HZ BOOKS

电子工程丛书

PEARSON Prentice Hall

工程电磁学基础

（原书第6版）

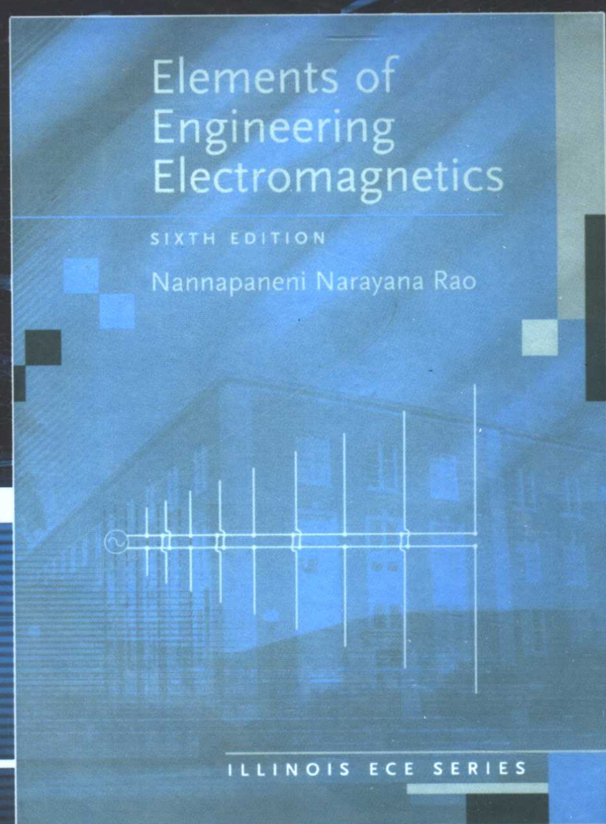
Elements of Engineering Electromagnetics

(Sixth Edition)

（美）Nannapaneni Narayana Rao 著

周建华 游佰强 译

游佰强 审校



Pearson Education

机械工业出版社
China Machine Press

电子工程丛书

工程电磁学基础

（原书第6版）

Elements of Engineering Electromagnetics

(Sixth Edition)

（美）Nannapaneni Narayana Rao 著
周建华　游佰强　译
游佰强　审校

机械工业出版社
China Machine Press

本书讲述电磁学的理论和基本公式，主要内容包括：矢量和场的基本概念、电场和磁场的概念、波的概念、时变场的麦克斯韦方程、传输线的时域分析和正弦稳态分析，以及与电子学、光子学相关的一些内容；最后还介绍了一些求解方法，如有限差分法、有限元法等；附录提供了电磁学的数学基础知识，可供读者学习本书前参考。

全书注重基础，强调应用，提供了大量的图表、公式、例题与习题，可帮助读者掌握复杂的概念。本书既可作为高等院校本科生或研究生的教材，也非常适合自学，还可供工程技术人员参考。

本书版权登记号：图字：01-2005-0523

图书在版编目（CIP）数据

工程电磁学基础（原书第6版）/（美）劳（Rao, N. N.）著；周建华等译. －北京：机械工业出版社，2006.9

（电子工程丛书）

书名原文：Elements of Engineering Electromagnetics, Sixth Edition

ISBN 7-111-18684-2

Ⅰ.工…　Ⅱ.①劳…　②周…　Ⅲ.电磁学　Ⅳ.O441

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 021008 号

机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街22号　邮政编码　100037）
责任编辑：武恩玉
北京瑞德印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行
2006年9月第1版第1次印刷
184mm×260mm·32.75 印张
定价：59.00 元

凡购本书，如有倒页、脱页、缺页，由本社发行部调换
本社购书热线：（010）68326294

译 者 序

本书为大学工科类本科学生讲解有关电路、电磁学、电子学、控制和数字系统等方面的内容。伊利诺伊大学 ECE 丛书正是开始于本书。目前,全世界的学生都基于 Internet 环境学习 ECE 课程。Rao 教授早年在华盛顿大学获得电气工程博士学位,于 1965 年加入伊利诺伊大学,现任伊利诺伊大学电气与计算机工程系教授,副系主任。本书第 1 版于 1977 年出版,在近 30 年间更新到了第 6 版,由于其历史悠久的实践基础已确立了国际知名度,Rao 教授也因为他在电磁学教学方面的出色贡献获得了一系列的重大奖项。

本书的基本内容建立在时变场及其工程应用上,充分利用了电场和磁场以及其他方面的类比性,系列版本的更新、增添资料进一步加强了应用,从而满足与新兴技术相关的迫切需求。本书作者根据多年的教学经验,在写作中立足于最基本的电磁理论,进行了浓缩提炼,融入了现代电磁场数值分析、辐射和天线原理、通信用传输线、光电子的导波原理等前沿内容。书中提供了极为丰富的教学素材和源于生活、实际科研开发的生动实例,讲解细致精辟,本书已成为国际上相关专业许多学生的教材或必读的辅导书。全书结构严谨,按知识点划分章节,每章内容分量相当并均附有小结,还辅之以关键字标注和大量实例、启发性的思考题、练习题和复习题,学生可以通过独立思考回答思考题和求解各种类型、不同难度的习题,巩固课堂所学知识。各章内容既有关联,又具有一定的独立性,故讲授相关课程的老师也可以将本书作为案头必备的参考书。

与国内目前已出版的电磁场与微波技术方面的编著、译著教科书相比,本书具有深入浅出、解说细致、适用范围广的特色,是大学高年级本科生或低年级研究生不可多得的教材之一,此外,也可作为电气、电子、控制和通信领域的工程师充实理论基础的精华读本。

译者在译文中更正了原书中的一些错误,并以译注的形式加以说明。游佰强副教授参与了本书第 10 章和第 11 章的翻译,还审校了全部译稿,林静也参与了本书第 11 章的翻译,在此一并表示衷心感谢。另外,还要感谢机械工业出版社华章分社相关工作人员的辛勤工作。本书能够顺利出版离不开各位的大力支持。

由于译者水平有限,而且只有 6 个月的时限,虽然尽了最大努力,错误和疏漏之处在所难免,恳请得到读者的指正。

周建华

于厦门大学

前 言

介绍有关工程电磁学方面内容的教材可以粗略地分为三类：

1）一学期制的教材，基于传统方法涵盖了静态电学和静态磁学，最后以麦克斯韦方程及其一些应用方面的讨论结束。

2）二学期制的教材，首先用一半或一半以上的篇幅涵盖了静态电学和静态磁学，剩余部分讨论与电磁波相关的一些内容。

3）一或二学期制的教材，偏离传统分析方法，其偏离程度和主旨取决于作者。

大部分的教材都可归于前两类，只有小部分教材（包括本书）属于第3类。这种对传统方法的偏离源自于本书第1版，就是一学期制的教材，其基本内容建立在时变场及其工程应用上。这就加强了本书对工程电磁学的一学期制学生的效用，同时使得计划上电磁学方面后续（选修的）课程的学生能够学到许多同样领域的概念，以及由传统分析方法提供的数学工具。

在准备本书第2版时，对于第1版的主要修订是为一或二学期制的使用而扩展教材内容，以提高选用教材的灵活性，而保留了第1版的基本原理。这是由于大部分学校均开设了工程物理课程，作为各领域中第一门电气工程（Electrical Engineering，EE）课程的先决条件，使学生在此接受到电学和磁学传统分析方法的熏陶。接下来的版本通过结合技术发展，不断增添内容，进一步增强了教材的实用性，从而满足跟踪新兴技术的首要需求。例如，随着光子学（photonics）时代的到来，以及光子学与电子学（electronics）的交叉，已经向超出微波的领域扩展，而且进入到电磁频谱的光学领域方面的需求不断增加，这促进了第4版内容的丰富与变化。在第5版中，通过重新组织内容并增加主题，将各章或部分章节的内容与电磁实用技术联系起来，从而进一步偏离了传统的分析方法。

对于电气工程与计算机工程专业，首要课程的主题的组织一直以来都是指导修订的重要因素，对于建立在此首要课程基础上的电气工程专业学生，后续还会有一门或更多门必修或选修课程。当为一学期课程写出第1版满足两种学生的需求时，主修电气工程的学生占很大比例，这种情形持续了许多年。直到最近几年，该比例发生很大变化，目前主修计算机工程的学生人数与主修电气工程的学生人数可相比拟，认识到这种发展，并为了使本书的预期用途比以往更明晰，本版将内容分成两大部分来进一步划分主题。

第一部分“电气工程和计算机工程的必备基础”，由6章内容构成：

第1章　矢量和场。

第2章　积分形式的麦克斯韦方程。

第3章　微分形式的麦克斯韦方程及自由空间中的均匀平面波。

第4章　材料介质中的场与波。

第5章　电磁位和电路与系统概念。

第6章　数字电子技术的传输线基础。

这些章节包含第5版的第1～8章中的基本内容，只是与第5版相比，其主题的构造和分析方法更趋

向时变场。

第二部分“必修/选修基础”,表示根据课程的需要来安排这部分内容是必修的还是选修的。第二部分由下面5章构成:

第7章　通信用传输线。

第8章　电子学与光电子学的导波原理。

第9章　电子学与光子学概论。

第10章　辐射和天线原理。

第11章　几种求解方法。

第7、8、9和10章内容分别与第5版中的第7、9、10和11章内容相同,只是在第7章中增加了有关有耗传输线的主题。第11章在第5版的第11章的基础上进行了扩展,除介绍4种数值方法外,还包括分离变量(separation of variable)的分析手段和场图绘制(field mapping)的几何方法。

下面是一些有关本书思路的重要特征,从目录很明显可以看出:

1. 刚开始时介绍矢量和场的基本概念,分静态和时变两种情况,随后根据需要引入矢量计算的概念。

2. 接着描述电场和磁场的概念,然后介绍时变场的麦克斯韦方程(先以积分形式,再以微分形式)。

3. 通过从无限大平面电流板求得均匀平面波的解来介绍波和与之相关联的概念,先在自由空间中讨论,然后在材料介质中讨论。

4. 介绍电磁位能并涵盖与元器件、电路和系统有关的主题,以pn结和电路元器件开始,通过电场和磁场系统发展到与电磁系统有关的其他一些概念。

5. 介绍传输线概念,并以循序渐进的方式展开传输线的时域分析(这部分内容对于数字电子技术是必要的),以电阻性负载开始到逻辑门之间的互联,最后以传输线上的串扰内容结束。

6. 表述传输线的正弦稳态分析,由驻波、谐振、能量转换以及匹配等概念构成,重点强调计算机和图形求解方法。

7. 逐步展开电子学和光电子学的导波原理,分析方法限于包括平行板金属波导和介质平板波导的一维波导。

8. 介绍与电子学和光子学有关的几个概念,包括二维金属波导和光纤、由色散引起的脉冲展宽、干涉和衍射以及在各向异性介质中波的传播。

9. 通过由矢量磁位求得赫兹振子的场全解来介绍辐射,然后逐步展开天线的基本概念。

10. 介绍几种求解方法,主要包含有限差分法、边界元法、有限元法以及时域有限差分法的数值解法,而且还包括变量分离的分析方法和基于场图绘制的几何方法。

和本书的前几版一样,本版采用了许多便于教学的辅助内容:

(1)分布在整个教材中的例子;

(2)有关场概念的实际应用和点缀在基本主题陈述之中的现象;

(3)适合课堂介绍的有关简单实验验证的描述;

(4)每一章的内容小结和复习思考题(Q);

(5)在每一节末尾的练习题(D);

(6)在每一节末尾的关键字(K);

(7)在每一章末尾的复习题(R)和作业习题(P)。

本书一共有108个例子、158个D习题、413个Q问题、422个P习题以及81个R习题,提供了40%的P习题的答案。

在此希望表达我对伊利诺伊大学厄巴纳-尚佩恩分校的60多位同仁的感谢,在本书出版后的26年间(1977年~2003年),他们一直在用本书的各个版本执教。还要感谢其他学校的众多使用者。如果没有我们系主任从我在1965年加入伊利诺伊大学以来提供给我的许多机会,这本书不可能得到改进,这些系主任包括已故的E. C. Jordan,还有G. W. Swenson、Jr.,E. W. Ernst、T. N. Trick、S. M. Kang以及R. E. Blahut。系里有许多人这些年来给予了很多支持,其中Sheryle Carpenter和Laurie Fisher以令人钦佩的工作方式,保证了在我从1987年担任系副主任期间办公室的平稳运作。几个版本的书稿打印都是由Kelly Collier迅速而熟练地完成的,与我的出版商Tom Robbins一起合作也一直很愉快,这种感觉从伊利诺伊ECE丛书初期阶段的努力工作,直到将本书作为丛书中的第一卷部分的制作过程。另外,为了我妻子Sarojini长期的理解和耐心,在此我向她深深地表示感激。

N. Narayana Rao

伊利诺伊大学厄巴纳-尚佩恩分校

目　录

第二部分 必修/选修基础

第一部分　电气工程和计算机工程的必备基础

第1章　矢 量 和 场

电磁学主要涉及电场和磁场的研究，很显然需要熟悉场的概念，特别是电场和磁场。这些场量是矢量，其规律遵循麦克斯韦方程组（Maxwell's equations）。鉴于麦克斯韦方程组的数理公式表述及其在工程电磁学基础学习中的后续应用，要求首先学习有关矢量数学处理的基本法则。基于此目的，本章就来总体介绍矢量和场，特别是电场和磁场。

首先不涉及坐标系，来学习矢量代数的一些简单法则，然后再介绍直角坐标系、柱面坐标系和球面坐标系。学习矢量代数法则后，再通过一些熟悉的例子专门讨论有关标量场与矢量场、静态场与时变场。在矢量和场的一般性介绍后，根据库仑和安培实验定律来学习电场和磁场的基本概念，举例说明有关由电荷分布产生的电场和由电流分布产生的磁场的计算。最后，结合电场和磁场的概念，介绍洛伦兹力方程，并利用该方程讨论带电粒子在电场和磁场中的运动。

1.1　矢量代数

在基础物理的学习中，接触了许多参量，如质量、温度、速度、加速度、作用力和电荷等。其中一些参量不仅涉及大小而且涉及在空间的方向，而另一些参量则只有大小特性。前一类参量称为矢量（vector），而后一类参量称为标量（scalar）。质量、温度和电荷属于标量，而速度、加速度和作用力则属于矢量，其他的标量还有电压和电流，矢量还有电场和磁场。

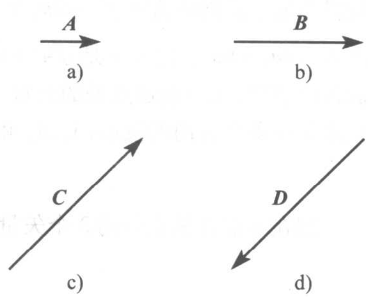
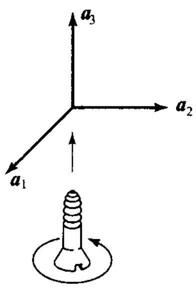


图 1-1　矢量的图示

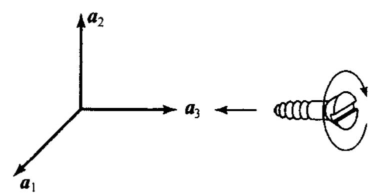
矢量用黑斜体字符表示（如 $\boldsymbol{A}$）以便与标量分清，标量用斜体字符表示（如 A）。在图形中，用带有指向 $\boldsymbol{A}$ 方向箭头的直线来表示矢量 $\boldsymbol{A}$，直线的长度与 $\boldsymbol{A}$ 的大小成正比，表示为 $|\boldsymbol{A}|$ 或简写为 A。图 1-1 以同一比例画了 4 个矢量。如果此页纸的上面代表北，则矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 指向东，$\boldsymbol{B}$ 的大小是 $\boldsymbol{A}$ 的 2 倍。矢量 $\boldsymbol{C}$ 指向东北，其大小是 $\boldsymbol{A}$ 的 3 倍，矢量 $\boldsymbol{D}$ 指向西南，其大小等于 $\boldsymbol{C}$ 的大小。由于 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 大小相等但方向相反，因此两个矢量互为反向。

由于在三维空间中矢量一般可能有任意取向，所以需要在空间中每个点处定义一组 3 个参考方向，由此描述画在该点处的矢量。选择这 3 个参考方向互相正交比较方便，例如向东、向北和向上或一个矩形房间的三条邻边。这样，来考虑 3 个互相正交的参考方向，将单位矢量（unit vector）沿此 3 个方向指向，如图 1-2a 所示。单位矢量具有单位（unity）大小，用符号 $\boldsymbol{a}$ 表示，并以下标指示其方向，这里采用下标 1、2 和 3 表示 3 个方向。注意，对于一个固定的 $\boldsymbol{a}_1$ 取向，$\boldsymbol{a}_2$ 和 $\boldsymbol{a}_3$ 的取向有两种组合可能，如图 1-2a 和 1-2b所示。如果取一右旋螺钉，将其从 $\boldsymbol{a}_1$ 向 $\boldsymbol{a}_2$ 转 90°角，如图 1-2a 所示，则它会沿 $\boldsymbol{a}_3$ 方向前进，但在图 1-2b 中则会沿 $\boldsymbol{a}_3$ 的反方向前进。相反，如图 1-2b 所示，当一左旋螺钉从 $\boldsymbol{a}_1$ 向 $\boldsymbol{a}_2$ 旋转时，则将会沿 $\boldsymbol{a}_3$ 方向

前进。因此图 1-2a 中的单位矢量组对应于右旋系统，而图 1-2b 中的单位矢量组则对应于左旋系统。本书将采用右旋系统。



a）右旋系统中的 3 个正交单位矢量组



b）左旋系统中的 3 个正交单位矢量组

图　1-2

非单位大小、沿任意参考方向的矢量可以用沿该方向的单位矢量表示。如图 1-3 所示，$4\boldsymbol{a}_1$ 表示沿 $\boldsymbol{a}_1$ 方向、4 个单位大小的矢量，$6\boldsymbol{a}_2$ 表示沿 $\boldsymbol{a}_2$ 方向、6 个单位大小的矢量，$-2\boldsymbol{a}_3$ 表示沿 $\boldsymbol{a}_3$ 的反方向、2 个单位大小的矢量。两个矢量的相加通过将第一个矢量的始端放在第二个矢量的末端来实现，并从第一个矢量的始端到第二个矢量的末端画出两个矢量之和。所以要将 $4\boldsymbol{a}_1$ 和 $6\boldsymbol{a}_2$ 相加，如图 1-3 所示，只需简单平移 $6\boldsymbol{a}_2$ 而不改变方向，一直到其始端与 $4\boldsymbol{a}_1$ 的末端重合。为明白这点，可以想像在一所矩形空房子的地板上，您正在从一个角落走向对面的另一个角落。为到达目的地，可以先沿一条边走，然后再沿第二条边走，另外也可以沿对角线直接走到目的地。以同样方式将 $-2\boldsymbol{a}_3$ 加到矢量 $(4\boldsymbol{a}_1+6\boldsymbol{a}_2)$ 上，则得到矢量 $(4\boldsymbol{a}_1+6\boldsymbol{a}_2-2\boldsymbol{a}_3)$，如图 1-3 所示。注意：$(4\boldsymbol{a}_1+6\boldsymbol{a}_2)$ 的大小是 $\sqrt{4^2+6^2}$，即 7.211；$(4\boldsymbol{a}_1+6\boldsymbol{a}_2-2\boldsymbol{a}_3)$ 的大小是 $\sqrt{4^2+6^2+2^2}$，即 7.483。与前面讨论相反，在一给定点处的矢量 $\boldsymbol{A}$ 就是 3 个矢量 $A_1\boldsymbol{a}_1$、$A_2\boldsymbol{a}_2$ 和 $A_3\boldsymbol{a}_3$ 的简单叠加，这些矢量是 $\boldsymbol{A}$ 在该点处沿 3 个参考方向的投影，A_1、A_2 和 A_3 称为 $\boldsymbol{A}$ 沿 1、2 和 3 方向的分量（component），因此有

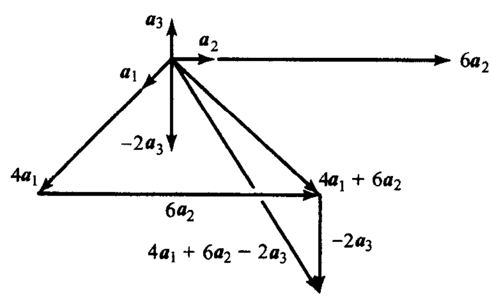


图 1-3　矢量的图形相加

$$\boxed{\boldsymbol{A}=A_1\boldsymbol{a}_1+A_2\boldsymbol{a}_2+A_3\boldsymbol{a}_3} \tag{1-1}$$

现在考虑在某点处的 3 个矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$，假设

$$\boldsymbol{A}=A_1\boldsymbol{a}_1+A_2\boldsymbol{a}_2+A_3\boldsymbol{a}_3 \tag{1-2a}$$

$$\boldsymbol{B}=B_1\boldsymbol{a}_1+B_2\boldsymbol{a}_2+B_3\boldsymbol{a}_3 \tag{1-2b}$$

$$\boldsymbol{C}=C_1\boldsymbol{a}_1+C_2\boldsymbol{a}_2+C_3\boldsymbol{a}_3 \tag{1-2c}$$

下面讨论有关这些矢量的几种代数运算。

矢量的加法和减法　由于两个矢量的一对相似分量是平行的，那么求这两个矢量之和只需简单将它们的 3 对相似分量相加即可。因此有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}&=(A_1\boldsymbol{a}_1+A_2\boldsymbol{a}_2+A_3\boldsymbol{a}_3)+(B_1\boldsymbol{a}_1+B_2\boldsymbol{a}_2+B_3\boldsymbol{a}_3)\\&=(A_1+B_1)\boldsymbol{a}_1+(A_2+B_2)\boldsymbol{a}_2+(A_3+B_3)\boldsymbol{a}_3\end{aligned} \tag{1-3}$$

矢量相减是矢量相加的特例，因此有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}&=\boldsymbol{B}+(-\boldsymbol{C})\\&=(B_1\boldsymbol{a}_1+B_2\boldsymbol{a}_2+B_3\boldsymbol{a}_3)+(-C_1\boldsymbol{a}_1-C_2\boldsymbol{a}_2-C_3\boldsymbol{a}_3)\\&=(B_1-C_1)\boldsymbol{a}_1+(B_2-C_2)\boldsymbol{a}_2+(B_3-C_3)\boldsymbol{a}_3\end{aligned} \tag{1-4}$$

矢量与标量的相乘和相除　矢量 $\boldsymbol{A}$ 乘以一个标量 m 等同于该矢量的重复相加，因此有

$$m\boldsymbol{A} = m(A_1\boldsymbol{a}_1 + A_2\boldsymbol{a}_2 + A_3\boldsymbol{a}_3) = mA_1\boldsymbol{a}_1 + mA_2\boldsymbol{a}_2 + mA_3\boldsymbol{a}_3 \tag{1-5}$$

矢量与标量相除是矢量与标量相乘的特例，因此有

$$\frac{\boldsymbol{B}}{n} = \frac{1}{n}(\boldsymbol{B}) = \frac{B_1}{n}\boldsymbol{a}_1 + \frac{B_2}{n}\boldsymbol{a}_2 + \frac{B_3}{n}\boldsymbol{a}_3 \tag{1-6}$$

矢量的大小　由图 1-3 的作图和相关的讨论，有

$$\boxed{|\boldsymbol{A}| = |A_1\boldsymbol{a}_1 + A_2\boldsymbol{a}_2 + A_3\boldsymbol{a}_3| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}} \tag{1-7}$$

沿 $\boldsymbol{A}$ 方向的单位矢量　单位矢量 $\boldsymbol{a}_A$ 的大小等于单位 1，方向与 $\boldsymbol{A}$ 相同，因此

$$\boxed{\boldsymbol{a}_A = \frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{A_1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{a}_1 + \frac{A_2}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{a}_2 + \frac{A_3}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{a}_3} \tag{1-8}$$

两个矢量的标积或点积　两个矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的标积(scalar product)或点积(dot product)是一个标量，其量值等于 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的大小与 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 之间夹角的余弦的乘积，在 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 之间加一个粗体点表示。因此，如果 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 之间的夹角为 α，则有

$$\boxed{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\alpha = AB\cos\alpha} \tag{1-9}$$

对单位矢量 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$ 和 $\boldsymbol{a}_3$，有

$$\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_1 = 1 \quad \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 = 0 \quad \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_3 = 0 \tag{1-10a}$$

$$\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_1 = 0 \quad \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_2 = 1 \quad \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_3 = 0 \tag{1-10b}$$

$$\boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{a}_1 = 0 \quad \boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{a}_2 = 0 \quad \boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{a}_3 = 1 \tag{1-10c}$$

注意到 $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A(B\cos\alpha) = B(A\cos\alpha)$，可见点积运算是由一个矢量的大小乘以一个标量构成，该标量是由第二个矢量在第一个矢量上的投影得到的，如图 1-4a 和图 1-4b 所示。由于

$$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = BA\cos\alpha = AB\cos\alpha = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \tag{1-11}$$

所以点积运算是可交换的，还满足分配性，正如从图 1-4c 的作图可以看到，$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$ 在 $\boldsymbol{A}$ 上的投影等于 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 分别在 $\boldsymbol{A}$ 上的投影之和。因此

$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} \tag{1-12}$$

利用此性质，得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} &= (A_1\boldsymbol{a}_1 + A_2\boldsymbol{a}_2 + A_3\boldsymbol{a}_3) \cdot (B_1\boldsymbol{a}_1 + B_2\boldsymbol{a}_2 + B_3\boldsymbol{a}_3) \\ &= A_1\boldsymbol{a}_1 \cdot B_1\boldsymbol{a}_1 + A_1\boldsymbol{a}_1 \cdot B_2\boldsymbol{a}_2 + A_1\boldsymbol{a}_1 \cdot B_3\boldsymbol{a}_3 \\ &\quad + A_2\boldsymbol{a}_2 \cdot B_1\boldsymbol{a}_1 + A_2\boldsymbol{a}_2 \cdot B_2\boldsymbol{a}_2 + A_2\boldsymbol{a}_2 \cdot B_3\boldsymbol{a}_3 \\ &\quad + A_3\boldsymbol{a}_3 \cdot B_1\boldsymbol{a}_1 + A_3\boldsymbol{a}_3 \cdot B_2\boldsymbol{a}_2 + A_3\boldsymbol{a}_3 \cdot B_3\boldsymbol{a}_3\end{aligned}$$

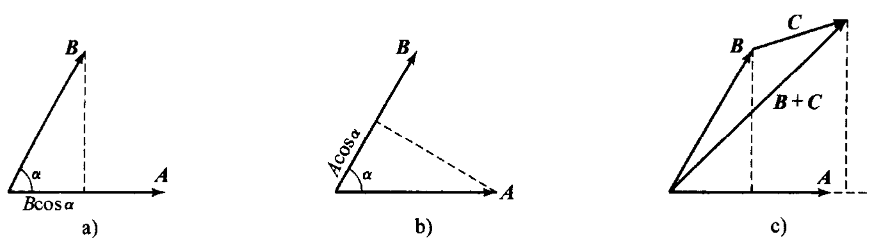


图 1-4

a) 和 b) 说明两个矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的点积是一个矢量的大小与第二个矢量在第一个矢量上的投影相乘的积；c) 证明点积运算的分配性

因此利用关系式(1-10a)~式(1-10c)，得到

$$\boxed{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3} \tag{1-13}$$

两个矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的点积是两个矢量对应分量乘积之和。

从式(1-9)和式(1-13)注意到，矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 之间的夹角为

$$\alpha = \cos^{-1}\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{AB} = \cos^{-1}\frac{A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3}{AB} \tag{1-14}$$

所以可利用点积运算来求出两个矢量之间的夹角。特别是，如果 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 = 0$，则可以断定这两个矢量互相垂直。

两个矢量的矢积或叉积　两个矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的矢积(vector product)或叉积(cross product)是矢量，其量值等于 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的大小与 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 之间锐角 α 的正弦的乘积，其方向则垂直于由 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 构成的平面，并指向一个右旋螺钉从 $\boldsymbol{A}$ 向 $\boldsymbol{B}$ 转 α 角时前进的一侧，如图 1-5 所示。在 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 之间加一个粗体的乘号表示矢量的矢积或叉积。因此，如果 $\boldsymbol{a}_N$ 是沿此右旋螺钉前进方向的单位矢量，则有

$$\boxed{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\alpha\,\boldsymbol{a}_N = AB\sin\alpha\,\boldsymbol{a}_N} \tag{1-15}$$

对于单位矢量 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$ 和 $\boldsymbol{a}_3$，有

$$\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{0} \qquad \boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_3 \qquad \boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_3 = -\boldsymbol{a}_2 \tag{1-16a}$$

$$\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_1 = -\boldsymbol{a}_3 \qquad \boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{0} \qquad \boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_1 \tag{1-16b}$$

$$\boldsymbol{a}_3\times\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_2 \qquad \boldsymbol{a}_3\times\boldsymbol{a}_2 = -\boldsymbol{a}_1 \qquad \boldsymbol{a}_3\times\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0} \tag{1-16c}$$

注意两个相同单位矢量的叉积是零矢量 $\boldsymbol{0}$，即分量全部为零的矢量。如果以 $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2$ 方式排列这些单位矢量，则在向右行进时，任意两个连续的单位矢量的叉积即为下一个单位矢量。而在向左行进时，任意两个连续的单位矢量的叉积是下一个单位矢量的反向。

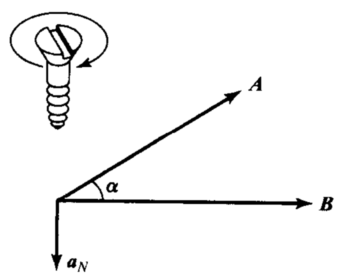


图 1-5　叉积运算 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$

叉积运算是不可交换的，因为

$$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}|\sin\alpha(-\boldsymbol{a}_N) = -AB\sin\alpha\boldsymbol{a}_N = -\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} \tag{1-17}$$

叉积运算满足分配性(在本节后面将给出证明)，因此

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C} \tag{1-18}$$

利用此性质和关系式(1-16a)~式(1-16c)，得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} &= (A_1\boldsymbol{a}_1 + A_2\boldsymbol{a}_2 + A_3\boldsymbol{a}_3)\times(B_1\boldsymbol{a}_1 + B_2\boldsymbol{a}_2 + B_3\boldsymbol{a}_3)\\ &= A_1\boldsymbol{a}_1\times B_1\boldsymbol{a}_1 + A_1\boldsymbol{a}_1\times B_2\boldsymbol{a}_2 + A_1\boldsymbol{a}_1\times B_3\boldsymbol{a}_3 + A_2\boldsymbol{a}_2\times B_1\boldsymbol{a}_1 + A_2\boldsymbol{a}_2\times B_2\boldsymbol{a}_2\\ &\quad + A_2\boldsymbol{a}_2\times B_3\boldsymbol{a}_3 + A_3\boldsymbol{a}_3\times B_1\boldsymbol{a}_1 + A_3\boldsymbol{a}_3\times B_2\boldsymbol{a}_2 + A_3\boldsymbol{a}_3\times B_3\boldsymbol{a}_3\\ &= A_1B_2\boldsymbol{a}_3 - A_1B_3\boldsymbol{a}_2 - A_2B_1\boldsymbol{a}_3 + A_2B_3\boldsymbol{a}_1 + A_3B_1\boldsymbol{a}_2 - A_3B_2\boldsymbol{a}_1\\ &= (A_2B_3 - A_3B_2)\boldsymbol{a}_1 + (A_3B_1 - A_1B_3)\boldsymbol{a}_2 + (A_1B_2 - A_2B_1)\boldsymbol{a}_3\end{aligned}$$

这可以表示为行列式形式，即

$$\boxed{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3\\ A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix}} \tag{1-19}$$

叉积运算可用于计算在某点处垂直于两个给定矢量的单位矢量,这可以通过重新整理式(1-15)看出,即

$$\boxed{\boldsymbol{a}_N = \frac{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}}{AB\sin\alpha} = \frac{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|}} \tag{1-20}$$

矢量三重叉积 三重叉积(triple cross product)涉及3个矢量的两个叉积运算。在进行矢量的三重叉积运算中必须注意其中运算的次序,即$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$一般并不等于$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}$,这一点很重要。这可以通过一个有关单位矢量的简单例子来说明。由此,如果$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{a}_1$和$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{a}_2$,则有

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{a}_1\times(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2) = \boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_3 = -\boldsymbol{a}_2$$

而

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_1)\times\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{0}\times\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{0}$$

标量三重积 标量三重积(scalar triple product)涉及3个矢量的一个点积运算和一个叉积运算,如$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$。这里不必加括号,因为计算的顺序只有一种方式,即首先计算$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$,再将得到的矢量与$\boldsymbol{A}$进行点积运算。如果先进行点积运算将是毫无意义的,因为点积运算得到的结果是一个标量,这样就没有办法再进行叉积运算了。由式(1-19)得到

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C} = (A_1\boldsymbol{a}_1 + A_2\boldsymbol{a}_2 + A_3\boldsymbol{a}_3)\cdot\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix}$$

由式(1-13)又得到

$$\boxed{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C} = \begin{vmatrix}A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix}} \tag{1-21}$$

如果式(1-21)中右边行列式的行以循环方式互换,此行列式的值保持不变,则

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} \tag{1-22}$$

标量三重积具有几何意义,其绝对值是以这3个矢量为3条邻边的平行六面体的体积,这将在1.2节中说明。

现在将利用式(1-22)证明叉积运算满足分配律。考虑$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$,如果$\boldsymbol{D}$是任意矢量,则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) &= (\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\cdot(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{A})\\ &= \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C} = \boldsymbol{D}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C})\end{aligned}$$

此处用到了点积运算的分配性。由于此等式对任意$\boldsymbol{D}$都满足,所以就有

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$$

例 1.1 矢量代数运算

假设3个矢量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2\\ \boldsymbol{B} &= \boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 - 2\boldsymbol{a}_3\\ \boldsymbol{C} &= \boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_3\end{aligned}$$

来进行几种矢量代数运算:

(a) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)+(\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2-2\boldsymbol{a}_3) = 2\boldsymbol{a}_1+3\boldsymbol{a}_2-2\boldsymbol{a}_3$

(b) $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2-2\boldsymbol{a}_3)-(\boldsymbol{a}_2+2\boldsymbol{a}_3) = \boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2-4\boldsymbol{a}_3$

(c) $4\boldsymbol{C} = 4(\boldsymbol{a}_2+2\boldsymbol{a}_3) = 4\boldsymbol{a}_2+8\boldsymbol{a}_3$

(d) $|\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2-2\boldsymbol{a}_3| = \sqrt{(1)^2+(2)^2+(-2)^2} = 3$

(e) $\boldsymbol{i}_B = \dfrac{\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{B}|} = \dfrac{\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2-2\boldsymbol{a}_3}{3} = \dfrac{1}{3}\boldsymbol{a}_1+\dfrac{2}{3}\boldsymbol{a}_2-\dfrac{2}{3}\boldsymbol{a}_3$

(f) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)\cdot(\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2-2\boldsymbol{a}_3)=(1)(1)+(1)(2)+(0)(-2)=3$

(g) $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 之间的夹角 $=\cos^{-1}\dfrac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{AB}=\cos^{-1}\dfrac{3}{(\sqrt{2})(3)}=45°$

(h) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -2\end{vmatrix}=(-2-0)\boldsymbol{a}_1+(0+2)\boldsymbol{a}_2+(2-1)\boldsymbol{a}_3=-2\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$

(i) 垂直于 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的单位矢量 $=\dfrac{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|}=-\dfrac{2}{3}\boldsymbol{a}_1+\dfrac{2}{3}\boldsymbol{a}_2+\dfrac{1}{3}\boldsymbol{a}_3$

(j) $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3\\ -2 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=3\boldsymbol{a}_1+4\boldsymbol{a}_2-2\boldsymbol{a}_3$

(k) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -2\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=(1)(6)+(1)(-2)+(0)(1)=4$

■

K1.1　标量；矢量；单位矢量；右旋系统；矢量的分量；矢量加法；矢量与标量的乘法；矢量的大小；点积；叉积；三重叉积；标量三重积。

D1.1　矢量 $\boldsymbol{A}$ 的大小为 4 个单位并指向北，矢量 $\boldsymbol{B}$ 的大小为 3 个单位并指向东，矢量 $\boldsymbol{C}$ 的大小为 4 个单位并由西指向南 30°。求：(a) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}$；(b) $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|$；(c) $3\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{B}+3\boldsymbol{C}$；(d) $\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C})$；(e) $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$。

答案：(a) 4 个单位，指向北朝西 60°；(b) 5；(c) 6.212 个单位，指向北朝东 15°；(d) 10.392；(e) 24 个单位，指向西。

D1.2　假设 3 个矢量为

$$\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$$
$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3$$
$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2+3\boldsymbol{a}_3$$

求：(a) $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{C}|$；(b) 沿 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})$ 的单位矢量；(c) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$；(d) $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$；(e) $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$。

答案：(a) 13；(b) $(2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2-2\boldsymbol{a}_3)/3$；(c) 10；(d) $5\boldsymbol{a}_1-4\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$；(e) 8。

D1.3　假设 3 个矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2+2\boldsymbol{a}_3$$
$$\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2-2\boldsymbol{a}_3$$
$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$$

求：(a) $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$；(b) $\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})$；(c) $\boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$。

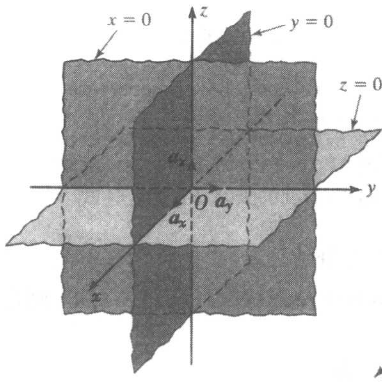
答案：(a) $2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2-2\boldsymbol{a}_3$；(b) $\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2+2\boldsymbol{a}_3$；(c) $-3\boldsymbol{a}_1-3\boldsymbol{a}_2$。

1.2　笛卡儿坐标系

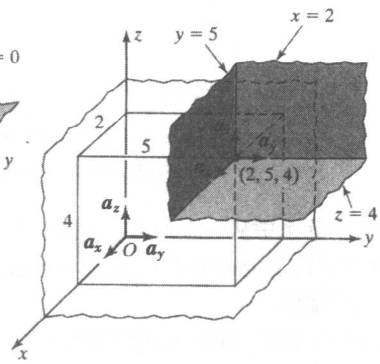
在 1.1 节中，介绍了表示空间中某点处矢量的方法，即根据它沿一组 3 个互相正交的方向的矢量分量表示，此 3 个方向用该点处 3 个互相正交的单位矢量定义。现在要将空间中某点处的矢量与另一点处的矢量联系起来，必须在空间中每个点处定义一组 3 个参考方向。以对称方式操作的话，需要使用坐标系。虽然有多种不同的坐标系，这里将只涉及其中 3 种，即笛卡儿坐标系、柱面坐标系和球面坐标系。笛卡儿坐标系(Cartesian coordinate system)也称为直角坐标系(rectangular coordinate system)，是 3 种坐标系中最简单的一种，因为它涉及的几何很简单，用来研究许多工程电磁学的原理已经足够了。本节介绍笛

卡儿坐标系，而柱面坐标系和球面坐标系留待 1.3 节介绍。

用一组 3 个互相正交的平面定义笛卡儿坐标系，如图 1-6a 所示。3 个平面交叉的点称为原点（origin）O，原点是在空间中放置的任何其他点的参考点。每一对平面交叉于一条直线，所以 3 个平面就定义了 3 条直线，由此构成坐标轴。这些坐标轴表示为 x、y 和 z 轴，x、y 和 z 的值从原点开始测量，所以原点的坐标为（0,0,0），即 $x=0$、$y=0$ 和 $z=0$，x、y 和 z 的值沿对应坐标轴增加的方向用箭头指示。同样用一组 3 个方向来建立一组 3 个单位矢量，表示为 $\boldsymbol{a}_x$、$\boldsymbol{a}_y$ 和 $\boldsymbol{a}_z$，如图 1-6a 所示用于描述在原点处所画的矢量。注意选择正的 x、y 和 z 方向，从而构成右旋系统，即符合 $\boldsymbol{a}_x \times \boldsymbol{a}_y = \boldsymbol{a}_z$ 的系统。



a）定义坐标系的 3 个正交平面



b）笛卡儿坐标系中的单位矢量是均匀的

图 1-6 笛卡儿坐标系

在这 3 个平面的其中一个之上，如 yz 平面在 x 的值是常数并等于零，为原点处的值，这是由于在此平面上的移动不需要沿 x 方向进行。同样，在 zx 平面上，y 的值是常数并等于零，而在 xy 平面上，z 的值是常数并等于零。现在用 3 个平面的交叉点给出除原点外的任意点为

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \text{常数} \\ y &= \text{常数} \\ z &= \text{常数} \end{aligned}} \tag{1-23}$$

具体通过对坐标值增加相应的量获得。例如，将 $x=0$ 平面沿 x 的正方向移动 2 个单位，将 $y=0$ 平面沿 y 的正方向移动 5 个单位，将 $z=0$ 平面沿 z 的正方向移动 4 个单位，则分别在 $x=2$、$y=5$ 和 $z=4$ 处得到平面，如图 1-6b 所示，其交叉点在（2,5,4）处。这些平面对的交叉确定了 3 条直线，沿此可以建立单位矢量 $\boldsymbol{a}_x$、$\boldsymbol{a}_y$ 和 $\boldsymbol{a}_z$，x、y 和 z 的值分别沿这些方向增加，用来描述在该点处所画的矢量。这些单位矢量平行于在原点处所画的相应单位矢量，从图 1-6b 可看出，对于笛卡儿坐标系空间中的任意点也是如此。所以笛卡儿坐标系中 3 个单位矢量的每一个在空间所有点处方向都相同，但柱面坐标系和球面坐标系中单位矢量并不都具有这种特性，这在 1.3 节中将会看到。

将 1.1 节中所学的内容应用到笛卡儿坐标系中的矢量，是一种简单的方式。所有要做的就是将表示单位矢量的下标 1、2 和 3 以及沿这些单位矢量的分量分别用下标 x、y 和 z 代替，还要利用 $\boldsymbol{a}_x$、$\boldsymbol{a}_y$ 和 $\boldsymbol{a}_z$ 是均匀矢量的性质。例如，表述从点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 到点 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 所画的矢量 $\boldsymbol{R}_{12}$，如图 1-7 所示。注意，从原点到点 P_1 所画的位置矢量 $\boldsymbol{r}_1$ 为

$$\boldsymbol{r}_1 = x_1\boldsymbol{a}_x + y_1\boldsymbol{a}_y + z_1\boldsymbol{a}_z \tag{1-24a}$$

之所以称为**位置矢量**（position vector），是因为它定义了空间中的点相对于原点的位置。类似地，从原点到点 P_2 所画的位置矢量 $\boldsymbol{r}_2$ 为

$$\boldsymbol{r}_2 = x_2\boldsymbol{a}_x + y_2\boldsymbol{a}_y + z_2\boldsymbol{a}_z \tag{1-24b}$$

由于根据矢量加法法则，$\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{R}_{12} = \boldsymbol{r}_2$，所以得到矢量 $\boldsymbol{R}_{12}$ 为