 的实数,那么　　(　　)

A. $|a+b|>|a-b|$　　　B. $|a+b|<|a-b|$

C. $|a-b|<|a|-|b|$　　　D. $|a-b|<|a|+|b|$

[分析]用特殊值代入验证:令 $a=1$, $b=-1$.对于 A, $0>2$ 不成立,排除 A;对于 C, $2<0$ 不成立,排除 C;对于 D, $2<2$ 不成立,排除 D.

[答案]B

[规律·方法·技巧]

掌握绝对值不等式 $||a|-|b||\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$.运用和认识不等式 $||a|-|b||\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$ 中等号、不等号成立的条件是解决一些

含绝对不等式问题的关键.

如：$ab\geqslant 0\Leftrightarrow|a+b|=|a|+|b|(||a|-|b||=|a-b|)$

$ab<0\Leftrightarrow|a+b|<|a|+|b|(|a|-|b|<|a-b|)$

题 8.若 $a>b>0,x>0$,那么$\frac{b+x}{a+x}$的值的范围是　(　　)

A.$\frac{b+x}{a+x}>1$　　B.$\frac{b+x}{a+x}<\frac{b}{a}$

C.$\frac{b}{a}<\frac{b+x}{a+x}<1$　D.$1<\frac{b+x}{a+x}<\frac{b}{a}$

[分析]由 $a>b>0,x>0$ 得 $a+x>b+x>0$,所以$\frac{b+x}{a+x}<1$

又$\frac{b+x}{a+x}-\frac{b}{a}=\frac{x(a-b)}{a(a+x)}>0$,所以$\frac{b+x}{a+x}>\frac{b}{a}$

[答案]C

[规律·方法·技巧]

(1)这个问题的结论反映在生活中,就是给糖水加糖,糖水变甜.即设 a 克糖水中有 b 克糖,添上 x 克糖后,有$\frac{b+x}{a+x}>\frac{b}{a}(a>b>0,x>0)$,且$\frac{b+x}{a+x}<1$.更一般的结论是:若 $a>b>0,m>0$,则$\frac{b}{a}<\frac{b+m}{a+m}<1<\frac{a+m}{b+m}<\frac{a}{b}$.

(2)本题证明方法除可用比较法外,还可用综合法和分析法等许多种证法.

题 9.定义在区间$(-\infty,+\infty)$的奇函数 $f(x)$为增函数,偶函数 $g(x)$在区间$[0,+\infty)$的图象与 $f(x)$的图象重合,设 $a>b>0$,给出下列不等式:

①$f(b)-f(-a)>g(a)-g(-b)$

②$f(b)-f(-a)<g(a)-g(-b)$

③$f(a)-f(-b)>g(b)-g(-a)$

④$f(a)-f(-b)<g(b)-g(-a)$

其中成立的是:　(　　)

A.①与④　　B.②与③

C.①与③　　D.②与④

[分析]用特殊函数验证,可令 $f(x)=x,g(x)=|x|,a=2,b=1$ 来判断.

[答案]C

[规律·方法·技巧]

(1)审题要认真、深入,揭示出问题的实质,不能只从表面上、形式上看问

题.本例从形式上看主要是奇、偶函数概念问题,实质是一个“不等式的加减”问题,注意到 $f(0)=g(0)=0$ 后,可以选取 C.

(2)特殊值法解答选择题,不仅取数特殊,还可取特殊的式子,特殊的函数,特殊的图形等.

题 10. 设正数 a,b 满足 $a+b=1$ 且 $a\neq b$,则四个数 $\frac{1}{2},2ab,\sqrt{ab},a^2+b^2$ 中最大的一个是　　(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $2ab$　　C. $\sqrt{ab}$　　D. a^2+b^2

[分析]用特殊值代入验证.由 $a>0,b>0$ 且 $a+b=1,a\neq b$ 可令 $a=\frac{2}{3},b=\frac{1}{3}$,代入得 B, $2ab=\frac{4}{9}<\frac{1}{2}$;代入得 C, $\sqrt{ab}=\frac{\sqrt{2}}{3}<\frac{1}{2}$;代入得 D, $a^2+b^2=\frac{4}{9}+\frac{1}{9}=\frac{5}{9}>\frac{1}{2}$.

[答案] D

[规律·方法·技巧]

(1)要熟练掌握基本不等式定理,特别是两个(或三个)数的基本不等式定理.

若 $a,b\in R$ 则 $a^2+b^2\geqslant 2ab$　(当且仅当 $a=b$ 时,取“=”号);

若 $a,b\in R^+$,则 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$　(当且仅当 $a=b$ 时,取“=”号);

若 $a,b,c\in R^+$,则 $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$(当且仅当 $a=b=c$ 时,取“=”号);

若 $a,b,c\in R^+$,则 $\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$(当且仅当 $a=b=c$ 时,取“=”号).

(2)要明确各不等式的条件:

①a,b 是正数(除 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 中 $a,b\in R$ 外);

②等号条件.

(3)牢记不等式形式.如指数、系数、根号等.

题 11. 若 $a>b>1$, $P=\sqrt{\lg a\cdot\lg b}$, $Q=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)$, $R=\lg\left(\frac{a+b}{2}\right)$,则　　(　　)

A. $R<P<Q$　　B. $P<Q<R$

C. $Q<P<R$　　D. $P<R<Q$

[分析]由 $a>b>1$ 得 $\lg a>\lg b>0$,由基本不等式,得 $P<Q$.再由 $Q=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)=\lg\sqrt{ab}<\lg\left(\frac{a+b}{2}\right)=R$.

[答案]B

[规律·方法·技巧]

(1)熟练掌握、灵活应用基本不等式定理,可以使许多不等式问题迅速解答.

(2)熟练掌握对数的运算,对于解决涉及对数和对数函数问题是必不可少的.

题 12.若 $f(x)=\frac{1}{x}-\sqrt{x}$,$a,b\in R^{+}$,$A=f\left(\frac{a+b}{2}\right)$,$B=f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)$,$C=f\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)$,则　　(　　)

A. $A\leqslant B\leqslant C$　　B. $B\leqslant C\leqslant A$

C. $C\leqslant A\leqslant B$　　D. $C\leqslant B\leqslant A$

[分析]函数 $f(x)=\frac{1}{x}-\sqrt{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 为减函数,只要比较出 $\frac{a+b}{2}$,$\frac{2ab}{a+b}$,$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ 的大小即可.因为 $a,b\in R^{+}$,由基本不等式定理可得 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$(当且仅当 $a=b$ 时,取"="号),又 $\because\frac{2ab}{a+b}\leqslant\frac{2ab}{2\sqrt{ab}}\leqslant\sqrt{ab}$,$\therefore\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\frac{a+b}{2}\geqslant\frac{2ab}{a+b}$(当且仅当 $a=b$ 时取"="号).

[答案]C

[规律·方法·技巧]

(1)应用基本不等式定理可以解决大小比较问题、不等式证明问题,以及函数最值问题。

(2)综合应用基本不等式和函数的单调性,可以解决类似的问题:

①若 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$,讨论 $A=f\left(\frac{a+b}{2}\right)$,$B=f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)$,$C=f\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)$ 的大小关系.

②若 $a,b,c\in(0,1)$,讨论 $P=\log_c\frac{a+b}{2}$,$Q=\frac{\log_c a+\log_c b}{2}$,

$R=\frac{1}{2}\log_c\frac{a^2+b^2}{2}$的大小关系.

题 13. 设 $x>0, y>0$, 且 $x+y\leqslant 4$, 则下列不等式中恒成立的是　　(　　)

A. $\frac{1}{x+y}\leqslant\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geqslant 1$

C. $\sqrt{xy}\geqslant 2$　　D. $\frac{1}{xy}\geqslant 1$

[分析] 取特殊值代入验证:

令 $x=1, y=1$, 则 $A.\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{4}$ 不成立; $C.1\geqslant 2$ 不成立.

令 $x=1, y=2$, 则 $D.\frac{1}{2}\geqslant 1$ 不成立.

[答案] B

[规律·方法·技巧]

本题也可用综合法求得:

$\because x>0, y>0$, 且 $x+y\leqslant 4$, $\therefore 2\sqrt{xy}\leqslant x+y\leqslant 4$

$\therefore 0<xy\leqslant 4$, $\therefore\frac{1}{xy}\geqslant\frac{1}{4}$(当且仅当 $x=y$ 时,取"="号)

$\therefore\frac{1}{\sqrt{xy}}\geqslant\frac{1}{2}$, $\therefore\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}\geqslant\frac{2\sqrt{xy}}{xy}=\frac{2}{\sqrt{xy}}\geqslant 2\cdot\frac{1}{2}=1$(当且仅当 $x=y$ 时取"="号).

题 14. 下列命题中正确的是　　(　　)

A. 函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 的最小值为 2

B. 函数 $y=\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}}$ 的最小值为 2

C. 函数 $y=2-3x-\frac{4}{x}(x>0)$ 的最大值为 $2-4\sqrt{3}$

D. 函数 $y=2-3x-\frac{4}{x}(x>0)$ 的最小值为 $2-4\sqrt{3}$

[分析] A 在 $x<0$ 时不可能有最小值.

$B.y=\sqrt{x^2+2}+\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\geqslant 2$, 但 $\sqrt{x^2+2}\neq\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$

即等号不成立, $\therefore y$ 无最小值.

$C.\because 3x+\frac{4}{x}\geqslant 2\sqrt{3\times 4}=4\sqrt{3}$($\because x>0$ 且 $3x=\frac{4}{x}$, 即 $x=\frac{2}{\sqrt{3}}$ 时等号成

立)

$$\therefore y=2-3x-\frac{4}{x}\leqslant 2-4\sqrt{3}$$

[答案]C

[规律·方法·技巧]

由基本不等式得最值定理:已知 $x,y\in R^{+}$, $x+y=S$, $xy=P$.

(1)如果 P 是定值,那么当且仅当 $x=y$ 时,S 的值最小;

$\because \frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}$, $\therefore S\geqslant 2\sqrt{P}$.

即当且仅当 $x=y$ 时,S 有最小值 $2\sqrt{P}$.

(2)如果 S 是定值,那么当且仅当 $x=y$ 时,P 的值最大;

$\because\sqrt{xy}\leqslant\frac{x+y}{2}$, $\therefore\sqrt{P}\leqslant\frac{S}{2}$, $\therefore P\leqslant\frac{S^2}{4}$. 即当且仅当 $x=y$ 时,P 有最大值 $\frac{S^2}{4}$.

应用最值定理时,必需具备三个条件:(ⅰ)正(x,y 均为正数).(ⅱ)定(积(或和)为定值).(ⅲ)等号(等号条件具备).三个条件缺一不可. 如本题:A. $x>0$ 时,$x+\frac{1}{x}\geqslant 2$, $x<0$ 时,$x+\frac{1}{x}\leqslant -2$,所以 $y\leqslant -2$ 或 $y\geqslant 2$. B 中取"="条件是 $\sqrt{x^2+2}=\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$,即 $x^2+2=1$ 不可能,所以只有 $y>2$,而 $y\neq 2$.

题 15. 设 $a>b>c$, $n\in N$,且 $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\geqslant\frac{n}{a-c}$,则 n 的最大值为　(　　)

A.2　　B.3　　C.4　　D.5

[分析] $\because n\leqslant\frac{(a-c)^2}{(a-b)(b-c)}=\frac{[(a-b)+(b-c)]^2}{(a-b)(b-c)}=\frac{a-b}{b-c}+\frac{b-c}{a-b}+2$

且 $\frac{a-b}{b-c}+\frac{b-c}{a-b}+2\geqslant 4$,等号条件 $a-b=b-c$ 即 $2b=a+c$.

$\therefore n$ 的最大值为 4

[答案]C

[规律·方法·技巧]

构造法是重要的数学方法,它是根据问题的需要,有意造成问题需要的形式.数学中的构造法可以构造式子、构造数、构造函数、构造方程、构造数列、构造图形等等.

题 16. 已知 $\log_a(3a-1)$ 恒为正数,则 a 的取值范围是　(　　)

A. $a>\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{3}<a\leqslant\frac{2}{3}$

C. $a>1$　　D. $\frac{1}{3}<a<\frac{2}{3}$或 $a>1$

[分析]取特殊值代入验证：首先 $a\neq1$，排除 A；

取 $a=2$，得 $\log_a(3a-1)=\log_2 5>0$ 成立，排除 B；

取 $a=\frac{1}{2}$，得 $\log_a(3a-1)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}=1$ 成立，排除 C；

只有 D 正确.

[答案]D

[规律·方法·技巧]

(1)在涉及对数函数 $y=\log_a x$ 的性质问题，应对底数 a 作：$a>1$ 和 $0<a<1$ 分类讨论，是这类问题的直接解答方法. 如本例：

$a>1$ 时，由 $\log_a(3a-1)>0$，得

$3a-1>1$，即 $a>\frac{2}{3}$

$\therefore a>1$

$0<a<1$ 时，由 $\log_a(3a-1)>0$，得

$0<3a-1<1$

$\therefore \frac{1}{3}<a<\frac{2}{3}$

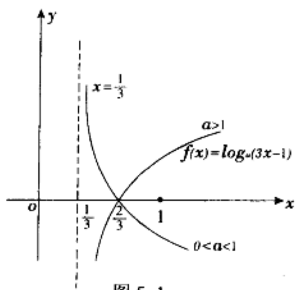

图 5-1

(2)为避免分类讨论，还可用数形结合法：作出函数 $f(x)=\log_a(3x-1)$ 的草图，如图 5-1，过点$\left(\frac{2}{3},0\right)$，结合图使 $f(a)>0$ 得 $a>1$ 或$\frac{1}{3}<a<\frac{2}{3}$.

题 17. 若 $\log_2 x=\log_3 y=\log_5 z<0$，则 $x^{\frac{1}{2}},y^{\frac{1}{3}},z^{\frac{1}{5}}$之间的大小关系是　　(　　)

A. $y^{\frac{1}{3}}<x^{\frac{1}{2}}<z^{\frac{1}{5}}$　　B. $x^{\frac{1}{2}}<y^{\frac{1}{3}}<z^{\frac{1}{5}}$

C. $z^{\frac{1}{5}}<y^{\frac{1}{3}}<x^{\frac{1}{2}}$　　D. $x^{\frac{1}{2}}<z^{\frac{1}{5}}<y^{\frac{1}{3}}$

[分析]令 $\log_2 x=\log_3 y=\log_5 z=t<0$，则 $x=2^t,y=3^t,z=5^t$

因此 $x^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{t}{2}},y^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{t}{3}},z^{\frac{1}{5}}=5^{\frac{t}{5}}$

比较 $x^{\frac{1}{2}},y^{\frac{1}{3}}$，可化同指数$\frac{t}{6}$，则 $x^{\frac{1}{2}}=8^{\frac{t}{6}},y^{\frac{1}{3}}=9^{\frac{t}{6}}$