高等学校金融保险系列教材

寿险精算学

Life Insurance Actuarial Science

（修订版）

■ 熊福生 沈治中 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

高等学校金融保险系列教材

寿险精算学（修订版）

Life Insurance Actuarial Science

■ 熊福生　沈治中　编著

武汉大学出版社
WUHAN UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

寿险精算学/熊福生,沈治中编著.—修订版.—武汉:武汉大学出版社,2006.9

高等学校金融保险系列教材

ISBN 7-307-05183-4

Ⅰ.寿…　Ⅱ.①熊…　②沈…　Ⅲ.人寿保险—精算学—高等学校—教材　Ⅳ.F840.62

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第095295号

责任编辑:柴　艺　　　责任校对:王　建　　　版式设计:支　笛

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)

(电子邮件:wdp4@whu.edu.cn　网址:www.wdp.com.cn)

印刷:湖北鄂东印务有限公司

开本:787×980　1/16　印张:22.125　字数:403千字

版次:2003年11月第1版　　2006年9月修订版

2006年9月修订版第1次印刷

ISBN 7-307-05183-4/F·1001　　定价:30.00元

前　言

寿险精算是以概率论和数理统计为工具,研究人寿保险中的寿命分布规律,寿险赔付分布规律,保险费率的厘定,责任准备金的计提,保单现金价值的计算和养老保险计划的安排等问题的一门学科。随着我国保险业的飞速发展和全面对外开放,保险市场对精算专业人才和懂精算的保险从业人员的需求将大大增加,不仅如此,精算技术还广泛应用于金融、投资、财务管理、社会保障等方面。为了适应培养大批精算专业人才的需要、促进我国精算学教育的发展,我们特编写此教材。

本书是在我们几年前编写的《寿险精算学》教材的基础上,通过总结多年来的教学实践经验,重新修订、修改、编写而成的,并采用了国家保监局最新公布的《中国人寿保险业经验生命表(2000~2003年)》、(测试版)及其换算函数表。

本教材系统地介绍了寿险精算的基本知识、基本技能和基本方法。在阐述保险精算原理的同时,力求深入浅出、循序渐进、通俗易懂。本书可作为高等院校保险精算专业、社会保险、金融、投资、财务管理等其他相关专业的教材和参考书,也可作为商业保险、社会保险等从业人员和养老基金、企业年金等管理人员以及对此感兴趣的读者自学参考书。

本书共十章。第一章、第二章为基础部分,分别介绍了寿险精算中要考虑的两个重要因素——死亡率和利率。第三章至第七章是主干部分,分别讨论了寿险精算中保费的确定,责任准备金的计提,保单现金价值的计算等问题。第八章至第十章是更深层次的部分,主要讨论多元生命和多重因素条件下的寿险精算及养老保险精算等问题。对书中各章节的具体内容和练习题,读者可根据自己的学习目标和基础、兴趣作出相应取舍。

本教材由熊福生和沈治中编写,熊福生执笔撰写第一、三、四、八、九、十章,沈治中执笔撰写第二、五、六、七章。因水平所限,书中定有遗漏、缺陷甚至错误之处,敬请读者批评批正。

编者

2006年8月16日

目　　录

第一章　生存分布理论基础

人寿保险是以人的寿命为保险标的，以被保险人在一定时期内的生存或死亡为保险金的给付条件的保险。因此，被保险人的寿命分布状况，也就是被保险人能存活多久，他在各个年龄段的死亡率有多大等情况是保险人所关心的问题。事实上，在人寿保险中，从保险费率的厘定，责任准备金的计提，保单现金价值的计算到保单红利的分配，等等，都必须考虑一个重要的因素——死亡率。而各个年龄段的死亡率就构成了一个生命表。这就是说，人寿保险中的所有相关计算都是建立在生命表的基础之上的。

寿险精算学的主要任务正是解决人寿保险中有关保险费率的厘定，责任准备金的计提，保单现金价值等计算问题的，因此，研究人类寿命的分布规律，讨论生命表构造情况是寿险精算学的基础。本章作为寿险精算学的基础之一，将对寿命的概率分布与生存函数，死亡率与生命表的构造方法，死(亡)力的概念以及非整数年龄的生存分布假设等问题展开讨论，为后面解决寿险产品的费率厘定，责任准备金的计算等问题作准备。

第一节　寿命与生存分布

如果算命先生真的能够预测一个人的寿命有多长，那么，人寿保险公司需要的不是精算师，而是算命先生。但事实并非如此，世界上没有那么神奇的人真正能够预测某个被保险人的确切寿命。然而，寿险公司的承保对象是数以万计的，在如此众多的人数中，必定存在着某种程度的统计规律性，这就是所谓的“大数法则”。寿险精算就是要利用这种大数法则，从概率论和数理统计的角度来研究和揭示这些统计规律性，用以解决寿险精算中的实际问题。

一、寿命的概率分布与生存函数

一个人的寿命是从出生到死亡的时间长度，它是无法事先确定的，这在概率论上称为随机变量，并可记为 X。这里 $X\geqslant 0$，且为连续型随机变量。

虽然不能确定一个人的寿命有多长，但是如果能够了解到有关寿命的某些

信息,则是很有用的,例如:一个新生儿活过 60 岁的概率,x 岁的人在未来一年内死亡的概率,人的平均寿命,等等。对于这两个概率可以分别用数学式子 $\Pr\{X>60\}$,$\Pr\{x<X\leqslant x+1\mid X>x\}$ 表示,平均寿命则可用 X 的数学期望 $E(X)$ 表示。

要求这些概率和数学期望,关键在于了解 X 的分布。现将 X 的分布函数记为 $F(x)$,即:

$$F(x) = \Pr\{X \leqslant x\}, \qquad x \geqslant 0 \tag{1-1}$$

这就是寿命 X 的概率分布函数,它表示 0 岁的人在 x 岁之前死亡的概率。我们总假定 $F(0)=0$。如果将 X 的概率密度函数记为 $f(x)$,则:

$$f(x) = F'(x), \quad x \geqslant 0 \tag{1-2}$$

它体现了某人在 x 岁时死亡的可能性。这样,平均寿命可表示为:

$$E(X) = \int_0^\infty x f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1-3}$$

在寿险精算学中,经常用另一个函数来描述寿命的概率分布,这个函数定义为:

$$S(x) = \Pr\{X > x\}, x \geqslant 0 \tag{1-4}$$

称其为生存函数(survival function),表示 0 岁的人生存到 x 岁以后的概率。显然,生存函数与分布函数有如下关系:

$$S(x) = 1 - F(x), \quad x \geqslant 0 \tag{1-5}$$

X 的概率密度也可表示为:

$$f(x) = -S'(x), \quad x \geqslant 0 \tag{1-6}$$

因为我们假定 $F(0)=0$,所以 $S(0)=1$,这意味着只对那些出生时是活着的婴儿进行统计。

任何人不可能长生不老,也就是说人的寿命是有限的。在寿险精算学中,用 ω 表示极限年龄,即人的寿命介于 0 与 ω 之间($0\leqslant X\leqslant\omega$),且 $S(\omega)=0$。当 $x>\omega$ 以后,也定义 $S(\omega)=0$。通常假定 $\omega=100$ 或 $\omega=105$ 或 $\omega=110$(本书根据我国最新生命表,假定为 $\omega=105$)。根据 $S(x)$ 的定义可知:$S(x)$ 是一个单调递减的连续函数。$S(x)$ 的一般图形如图 1-1 所示。

例【1-1】 用 X 的分布函数与生存函数表示:

(1)0 岁的人活不过 60 岁的概率;

(2)0 岁的人活过 60 岁的概率;

(3)0 岁的人的寿命在 60 岁到 80 岁间的概率;

(4)60 岁的人在未来一年内死亡的概率;

(5)60 岁的人的寿命不超过 80 岁的概率。

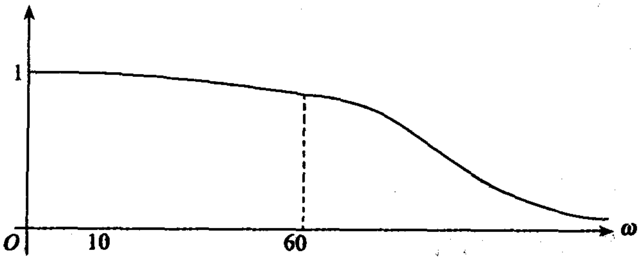

图 1-1 生存函数

解:(1) $\Pr\{X \leqslant 60\} = F(60) = 1 - S(60)$

(2) $\Pr\{X > 60\} = S(60) = 1 - F(60)$

(3) $\Pr\{60 < X < 80\} = F(80) - F(60) = S(60) - S(80)$

(4) $$\Pr\{60 < X \leqslant 61 \mid X > 60\} = \frac{\Pr\{60 < X \leqslant 61 \cap X > 60\}}{\Pr\{X > 60\}} = \frac{\Pr\{X \leqslant 61\} - \Pr\{X \leqslant 60\}}{1 - \Pr\{X \leqslant 60\}} = \frac{F(61) - F(60)}{1 - F(60)} = \frac{S(60) - S(61)}{S(60)}$$

(5) $$\Pr\{X \leqslant 80 \mid X > 60\} = \frac{\Pr\{X \leqslant 80 \cap X > 60\}}{\Pr\{X > 60\}} = \frac{\Pr\{X \leqslant 80\} - \Pr\{X \leqslant 60\}}{1 - \Pr\{X \leqslant 60\}} = \frac{F(80) - F(60)}{1 - F(60)} = \frac{S(60) - S(80)}{S(60)}$$

例【1-2】 如果生存函数 $S(x) = 1 - \frac{x}{105}(0 \leqslant x \leqslant 105)$,求上例中的值和平均寿命。

解:(1) $F(60) = 1 - S(60) = \frac{60}{105} = \frac{4}{7}$

(2) $S(60) = 1 - \frac{60}{105} = \frac{3}{7}$

(3) $S(60) - S(80) = \frac{80}{105} - \frac{60}{105} = \frac{4}{21}$

(4) $\frac{S(60) - S(61)}{S(60)} = \frac{61 - 60}{105 - 60} = \frac{1}{45}$

(5) $\frac{S(60)-S(80)}{S(60)}=\frac{80-60}{105-60}=\frac{20}{45}$

其平均寿命为：

$$E(X)=\int_0^{\omega}x\cdot[-S'(x)]\mathrm{d}x=\int_0^{105}\frac{x}{105}\mathrm{d}x=57.5$$

二、余命的概念分布与生存函数

在寿险实务中，绝大多数被保险人在投保时的年龄不是0岁，而往往是已经活到 x 岁的人，与其说寿险公司关心一个人的寿命 X 的分布，不如说更关心年龄为 x 岁的人剩余寿命 $X-x$ 的分布。我们用 (x) 表示一个 x 岁的人，$T(x)=X-x$ 表示这个人的剩余寿命，简称为余命(future lifetime)，在不致引起混淆的情况下也简记为 T。

在考虑 (x) 的余命 T 时，我们已经知道这个人活到了 x 岁，即已知 $X>x$。那么，T 的分布就是已知 $X>x$ 时 X 的条件分布，有关 T 的概率就是已知 $X>x$ 时相应的 X 的条件概率。若 T 的分布函数记为 $F_x(t)$，则有：

$$\begin{aligned}F_x(t)&=\Pr\{T\leqslant t\},\quad t\geqslant 0\\&=\Pr\{X-x\leqslant t\mid X>x\}\\&=\Pr\{x<X\leqslant x+t\mid X>x\}\\&=\frac{F(x+t)-F(x)}{1-F(x)}\\&=\frac{S(x)-S(x+t)}{S(x)},\quad t\geqslant 0\end{aligned}\tag{1-7}$$

若 T 的生存函数记为 $S_x(t)$，则有：

$$\begin{aligned}S_x(t)=1-F_x(t)&=\frac{1-F(x+t)}{1-F(x)}\\&=\frac{S(x+t)}{S(x)},\quad t\geqslant 0\end{aligned}\tag{1-8}$$

若 T 的概率密度函数记为 $f_x(t)$，则有：

$$\begin{aligned}f_x(t)&=F_x'(t)=-S_x'(t)\\&=-\frac{S'(x+t)}{S(x)},\quad t\geqslant 0\end{aligned}\tag{1-9}$$

若用 $\mathring{e}_x$ 表示 T 的平均余命，则：

$$\begin{aligned}\mathring{e}_x=E_x[T]&=\int_0^{\infty}t\cdot f_x(t)\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\infty}t\cdot F_x'(t)\mathrm{d}t=-\int_0^{\infty}t\cdot S_x'(t)\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{1-10}$$

可以证明：

$$\mathring{e}_x = \int_0^{\infty} [1 - F_x(t)] \mathrm{d}t = \int_0^{\infty} S_x(t) \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{S(x)} \int_0^{\infty} S(x+t) \mathrm{d}t \tag{1-11}$$

显然，当 $x=0$ 时，则有：

$$\mathring{e}_0 = E[x] = \int_0^{\infty} [1 - F(t)] \mathrm{d}t = \int_0^{\infty} S(t) \mathrm{d}t \tag{1-12}$$

注意：式(1-10)与式(1-11)中的积分上限并不需要到∞，而只需要到 $\omega - x$ 即可。

例【1-3】 已知生存函数 $S(x) = 1 - \frac{x}{100} (0 \leqslant x \leqslant 100)$，求：

(1)(x)活过 t 年的概率；

(2)(x)的未来余命的概率密度函数；

(3)(30)在 60 岁内死亡的概率；

(4)(30)的寿命在 60 岁到 80 岁之间的概率；

(5)(0)的平均余命(寿命)；

(6)(30)的平均余命。

解：

(1)$S_x(t) = \frac{S(x+t)}{S(x)} = \frac{100 - x - t}{100 - x}$

(2)$f_x(t) = -\frac{S'(x+t)}{S(x)} = \frac{1}{100 - x}$

(3)$F_{30}(30) = 1 - S_{30}(30) = 1 - \frac{40}{70} = \frac{3}{7}$

(4)$\Pr\{30 < T < 50\} = F_{30}(50) - F_{30}(30) = \frac{50}{70} - \frac{30}{70} = \frac{2}{7}$

(5)$\mathring{e}_0 = E[X] = \int_0^{\infty} x \cdot \frac{1}{100 - 0} \mathrm{d}x = 50$

(6)$\mathring{e}_{30} = \int_0^{+\infty} t \cdot f_x(t) \mathrm{d}t = \int_0^{70} t \cdot \frac{1}{100 - 30} \mathrm{d}t = 35$

三、整数年龄的概率分布

我们已经知道人的寿命或余命是一个连续型的随机变量，但是它的生存函数的结构非常复杂，不能用简洁的解析式表述。这就为我们计算某些精算数据和处理某些精算问题带来极大的困难。例如，我们可以得到 30 岁的人在未来 1

年内死亡的概率，但很难找到 30 岁的人在未来 1 年内各个时刻之内死亡的概率。因此，在寿险精算实务中，还需考虑(x)未来能够活过的整年数（即周岁数）的概率分布情况，并称这个整年数为(x)的取整余命（curtate future lifetime）或整数余命，记为 $K(x)$，也可简记为 K，那么：

$$K = K(x) = [T(x)] = [T]$$

这表示 K 是不超过 T 的最大整数，例如当 $T = 23.25$ 时，$K = [23.25] = 23$，等等。

K 是一个离散型随机变量，其所有可能取值为 0，1，2，…我们要了解 K 的概率分布，就是要知道下面的概率：

$$\begin{aligned}\Pr\{K = k\} &= \Pr\{k \leqslant T < k+1\}, \quad k = 0,1,2,\cdots \\ &= F_x(k+1) - F_x(k) \\ &= S_x(k) - S_x(k+1) \\ &= \frac{S(x+k) - S(x+k+1)}{S(x)}\end{aligned} \tag{1-13}$$

显然，当 $k > [\omega - x]$ 时，上式的值为零。因此，K 的实际取值范围为 0，1，2，…，$[\omega - x]$，并称上式为整数余命 K 的概率分布律。

若用 e_x 表示 K 的平均余命，则：

$$\begin{aligned}e_x &= E[K] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \Pr\{K = k\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \Pr\{k \leqslant T < k+1\}\end{aligned} \tag{1-14}$$

可以证明：

$$e_x = \sum_{k=1}^{\infty} S_x(k) = \frac{1}{S(x)} \sum_{k=1}^{\infty} S(x+k) \tag{1-15}$$

显然，当 $x = 0$ 时，则有：

$$e_0 = \sum_{k=1}^{\omega} S(k) \tag{1-16}$$

注意：式（1-14）与式（1-15）中和式的最后项数不必到 ∞，而只需到 $[\omega - x]$ 即可。

四、国际通用的精算符号

为了计算的方便，国际上采用精算符号来代表某些概率分布。这些符号主要有：${}_tq_x$，${}_tp_x$，${}_{t|u}q_x$ 等，下面我们介绍这些符号的含义及其相互关系。

（1）用 ${}_tq_x$ 表示(x)在未来 t 年内死亡的概率：

$${}_tq_x = F_x(t) = \frac{S(x) - S(x+t)}{S(x)} \tag{1-17}$$

(2)用${}_tp_x$ 表示(x)活过未来 t 年的概率：

$$ {}_tp_x = S_x(t) = \frac{S(x+t)}{S(x)} \tag{1-18} $$

显然，${}_tp_x = 1 - {}_tq_x$。

(3)用${}_{t|u}q_x$ 表示(x)活过 t 年在其后 u 年内死亡的概率。

$$ \begin{aligned} {}_{t|u}q_x &= \Pr\{t < T(x) \leqslant t+u\} \\ &= F_x(t+u) - F_x(t) \\ &= S_x(t) - S_x(t+u) \end{aligned} \tag{1-19} $$

从${}_tp_x$ 的含义，容易得到如下乘法公式：

$$ {}_{t+u}p_x = \frac{S(x+t+u)}{S(x)} = \frac{S(x+t)}{S(x)} \cdot \frac{S(x+t+u)}{S(x+t)} = {}_tp_x \cdot {}_up_{x+t} \tag{1-20} $$

上式表明(x)要想活过 $t+u$ 年，必须首先活过 t 年，再从$(x+t)$岁活过 u 年。

从${}_{t|u}q_x$ 的含义，也容易得到如下公式：

$$ {}_{t|u}q_x = {}_{t+u}q_x - {}_tq_x = {}_tp_x - {}_{t+u}p_x = {}_tp_x \cdot {}_uq_{x+t} \tag{1-21} $$

上式表明(x)要想在未来 t 年到 $t+u$ 年内死亡，必须首先活过 t 年，再从$(x+t)$岁开始在未来 u 年内死亡。

注意：式(1-20)和式(1-21)是两个重要公式，在后面会常常用到。

特别地，当 $t=1$ 时，或 $u=1$ 时，可将上述精算符号分别表示为：

$$ {}_1q_x = q_x \quad {}_1p_x = p_x \quad {}_{t|1}q_x = {}_{t|}q_x $$

对于 K 的分布，显然有：

$$ \begin{aligned} Pr\{K=k\} &= {}_{k+1}q_x - {}_kq_x \\ &= {}_kp_x - {}_{k+1}p_x = {}_{k|}q_x \end{aligned} \tag{1-22} $$

引入了精算符号后，式(1-11)、式(1-12)和式(1-15)、式(1-16)又可分别表示为：

$$ \mathring{e}_x = \int_0^{\omega-x} {}_tp_x \mathrm{d}t \tag{1-23} $$

$$ \mathring{e}_0 = \int_0^{\omega} {}_tp_0 \mathrm{d}t \tag{1-24} $$

$$ e_x = \sum_{k=1}^{\omega-x} {}_kp_x \tag{1-25} $$

$$ e_0 = \sum_{k=1}^{\omega} {}_kp_0 \tag{1-26} $$

例【1-4】　证明：${}_kp_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdot \cdots \cdot p_{x+k-1}$

证:右边 $=\frac{S(x+1)}{S(x)}\cdot\frac{S(x+2)}{S(x+1)}\cdots\frac{S(x+k)}{S(x+k-1)}=\frac{S(x+k)}{S(x)}={}_kp_x$

第二节 生 命 表

一、生命表的概念与类型

随着人寿保险业的发展,保险人获得了大量有关被保险人的死亡规律的统计数据。虽然还不能从这些数据中得到一个理想的生存函数解析表达式,但可以把这些相关数据列成表格来反映人的寿命分布,这种表格就是生命表。

生命表又称为死亡表,是一定时期一定数量的人口从生存到死亡的统计记录。它反映的是整数年龄的人在整数年龄内生存或死亡的概率分布状况。在寿险精算中,生命表是计算纯保费、理论责任准备金及保单现金价值的重要依据。

生命表与人群的性别、种族等多种因素有关,不同的划分标准可以得到不同的生命表。生命表通常有如下类型:

(1)国民生命表和经验生命表。国民生命表是根据全体国民或特定地区的人口统计资料编制的统计表;经验生命表是寿险公司根据被保险人的死亡记录所编制的生命表。国民生命表的资料来源于人口普查和抽样调查,而经验生命表的资料来源于被保险人的统计记录。由于被保险人要经体检合格后才予以承保,所以,经验生命表的死亡率通常会低于国民生命表的死亡率。政府和企业可以根据国民生命表制定社会保险和退休金计划,而保险公司的商业保险通常使用经验生命表。

(2)寿险生命表和年金生命表。由于逆选择现象的存在,选择年金的人一般对身体健康状况较为乐观,而选择寿险的人对身体健康状况不太乐观,这两类人群的死亡率是有明显区别的。寿险公司有必要对这两类人群分别统计,从而得出寿险生命表和年金生命表。

(3)男性生命表和女性生命表。统计表明,女性的寿命要高于男性寿命,同龄的男性的死亡率高于女性,对不同性别的统计就可得到男性生命表和女性生命表。保险实务中也有不分性别统计的男女混合表,一般男性的死亡率可直接采用混合表中的统计数据,女性的死亡率则采用年龄倒退法来确定,但年龄很小的女性不能适用此方法。

(4)选择表和终极表。在编制生命表时,需要引入选择期的概念,由选择期内的死亡率构成的生命表称为选择表。选择期之后的死亡率统计表称为终极表。关于选择表与终极表的详细讨论将在本节第三目进行。

二、生命表的构成要素

生命表考察的是一个确定的封闭式的生存人群体,这个群体一旦选定,就没有人退出,也没有新成员进入。因此,生命表具有如下特征:(1)设定了期初总人数。(2)随着年龄的增加,活着的人数越来越少,到最后活着的人数为零。死亡的总人数等于期初总人数。(3)有极限年龄。现实中,人群的寿命不可能是无限的,理论上假定最后一个死亡的人的寿命为极限年龄。

生命表通常由下列要素构成:

(1)生存人的年龄,用 x 表示。

生命表中的年龄取值为非负整数,最小值为 0 岁,最大值为 ω 岁,ω 为极限年龄。因此,生命表反映的是离散型的寿命分布规律。

(2)生存人数 l_x。

l_0 表示期初的总人数,即被考察的 0 岁婴儿总人数。根据大数法则,l_0 必须是一个相当大的数值才行,在人寿保险业的经验生命表中,通常取 $l_0 =$ 1 000 000。

l_x 表示被考察的人群中,在 $x(0\leqslant x\leqslant\omega)$ 岁时还活着的人数。显然 l_x 随着 x 的增大而单调减少,并且有 $l_\omega=0$。

(3)死亡人数 d_x。

d_x 表示被考察的人群中,在 $x(0\leqslant x\leqslant\omega)$ 岁之内死亡的人数,即 x 岁的人在未来 1 年内死亡的人数。显然有关系式:

$$d_x = l_x - l_{x+1},\quad 0\leqslant x\leqslant\omega \tag{1-27}$$

其中:$d_{\omega-1}=l_{\omega-1}-l_\omega=l_{\omega-1}$,$d_\omega=l_\omega=0$。这表明:在最后一年之初活着的人在这一年内会全部死亡。

由 l_x 和 d_x 的关系式(1-27),可得:

$$l_x = d_x + d_{x+1} + \cdots + d_{\omega-1} = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} d_{x+k} \tag{1-28}$$

如果用 ${}_kd_x$ 表示 x 岁的人在未来 k 年内死亡的人数,则:

$${}_kd_x = l_x - l_{x+k} \tag{1-29}$$

(4)死亡概率 q_x,或简称为死亡率。

q_x 表示的是(x)在未来 1 年内死亡的概率,由统计方法可得:

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} \tag{1-30}$$

上式表明:已知各年龄初的生存人数和在该年龄内死亡的人数,就可以计算各年龄内的死亡率。

同理，(x)在未来 k 年内的死亡率为：

$$ {}_kq_x = \frac{{}_kd_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+k}}{l_x} \tag{1-31} $$

(5)生存概率 p_x，或简称为存活率。

p_x 表示的是(x)活过未来 1 年的概率，由统计方法可得：

$$ p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \tag{1-32} $$

显然，$p_x + q_x = 1$ 且 $p_{\omega-1} = 0, q_{\omega-1} = 1$。

同理，(x)在未来 k 年的存活率为：

$$ {}_kp_x = \frac{l_{x+k}}{l_x} \tag{1-33} $$

进一步地，(x)在存活 t 年后，在未来 u 年内的死亡率为：

$$ {}_{t|u}q_x = {}_tp_x \cdot {}_uq_{x+t} = \frac{l_{x+t}}{l_x} \cdot \frac{l_{x+t} - l_{x+t+u}}{l_{x+t}} = \frac{l_{x+t} - l_{x+t+u}}{l_x} \tag{1-34} $$

(6)生存人年数 L_x。

L_x 表示所有被考察的(x)在未来 1 年内存活的总时间数，其单位为“人年”，因而，称这个总时间数为生存人年数。一个人年数表示一个人活过了一年。

在时间区间$[x, x+1]$内，有计算公式：

$$ L_x = \int_0^1 l_{x+t}\mathrm{d}t \tag{1-35} $$

(7)累计生存人年数 T_x。

T_x 表示所有被考察的(x)在将来整个人生中存活的总时间数，并称其为累计生存人年数。

由 T_x 的含义，有如下关系式：

$$ T_x = L_x + L_{x+1} + \cdots + L_{\omega-1} = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} L_{x+k} \tag{1-36} $$

再由式(1-35)，有计算公式：

$$ T_x = \int_0^{\omega-x} l_{x+t}\mathrm{d}t \tag{1-37} $$

(8)平均余命$\mathring{e}_x$与取整平均余命 e_x。

$\mathring{e}_x$表示的是所有被考察的(x)的平均余命，因而有：

$$ \mathring{e}_x = \frac{T_x}{l_x} = \int_0^{\omega-x} \frac{l_{x+t}}{l_x}\mathrm{d}t = \int_0^{\omega-x} {}_tp_x\mathrm{d}t \tag{1-38} $$

这与公式(1-23)相吻合。

e_x 表示的是所有被考察的(x)的取整平均余命，因而有：