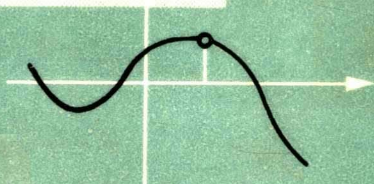
高次方程解法

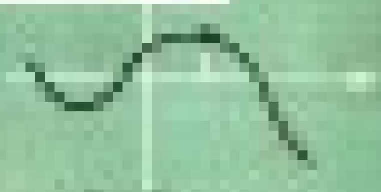
程乃棟編譯



$$x^3+px^2+qx+r=0$$

科学普及出版社

高次方程解法



内容提要

三次以及更高次方程有許多实际应用。但是它們一般沒有求解公式，通常要用高等数学才能得到它們的解。

这本小册子通俗地介紹了一种比較簡单的解法。可供高中同学参考。

总号：138

高次方程解法

编譯者：程乃樌

出版者：科学普及出版社
（北京市西直门外郝家湾）

北京市书刊出版业营业许可证出字第112号

发行者：新华书店北京发行所

印刷者：北京市通县印刷厂

开本：787×1092 1/32　印张：12/16

1966年3月第1版　字数：12,000

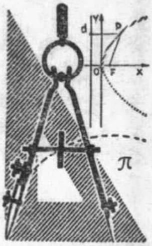
1966年3月第1次印刷　印数：61,650

統一书号：13051·079

定价：(1) 0.07元

高次方程解法

程乃栋編譯



科学普及出版社

一九六六年　北京

目　次

前　言

三次及更高次方程在这本小册子里称为高次方程。它們在应用上并不亚于二次方程。因此人們很早就开始研究高次方程了。

高次方程一般沒有求解公式，即使个别高次方程有求解公式，也是非常复杂的。因而旣不容易由它們求出解答，也不可能由它們推出方程的任何性质。这本小册子将給出一种比較簡单的解法，并介紹高次方程的一些基本性质。

在这本小册子里給出的所有討論，对任意次方程都适合。但是为了叙述上和計算上的方便，我們大都用三次方程为例，然后說一下在一般情况下所得的結果。

在这本小册子里我們只討論方程的实根性质。方程的复根性质也可以用同样的方法推出来，只是略微复杂一些。

§ 1 根的界限

如何确定方程

$$ax^3+bx^2+cx+d=0 \tag{1}$$

的根的界限？

也就是說，如何求这样的正数N，使方程(1)的所有的根都在 N 和 $-N$ 之間。

不難想見，为此应当求这样的正数 N，如果 $|x|>N$，那么方程(1)的左端就不再等于零了。

令首項絕对值的 $\frac{1}{3}$ 都大于其余三項的絕对值：

$$\frac{1}{3}|a||x|^3>|b||x|^2, \qquad \frac{1}{3}|a||x|^3>|c||x|,$$

$$\frac{1}{3}|a||x|^3>|d|,$$

即得

$$|x|>3\frac{|b|}{|a|}, \qquad |x|>\sqrt{3\frac{|c|}{|a|}}, \qquad |x|>\sqrt[3]{3\frac{|d|}{|a|}}.$$

于是

$$3\frac{|b|}{|a|}, \ \sqrt{3\frac{|c|}{|a|}}, \ \sqrt[3]{3\frac{|d|}{|a|}}$$

中最大的一个就可作为所求的 N。这是因为，当 $|x|$ 大于这个 N 时，首項便不可能被其他三項抵消，因而方程(1)的左端

就不再等于零了。

对于 n 次方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0, \tag{2}$$

我們取

$$n\frac{|a_1|}{|a_0|},\ \sqrt{n\frac{|a_2|}{|a_0|}},\ \cdots,\ \sqrt[n-1]{n\frac{|a_{n-1}|}{|a_0|}},\ \sqrt[n]{n\frac{|a_n|}{|a_0|}}$$

中最大的一个作为 N 就行了。

因为方程左端的首項絕对值大于其余各項的和的絕对值，所以方程左端的符号决定于首項的符号。因此，我們不仅知道，当 $|x|>N$ 时方程左端是一个不等于零的数，而且还知道，这个数的符号与首項符号相同。

假定在平面上选好了坐标軸，并且作出了函数

$$y=x^3+px^2+qx+r \tag{3}$$

的图象（图 1）。根据作图象的一般法則，图象上点 M 的纵坐标 u 就等于在 (3) 中用横坐标 v 代替 x 得到的那个数。特别是，当横坐标是方程

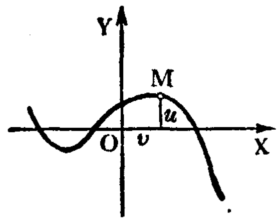


图 1

$$x^3+px^2+qx+r=0 \tag{4}$$

的根时，纵坐标便等于零。这就是說，在几何上方程的根是相应的函数图象与 X 軸的交点。

因此，方程(4)的所有的根在 $-N$ 和 N 之間就意味着，只有 x 在 $-N$ 和 N 之間时函数(3)的图象才可能与 X 軸相交。

函数(3)的图象一定与 X 軸相交嗎？也就是說，方程(4)一定有根存在嗎？

前面說过，若 $|x|>N$，則函数(3)的符号与它的首項符号相同。因为它的首項系数为1，所以它与 X 的符号一致。因此，当 $x>N$ 时，函数(3)是正的，这部分图象在 X 軸上方；当 $x<-N$ 时，函数(3)是負的(图2)。

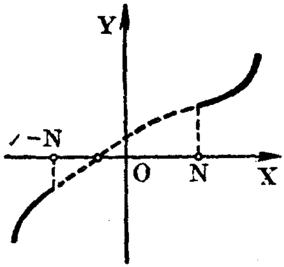


图 2

由于(3)是連續函数，它的图象是不間断的，所以这个图象至少与 X 軸相交一次，也就是說，方程(4)至少有一个根。

对于一般的高次方程也有类似的情形，奇次方程至少有一个实根，对于偶次方程，这个定理不成立。它們可能沒有一个实根，而全部都是复根。

§ 2 公根和重根

設有两个多项式 f 和 g：

$$f=f(x)=x^4+x^2+3x+1,$$

$$g=g(x)=x^3+x+2.$$

用較低次的 g 去除 f：

$$\begin{array}{rl} x^4+x^2+3x+1 & \underline{\left|\, x^3+x+2 \right.} \\ \underline{x^4+x^2+2x} & x \\ x+1 & \end{array}$$

得商式 $q=q(x)=x$，余式 $h=h(x)=x+1$。于是我們有

$$f=g\cdot q+h. \tag{5}$$

以后我們将把方程 $f=0$ 的根称为 f 的根。

設 f 和 g 有公根 α. 在(5)中令 $x=\alpha$，得

$$0=0\cdot q+h,$$

即

$$h=0,$$

这就是說，α 也是 h 的根。因此，若 α 是 f 和 g 的公根，則 α 也是 g 和 h 的公根。

反过来，若 α 是 g 和 h 的公根，由(5)求得，它也是 f 的根，即它也是 f 和 g 的公根。

当然，我們还可用 h 除 g：

$$
\begin{array}{rl}
x^3 \qquad\quad + x + 2 & \left| \; x+1 \right. \\
\cline{2-2}
x^3 + x^2 \qquad\qquad\quad & \; x^2 - x + 2 \\
\hline
-x^2 + x + 2 & \\
-x^2 - x \quad\; & \\
\hline
2x + 2 & \\
2x + 2 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

得到一个新多項式对：h 和 0。因为任何数都是零多項式的根，所以 h 的所有的根都是 h 和 0 的公根。

$h=x+1$ 只有一个根 $x=-1$，因此 h 和 0（因而 f 和 g）的公根为 -1。

于是，我們就把求多項式对（例如，f 和 g）的公根的問題归結为求一个次数較低的多項式（例如 h）的根的問題了。

設 α 是三次多項式

$$x^3+px^2+qx+r \tag{3$'$}$$

的一个根。用 $x-\alpha$ 来除它：

$$
\begin{array}{rl}
x^3+px^2+qx+r \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & \left| \; x-\alpha \right. \\
\cline{2-2}
x^3-\alpha x^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & \; x^2+(p+\alpha)x+(\alpha^2+p\alpha+q) \\
\hline
(p+\alpha)x^2+qx+r \qquad\qquad\qquad & \\
(p+\alpha)x^2-\alpha(p+\alpha)x \qquad\qquad & \\
\hline
(\alpha^2+p\alpha+q)x+r \qquad\qquad & \\
(\alpha^2+p\alpha+q)x-\alpha(\alpha^2+p\alpha+q) & \\
\hline
\alpha^3+p\alpha^2+q\alpha+r &
\end{array}
$$

因为 α 是多項式 $(3)'$ 的根，所以余式等于零：

$$\alpha^3+p\,\alpha^2+q\,\alpha+r=0.$$

如果多項式 $(3)'$ 还有一个根 α，那么它就应該是商式

$$x^2+(p+\alpha)x+(\alpha^2+p\,\alpha+q)$$

的根。用 α 代替 x，得

$$3\alpha^2+2p\alpha+q=0.$$

于是，我們看到，多項式(3)′的重根就是它和多項式

$$3x^2+2px+q \tag{6}$$

的公根。

多項式(6)称为多項式(3)′的**导数**或**微商**①。因此，一个三次多項式有无重根的問題就归結为这个多項式和它的导数有无公根的問題了。

对于 n 次多項式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n \tag{7}$$

也有类似的情形：n 次多項式(7)有无重根决定于它和它的导数

$$na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}$$

有无公根。

---

① 对于多項式(3)′，只要把它的各項中的 x^k ($k=3,2,1$) 换成 kx^{k-1}，就可以得到它的导数——多項式(6)。

想要进一步知道导数的一般概念及其求法的讀者，可参考樊映川編《高等数学讲义》第四章。

§ 3 特 征 数

假設給定的两个多項式f_1和f_2沒有公根（如果它們有公根，可以按上节方法求出約掉），作出f_1和f_2的图象（图3，f_1——图上的实綫，f_2——图上的虛綫），它們把平面分成两部分：加阴影的部分和未加阴影的部分，下面我們称加阴影的部分为**阴影域**。

在X軸上取横坐标为a和b的两点A和B. 将点A沿X軸向点B移动时，就会通过多項式f_1和f_2的根所在的那

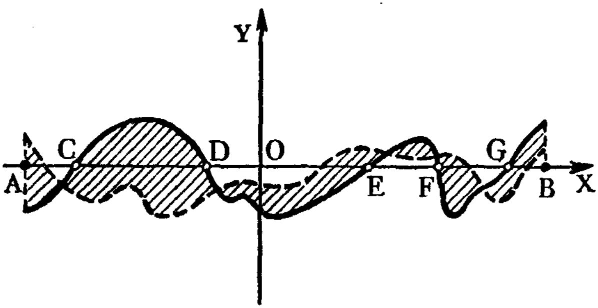


图 3

些点。在这些点中的某些点，A是从阴影域里出来，这些点称为**出点**；在另一些点是进入阴影域，这些点称为**入点**，必須指出，某点不可能既是入点又是出点（象图4中的点C那样），因为这样的点是多項式f_1和f_2的公根，我們已假設f_1和f_2

沒有公根。

在点 A、B 之間的多項式 f_1 的出点数和入点数的差，称为多項式 f_1 和 f_2 的特征数，用 (f_1, f_2) 来表示。

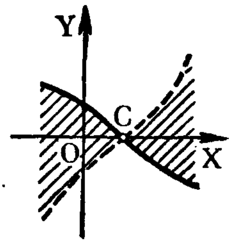


图 4

在图 3 上，点 D 和 E 是 f_1 的出点，而点 C、F 和 G 是它的入点。因此，f_1 和 f_2 的特征数是

$$(f_1, f_2)=2-3=-1.$$

显然，特征数除与 f_1 和 f_2 本身有关外，还与点 A 和 B 的位置有关，而且也与这两个多項式的次序有关。

(f_1, f_2) 与 (f_2, f_1) 有什么关系？

我們設想，P 是人在給定时間內走出房間的次数，Q 是走入的次数。显然，除最后一次外，在每次进去之后都跟着要出来，而在每次出来之后都跟着要进去。因此，不管人在里面还是在外面，出来的次数与进去的次数的差都不超过 1：

$$P-Q=e, \ (e=1, -1 \text{或} 0). \tag{8}$$

$e=1$：开始在里面，最后在外面；

$e=-1$：开始在外面，最后在里面；

$e=0$：开始和最后都在外面或都在里面（图 5）。

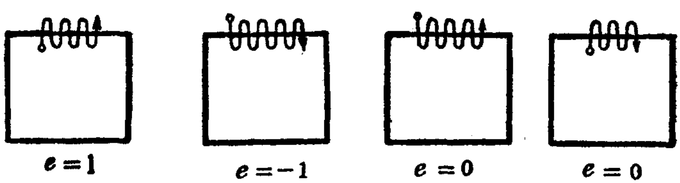


图 5

假設人可以由房間的兩扇門 Π_1 和 Π_2 进出。进出 Π_1 的次数为 P_1、Q_1，Π_2 的为 P_2、Q_2. 显然，通过两扇門进去和出来的总数是满足关系式(8)的：

$$(P_1+P_2)-(Q_1+Q_2)=e.$$

由此

$$(P_1-Q_1)+(P_2-Q_2)=e. \tag{9}$$

若将人进出房間与点进出阴影域类比，則門 Π_1 和 Π_2 分别相当于 f_1 和 f_2 的图象。因此

$$(f_1, f_2)=P_1-Q_1, \ (f_2, f_1)=P_2-Q_2.$$

代入(9)，即得

$$(f_1, f_2)+(f_2, f_1)=e. \tag{10}$$

§ 4 施斗姆列

設有多項式f_1和f_2：

$$f_1=f_1(x)=x^3-8x^2+19x-12,$$

$$f_2=f_2(x)=x^3-9x^2+27x-26.$$

用f_2除f_1：

$$\begin{array}{r|l}
x^3-8x^2+19x-12 & \underline{x^3-9x^2+27x-26} \\
 & 1 \\
\underline{x^3-9x^2+27x-26} & \\
x^2-8x+14 &
\end{array}$$

余式是$x^2-8x+14$。取

$$f_3=-(x^2-8x+14)=-x^2+8x-14.$$

用f_3除f_2：

$$\begin{array}{r|l}
x^3-9x^2+27x-26 & \underline{-x^2+8x-14} \\
\underline{x^3-8x^2+14x} & -x+1 \\
-x^2+13x-26 & \\
\underline{-x^2+8x-14} & \\
5x-12 &
\end{array}$$

余式是$5x-12$.取

$$f_4=-(5x-12)=-5x+12.$$

用f_4除f_3：

$$
\begin{array}{l|l}
-x^2+8x-14 & \underline{-5x+12} \\
-x^2+\frac{12}{5}x & \frac{1}{5}x-\frac{28}{25} \\
\hline
\qquad \frac{28}{5}x-14 & \\
\qquad \frac{28}{5}x-\frac{336}{25} & \\
\hline
\qquad\qquad -\frac{14}{25} &
\end{array}
$$

余式是$-\frac{14}{25}$. 取

$$f_5=-\left(-\frac{14}{25}\right)=\frac{14}{25}.$$

若再用f_5除f_4,則余式为零。

这样得到的多項式列

$$f_1, f_2, \cdots, f_k \tag{11}$$

称为多項式f_1和f_2的**施斗姆列**。其中f_k是最后一个不等于零的多項式。在我們的例子中,$k=5$.