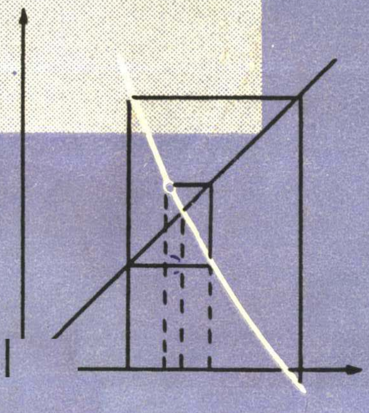
逐次逼近法

赵根榕编譯



科学普及出版社

內 容 提 要

本书首先用許多生动的例子說明逐次逼近法的各种实际应用，然后較系統、較通俗地介紹了它在解方程和綫性方程組上的应用。

方程有重大的应用价值。但是实际遇到的方程大多不能（也不必）用公式来求精确解。本书介紹了几种近似解法，用它們可求这些方程的解到所需要的精确度。

本书可供中学数学教师、高中学生及工程技术人員参考。

总号：152

逐次逼近法

编譯者：赵根榕

出版者：科学普及出版社

（北京市西直门外郝家湾）

北京市书刊出版业营业许可证出字第112号

发行者：新华书店北京发行所

印刷者：北京市通县印刷厂

开本：787×1092 1/32　印张：2 3/8

1965年11月第1版　字数：37,000

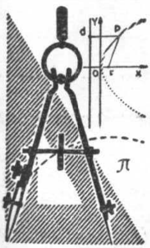
1965年11月第1次印刷　印数：20,625

統一书号：13051·087

定价：（2）0.20元

逐次逼近法

赵根榕編譯



科学普及出版社

一九六五年·北京

目　次

§ 1 近似解方程的必要性

方程有重大的应用价值。就許多方面的应用来說，要得到最終答案，通常总要解方程或方程組。

方程常常用来解物理問題，我們来考察一个例題。

由井口落石，已知在石落后T秒钟听到石击水面的声音，試求井深。

若用 x 表示井深，則得到确定 x 的方程

$$\sqrt{\frac{2x}{g}}+\frac{x}{v}=T,$$

其中 v 为声音在空气中的传播速度，$\sqrt{\frac{2x}{g}}$为石落时間，$\frac{x}{v}$为石击水面的声音传到井口的时間。这是一个无理方程。令$\sqrt{x}=y$，把这个方程化为二次方程

$$\frac{y^2}{v}+\sqrt{\frac{2}{g}}y-T=0.$$

于是我們就可用熟知的公式来解它了。

方程还可用来解决几何問題。例如，将长为 l 的綫段AB分为中末比（即分成綫段 AC 与 CB，使 $AB:AC=AC:CB$）的問題可归結为解二次方程

$$x^2+lx-l^2=0,$$

其中 x 表示綫段 AC 的长。

三等分角 α 的問題可归結为更复杂的方程

$$4x^3-3x-\cos\alpha=0,$$

其中 $x=\cos\frac{\alpha}{3}$.

在物理学中常常遇到很复杂的方程。例如，将一根鉄軸(或技术人員所說的梁)的两端固定。若受到打击，它作横振动。在数学物理中已証明，为了求振动的頻率，必須解方程

$$e^x+e^{-x}=\frac{2}{\cos x}, \tag{1}$$

其中 $e=2.71828\cdots$。

方程(1)沒有解法公式①，不仅中学沒有，大学也沒有。

我們来精确地說明一下。

如果方程的根能用方程中出現的量(系数及常数項)借助于算术运算、开方、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数表示出来，那么我們就說，方程有**解法公式**。在这种意义下，二次方程

$$x^2+px+q=0$$

有解法公式：

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\ . \tag{2}$$

三次方程②

---

① 这是一种古典看法。由現在的观点看来，本书所介紹的逼近公式(即一种近似解法公式)也应当說是解法公式。只不过不是中学里所說的那种普通的解法公式罢了。請看下文——譯者注。

② 作代換

$$y=x-\frac{a_1}{3a_0}$$

后，就可将任意三次方程

$$a_0y^3+a_1y^2+a_2y+a_3=0$$

化成这种形式。

$$x^3+px+q=0$$

也有解法公式：

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}. \qquad (3)$$

但实际应用公式(3)时会遇到一系列困难，而且要利用复数。

四次方程也有解法公式，但由于太复杂，我們不引述它了。

对于五次以上的方程，情况就更糟了。1826年挪威数学家阿貝尔①証明了：

当$n\geq 5$时，代数方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

一般沒有解法公式(特殊的可能有)。

在工程技术上，通常并不需要这一或那一方程的解法公式。需要得到的，只是具有一定精确度的答案，至于答案是怎样得到的(用公式得到的，还是用别的方法得到的)，并不感兴趣。如果說工程技术上需要公式，那也只不过是借助于公式得到具有必要的精确度的答案而已。

我們設想，給出了一个公式，用这个公式得到的答案是

$$x=3+\sqrt{13}.$$

显然，这个答案不能直接利用(在工厂中未必用 $3+\sqrt{13}$厘米标注零件的尺寸)。为了实际应用上的方便，应把$\sqrt{13}$变成十进位数。至于应取几位小数，那要看給定的实际問題的要求而定。

因此，如果数学工作者能給工程技术上指出一种方法，用

① 关于阿貝尔的生活与創作，請参看 D. J. 斯特洛伊克《数学簡史》(关娴譯，科学出版社，1956年)的132到133頁。

它可以計算方程的根到必要的精确度的話，那么在工程技术上也就完全滿意了。

数学里有一系列可以满足工程技术上要求的方法——方程的近似解法。

本书介紹的是，用**逐次逼近**的思想給出的近似解法——逐次逼近法。

§ 2 逐次逼近法有不少实际应用

逐次逼近法不仅用来解方程，而且也用来解一系列实际問題。

車工要用逐次逼近法。

对零件的加工就是对所需形状的逐次逼近。先取一个粗糙的近似——鑄件或某一其他毛坯，再将这个毛坯放在車床上加工——使这个毛坯逼近所要做的形状。然后再把它送到更精密的車床上去，……。經过几次加工（也就是几次逼近）后，就可得到所需要的零件。

炮兵也要用逐次逼近法。

为了轰击某一目标，先大約定好大炮的瞄准器，然后发射。如果沒有射中，就根据观測到的炮弹爆炸地点与目标間的偏差校正瞄准器，再进行下一次发射。几次逼近后，就把瞄准器定得可以击中目标了。

有时确定瞄准点也要用逐次逼近法。

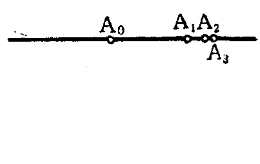


图 1

假設用在点O的高射炮打敌人飞机(图 1)。如果将高射炮指向当时飞机所在的点 A_0，那么一定不能射中。因为炮弹到达点 A_0 时，飞机

已飞到另一点 A_1 .知道炮弹与飞机的速度时，这个点 A_1 就不难求出。但是，即使把高射炮指向点 A_1，也还是不能命中。因为炮弹的运动規律随着高射炮傾角的改变而改变，所以炮弹到达点 A_1 所花費的时間与它到达点 A_0 所花費的时間也就不同。但是这时不命中的可能性小了。要使这一可能性变得更小，应当求出炮弹到达点 A_1 所花費的时間，并計算出經过这段时間飞机飞到的那一点 A_2. 这个点就是所求瞄准点的下一次逼近。此后，应当求出炮弹到达点 A_2 所花費的时間及經过这段时間飞机飞到那一点。經过几次逼近后，我們就可以求出具有所需精确度的瞄准点。

还可用逐次逼近法来编制最好的运輸方案。

假設由沙場 A_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 运沙到工地 B_j $(j=1,2,\cdots,m)$ 的运价为 x_{ij}(表 1)。于是，在表 1 給出的运沙方

表 1

运价 \ 工地 沙場	B_1	B_2	…	B_m
A_1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1m}
A_2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2m}
…	…	…	…	…
A_n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nm}

案中，沙的总运价为

$$\begin{aligned} x=&c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+\cdots+c_{1n}x_{1n}\\ &+c_{21}x_{21}+c_{22}x_{22}+\cdots+c_{2n}x_{2n}\\ &+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+c_{n1}x_{n1}+c_{n2}x_{n2}+\cdots+c_{nm}x_{nm}. \end{aligned} \tag{4}$$

很明显，使 x 为最小的方案是最好的运沙方案。为了編制出最好的运沙方案，应先提出一个初步方案，例如：

使离沙場 A_1 最近的工地固定由沙場 A_1 供应。若这个沙場生产的沙子超过了这个工地的需要，那么再使其余工地中离它最近的也由它固定供应。几步以后，A_1 的沙子就都有顾主了。这以后，其余工地中离沙場 A_2 最近的那个工地由 A_2 固定供应，其余依此类推。

但是，这个初步方案不一定是最好的，因为最后可能剩下几个工地，它們离其余的沙場很远。因此必須修改这个初步方案。例如，可以这样修改：使某些由足碼較小的沙場（例如 A_1）固定供应的工地改由足碼較大的沙場供应。

这种修改也是一种逼近。几次逼近后，就可得到最好或接近于最好的运沙方案。

一般地說，編制任何一个方案、时刻表等等，都要用到逐次逼近法：先取某一个約略的近似，然后再逐步改善——逐次逼近，直到得到合乎要求的結果为止。

§ 3 齐諾謬論給出的解法

公元前5世紀的希腊哲学家齐諾就已注意到逐次逼近了。

齐諾企图証明，希腊跑得最快的人——阿齐列斯——永远也赶不上烏龟。他是这样証明的，假設阿齐列斯与烏龟相距1000步，阿齐列斯每秒跑10步，烏龟爬1步。經过100秒,阿齐列斯跑了1000步(这是他原来与烏龟之間的距离)。但在这段时間里，烏龟向前爬了100步。再过10秒，阿齐列斯跑完了这100步，但烏龟又向前爬了10步。要克服这10步，阿齐列斯还要花1秒钟，在1秒钟里烏龟又向前爬了1步。这样,烏龟总在阿齐列斯前头,他无論什么时候也赶不上烏龟。也就是說,沒有运动。

显然,这是一个謬論。

事实上,今天的每一个中学生都不难求出,阿齐列斯何时赶上烏龟。为此,只要列出方程

$$1000=10x-x \tag{5}$$

就行了,其中 x 表示所求的时間。由这个方程得到

$$x=\frac{1000}{9}=111\frac{1}{9}(\text{秒}).$$

但齐諾謬論提供了一个近似解方程(5)的方法——逐次

逼近法。

事情是这样的。按照問題的条件,阿齐列斯跑 1000 步需要 100 秒。設烏龟在这段时間內向前爬了 x_n 步。要克服这 x_n 步,阿齐列斯需花 $\frac{x_n}{10}$ 秒。因此,經过

$$x_{n+1}=100+\frac{x_n}{10} \tag{6}$$

秒后,阿齐列斯跑到了 x_n 秒时烏龟所在的地点。

若令 $x_0=0$,則我們得到

$$x_1=100,\ x_2=110,\ x_3=111,\ x_4=111.1,\ \cdots.$$

这些数随 n 的增大而逼近于方程(5)的精确解

$$x=111\frac{1}{9}.$$

我們指出,方程(6)与方程(5)有着密切的联系。令

$$x_{n+1}=x,\ x_n=x$$

时,方程(6)就变成

$$x=100+\frac{x}{10}.$$

这就是方程(5)。

精明的讀者也許会問,既然方程(5)可以非常簡单地求出精确解,为什么还要用逐次逼近法呢?

其实,我們感兴趣的并不是方程(5),而是逐次逼近法。今后我們将用它来解更复杂的方程。

若阿齐列斯追赶的不是烏龟,而是每秒跑 20 步的羚羊,則用逐次逼近法得不到解。在这种情况下,方程取形式

$$1000=10x-20x, \tag{7}$$

而逼近公式取形式

$$x_{n+1}=100+2x_n. \tag{8}$$

令 $x_0=0$ 时，我們得到

$$x_1=100,\ x_2=300,\ x_3=700,\cdots.$$

因此，由公式(8)得到的数列

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

并不逼近方程(7)的精确解

$$x=-100.$$

这也并不奇怪，因为經过 100 秒羚羊反而比阿齐列斯領先 2000 步，而以后阿齐列斯与羚羊間的距离还是随时增加。

在数学上，若逼近过程象阿齐列斯追烏龟那样，则称逼近过程是收斂的；若象阿齐列斯追羚羊那样，则称逼近过程是发散的。

§ 4 用逐次逼近法作除法

一元一次方程

$$a\,x=b \tag{9}$$

的精确解为

$$x=\frac{b}{a}.$$

因此，解方程(9)就是作除法"b 除以 a"。

有几种电子計算机只能进行如下的运算：加法、减法、乘法及除以形如 2^n 的数的除法。自然会問，它們如何进行任意数的除法(例如 b 除以 a)呢？

因为这几种电子計算机能乘和除以 2^n，所以可以认为 $\frac{1}{2}\leq a\leq 1$ (否則，可以在方程的两边乘或除以数 2 的适当次幂)。将方程 $a\,x=b$ 改写成下面的形式：

$$x=(1-a)x+b. \tag{10}$$

取 $x_1=b$ 为 x 的第一近似值(初始近似值)，用 α_1 表示这个近似值的誤差。也就是假設

$$x_1+\alpha_1=x=\frac{b}{a}.$$

这时由方程(10)得

$$x_1+\alpha_1=(1-a)(x_1+\alpha_1)+b$$
$$=(1-a)x_1+b+(1-a)\alpha_1. \tag{11}$$

因为

$$\frac{1}{2}\leq a\leq 1,$$

所以

$$0\leq 1-a\leq\frac{1}{2}.$$

因此，等式(11)右边的被加項$(1-a)\alpha_1$至少小于α_1的一半，可舍去。从而我們得到

$$x_1+\alpha_1\approx(1-a)x_1+b.$$

可以取$(1-a)x_1+b$作为x的第二近似値x_2：

$$x_2=(1-a)x_1+b.$$

用α_2表示近似値x_2的誤差，即假設

$$x_2+\alpha_2=x=\frac{b}{a}.$$

这时由方程(10)得到

$$x_2+\alpha_2=(1-a)x_2+b+(1-a)\alpha_2.$$

舍去这个等式右边的被加項$(1-a)\alpha_2$，我們得到

$$x_2+\alpha_2\approx(1-a)x_2+b.$$

因此，第三近似値可取为：

$$x_3=(1-a)x_2+b.$$

其余依此类推。按公式

$$x_{n+1}=(1-a)x_n+b \tag{12}$$

逐次算出的数

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$$

逼近数$\frac{b}{a}$. 在公式(12)中只利用了加法、减法和乘法运算。因此,电子計算机能按它进行計算。

因此，在所說的这几种电子計算机上是按公式(12)用逐次逼近法来作任意数的除法的。

因为解一元一次方程的問題就是作除法的問題，所以在这几种电子計算机上也是按这个方法来解一元一次方程的。