新课程初中教与学全解全析

XIN JIAOCAI WANQUAN JIEDU

新教材完全解读

全真设计教师讲课每个细节　全面呈现学生学习每个要点

主编　张绍堂

教学互动

九年级数学

上册

（北师大版）

山西教育出版社

新课程初中教与学全解全析

XIN JIAOCAI
WANQUAN JIEDU

新教材
完全解读

上册
（北师大版）

九年级数学

本册主编 张绍堂
副主编 王强 曹笑然 曹军
编写人员 王强 马俨生 刘绍晋 李向青
张绍堂 贾晓霞 张月艳 赵霞
董海瑞 曹军 曹笑然 杨变秀
吴龙海 祁晋英

山西教育出版社

图书在版编目（C I P）数据

新教材完全解读．九年级数学：北师大版/詹强主编．
—太原：山西教育出版社，2006．8
ISBN 7-5440-3148-9
Ⅰ．新… Ⅱ．詹… Ⅲ．数学课-初中-教学参考资料 Ⅳ．G634
中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 045341 号

新教材完全解读．九年级数学（上册）北师大版

责任编辑 邓吉忠
助理编辑 李志伟
复　　审 康　健
终　　审 刘立平
装帧设计 陶雅娜
印装监制 赵　群

出版发行 山西教育出版社（太原市水西门街庙前小区 8 号楼）
印　　装 太原红星印刷厂
开　　本 787×960　1/16
印　　张 18.5
字　　数 589 千字
版　　次 2006 年 8 月第 1 版　2006 年 8 月山西第 1 次印刷
印　　数 1—6000 册
书　　号 ISBN 7-5440-3148-9/G·2862
定　　价 20.00 元

山西教育出版社读者调查表！

姓　名：＿＿＿＿＿＿　英文名字：＿＿＿＿＿＿　生　日：＿＿＿＿

血　型：＿＿＿＿＿＿　星　座：＿＿＿＿＿＿　E-mail：＿＿＿＿

学　校：＿＿＿＿＿＿　通讯地址：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

（请在□中打√）你购买了本丛书七 □　八 □　九 □ 年级的哪些科目：

语文 □　数学 □　英语 □　物理 □　化学 □　思想品德 □

你最喜欢本书什么内容：

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

你最不喜欢本书什么内容：

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

你最希望本书如何改进：

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

你还希望在学习上得到什么帮助：

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

让你的秘密与我一起分享，让你的心愿与本书同行，

如果你愿意，就请把这张幸运卡填好，寄给：

（030002）山西太原水西门街馒头巷7号山西教育出版社 邓吉忠收

那么，你将留在我永远的记忆，我将成为你永远的朋友。

目 录

第一章 证 明(二)

本章教学指要

通过前面的学习,我们已经对图形的性质及其相互关系进行了大量的探索,并在探索的同时,经历了推理的过程,进行了简单的推理训练,从而具备了一定的推理能力,树立了初步的推理意识,为严格的推理证明打下了基础.前面由《证明(一)》开始,从几条公理出发,展开了对平行线等图形性质的严格证明.本章将继续对其他一些图形的性质进行证明,本章所证明的命题主要包括:等腰三角形(含等边三角形)的性质定理及判定定理、直角三角形的性质定理及判定定理、线段垂直平分线的性质定理及判定定理、角平分线的性质定理及判定定理等.

1 你能证明它们吗

教学目标

一、知识与技能

1. 了解作为证明基础的几条公理的内容，掌握证明的基本步骤和书写格式.

2. 通过对特殊三角形有关定理的证明，进一步熟练运用特殊三角形的性质解决问题.

3. 结合实例体会反证法的含义.

二、过程与方法

1. 经历“探索——发现——猜想——证明”的过程，能够用综合法证明等腰三角形的有关性质定理和判定定理以及其他一些特殊三角形的相关定理.

2. 体会证明是探索活动的自然延续和必要发展，发展学生初步的演绎推理能力，养成“说理有据”的意识和习惯.

三、情感态度与价值观

1. 形成解决问题的一些基本策略，认识证明的过程，发展证明的应用意识.

2. 在证明的过程中，学习运用数学思维思考生活中实际问题的习惯.

3. 培养学生合作交流、独立思考的习惯，提高学生解决问题的能力.

教学重点

本节学习的重点是通过“探索——发现——猜想——证明”的过程，进行特殊三角形中相关定理的证明.要注意推理证明的基本要求，明确条件和结论，正确运用数学的符号语言进行表达，明确每一步推理的依据并能准确地表达推理的过程.

教学难点

本节学习的难点是在证明的过程中总结数学证明的要求及步骤，体会证明的思想方法，寻找证明的思路，在命题的探索和证明过程中，注重运用归纳、类比、转化、反证等数学思想方法.

教学策略

探究式:利用折纸探索"等腰三角形的两个底角相等"的结论,并由此发现证明思路——作底边上的中线(或顶角的角平分线、底边上的高线)构造全等三角形,从而证明两底角相等.

引导式:在学习运用反证法证明时,引导学生从问题的反面进行思考,增加证明的途径.

启发式:在探索解题的思路方法时,启发学生根据问题中的条件来寻找解题途径.

课时安排

三课时.

第一课时

课前准备

教师准备:制作多媒体课件:《证明(一)》中列出的公理、学过的定理复习,问题情境引入动画,典型例题、巩固练习,课后习题、思考题等.

学生准备:等腰三角形纸片.

本节教学任务

1. 复习巩固作为证明基础的几条公理的内容.
2. 通过用综合方法证明等腰三角形的有关性质定理,掌握证明的基本步骤和书写格式.

导入新课——老师开讲

方法1:复习旧知引入

复习《证明(一)》中列出的六条公理及相关定理,从而引入新课.

方法2:问题情境引入

问题:还记得我们探索过的等腰三角形的性质吗?你能利用已有的公理和定理证明这些结论吗?

我们曾经利用折叠的方法说明了等腰三角形的两个底角相等,实际上,折痕将等腰三角形分成了两个全等三角形.能否通过作一条线段,得到两个全等的三角形,从而证明这两个底角相等呢?

打开知识的大门——师生一起来进行

[入门求思路]

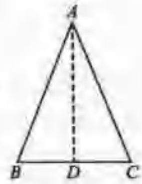

图 1-1

运用三角形全等的判定公理时,常常需要先做辅助线构造全等三角形,再进行证明.

例 1:前面情境引入中的问题:

已知:如图 1-1,在$\triangle ABC$中,$AB=AC$.

求证:$\angle B=\angle C$.

分析:只需将$\triangle ABC$分割成两个全等三角形即可.因此可考虑构造$\triangle ABC$底边上的中线,底边上的高线或顶角的平分线.

证明:方法 1:取 BC 的中点 D,连接 AD.

$\because$ $AB=AC, BD=CD, AD=AD$, $\therefore$ $\triangle ABD\cong\triangle ACD$ (SSS).

$\therefore$ $\angle B=\angle C$(全等三角形的对应角相等).

方法 2:作 $AD\perp BC$ 于 D.

在 Rt$\triangle ABD$ 和 Rt$\triangle ACD$ 中,

$\because$ $AB=AC, AD=AD$, $\therefore$ $\triangle ABD\cong\triangle ACD$ (HL).

$\therefore$ $\angle B=\angle C$(全等三角形的对应角相等).

方法 3:作 AD 平分$\angle BAC$,交 BC 于 D.

$\because$ $AB=AC, \angle BAD=\angle CAD, AD=AD$, $\therefore$ $\triangle ABD\cong ACD$ (SAS).

$\therefore$ $\angle B=\angle C$(全等三角形的对应角相等).

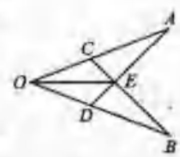

图 1-2

例 2:如图 1-2,$OA=OB$,点 C、D 分别在 OA、OB 上,且 $OC=OD$,AD、BC 相交于点 E,则图中全等的三角形共有( ).

A. 2 对　　B.3 对　　C.4 对　　D.5 对

分析:由题中条件,利用 SAS 公理易得$\triangle AOD\cong\triangle BOC$,进而可得$\angle A=\angle B$,于是由 AAS 推论可得$\triangle ACE\cong\triangle BDE$,故有 $AE=BE$,所以由 SAS 公理可得$\triangle AOE\cong\triangle BOE$,进一步得到$\angle AOE=\angle BOE$,从而由 SAS 公理得$\triangle COE\cong\triangle DOE$.

解:选 C.

[实践求效益]

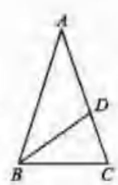

图 1-3

要关注三角形中相等的边或结合问题中的其他条件探寻相等的线段,从而运用等腰三角形中"等边对等角"的性质解题.

例 3:如图 1-3,$\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,点 D 在 AC 上,且 $BD=BC=AD$,求$\triangle ABC$ 各内角的度数.

分析:由于问题中没有给出任何已知角,但从等边出发,利用等腰三角形的性质"等边对等角"可得出相等的角,故设最小角为 x(尽量避免分数出现),将其他各角用含 x 的代数

式表示，再根据三角形内角和定理，即可列方程求解.

解：$\because$ $AB=AC, BD=BC=AD$,

$\therefore$ $\angle ABC=\angle ACB=\angle BDC, \angle A=\angle ABD$（等边对等角）.

设$\angle A=x$，则$\angle BDC=\angle A+\angle ABD=2x$，又$\angle ABC=\angle C=\angle BDC=2x$,

$\therefore$ 在$\triangle ABC$中，根据三角形内角和定理得

$x+2x+2x=180^\circ$,

解得 $x=36^\circ$,

$\therefore$ $\angle A=36^\circ, \angle ABC=\angle C=72^\circ$.

例4：如图1-4，$\triangle ABC$中，$AD\perp BC$于D，$BE\perp AC$于E，AD与BE相交于F，若$BF=AC$，那么$\angle ABC$的大小是（　　）.

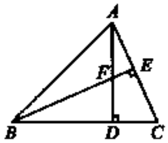

图 1-4

A. 49°　　B. 45°　　C. 50°　　D. 60°

分析：由$AD\perp BC$、$BE\perp AC$可知，$\angle C$分别与$\angle DAC$、$\angle EBC$互余，故$\angle DAC=\angle EBC$，又因为$BF=AC$，所以$\triangle ADC\cong\triangle BDF$，所以$AD=BD$，即$\triangle ABD$为等腰直角三角形，所以$\angle ABC=45^\circ$.

解：选B.

[探究求发展]

等腰三角形中“三线合一”的性质定理，常常用来证明线段相等、角相等及线段垂直，并且有时能使证明过程简捷.因此，等腰三角形的顶角平分线（或底边上的中线、底边上的高线）是等腰三角形中常见的辅助线.此外，有时也可以通过作一条线段等于已知线段来构造等腰三角形.

例5：如图1-5，点D, E在$\triangle ABC$的边BC上，$AB=AC, AD=AE$.求证：$BD=EC$.

分析：可以通过证明$\triangle ABD\cong\triangle ACE$，直接得出$BD=EC$，也可以利用等腰三角形“三线合一”的性质，构造等腰三角形底边上的中线得出.

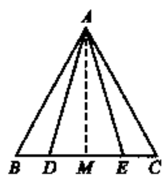

图 1-5

证明：方法1：$\because$ $AB=AC$，$\therefore$ $\angle B=\angle C$.

又$\because$ $AD=AE$,

$\therefore$ $\angle ADE=\angle AED$,

$\therefore$ $\angle ADB=\angle AEC$,

$\therefore$ $\triangle ABD\cong\triangle ACE$ (AAS).

$\therefore$ $BD=EC$（全等三角形的对应边相等）.

方法2：过点A作$AM\perp BC$于M,

$\because$ $AB=AC$，$\therefore$ $BM=CM$,

又$\because$ $AD=AE$，$\therefore$ $DM=EM$,

$\therefore$ $BM-DM=CM-EM$，即 $BD=EC$.

例6：求证：等腰三角形腰上的高与底边的夹角等于顶角的一半.

分析：解此类问题常用的方法是“倍分法”，即把较大角二等分，或将较小角加倍.如可将$\angle A$平分，也可将$\angle DBC$补成它的二倍，再利用角之间的关系进行证明.

已知：在△ABC中，$AB=AC$，$BD\perp AC$.

求证：$\angle DBC=\frac{1}{2}\angle A$.

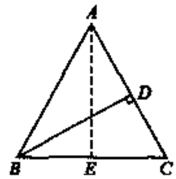

图 1－6

证明：方法1：如图1－6，过点A作$\angle BAC$的平分线，交BC于点E，

$\because$ $AB=AC$，$\therefore$ $AE\perp BC$，$\therefore$ $\angle EAC+\angle C=90°$.

$\because$ $BD\perp AC$，$\therefore$ $\angle DBC+\angle C=90°$，

$\therefore$ $\angle DBC=\angle EAC$，$\therefore$ $\angle DBC=\frac{1}{2}\angle BAC$.

方法2：如图1－7，作$\angle DBF=\angle DBC$，BF交AC于点F，

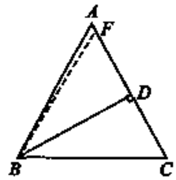

图 1－7

$\because$ $BD\perp AC$，$\therefore$ $\angle BDF=\angle BDC=90°$，

$\therefore$ $\angle BFD+\angle DBF=90°$，$\angle C+\angle DBC=90°$，

$\therefore$ $\angle BFD=\angle C$，$\therefore$ $\angle FBC=180°-2\angle C$.

在△ABC中，$\because$ $AB=AC$，$\therefore$ $\angle ABC=\angle C$，

$\therefore$ $\angle A=180°-2\angle C$，$\therefore$ $\angle FBC=\angle A$，

$\therefore$ $\angle DBC=\frac{1}{2}\angle FBC=\frac{1}{2}\angle A$.

顶角为钝角的情形也要讨论(略).

[练习求巩固]

几何图形在运动变化的过程中，问题中的基本条件如果不发生改变，那么探索问题的思路方法也大致相同.

例7：(1)如图1－8所示，P是等腰三角形ABC的底边BC上的一个动点，不妨设动点P比较接近于B点，过点P作BC的垂线，交AB于点Q，交CA的延长线于点R，观察AR与AQ，它们有什么关系？证明你的猜想.

(2)如果点P沿着底边BC所在的直线，按由C向B的方向运动到CB的延长线上时，(1)中得到的结论还成立吗？说明你的理由.

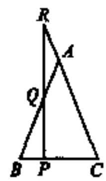

图 1－8

分析：这是一道探索性的几何运动型问题，需要通过观察、探究、发现，进而进行猜想并证明.要注意运用运动变化的观点来思考问题.

(1)**解：**$AR=AQ$.

证明：$\because$ $AB=AC$，$\therefore$ $\angle B=\angle C$.

$\because$ $RP\perp BC$，$\therefore$ $\angle B+\angle BQP=\angle C+\angle CRP=90°$，

$\therefore$ $\angle BQP=\angle CRP$.

又$\because$ $\angle BQP=\angle AQR$，$\therefore$ $\angle AQR=\angle CRP$，$\therefore$ $AR=AQ$.

(2)**解：**结论仍成立，即$AR=AQ$，如图1－9所示.

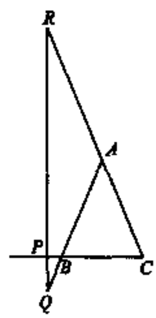

图 1－9

证明：$\because$ $AB=AC$，$\therefore$ $\angle ABC=\angle C$.

$\because$ $RP\perp BC$，$\therefore$ $\angle CRP+\angle C=\angle BQP+\angle QBP=90°$.

又$\because$ $\angle ABC=\angle QBP$，$\therefore$ $\angle CRP=\angle BQP$，

$\therefore$ $AR=AQ$.

例 8：如图 1－10，已知△ ABC 中，$\angle A=90°$，$AB=AC$，BD 平分$\angle ABC$ 交 AC 于点 D，$CE\perp BD$，交 BD 的延长线于点 E.

求证：$BD=2CE$.

分析：证明线段的倍分关系常采用"截长补短"法，即将线段 BD 二等分或将线段 CE 加倍延长，但此题由 BD 平分$\angle ABC$ 且 $BD\perp CE$ 联想到可以补出等腰三角形，进而利用等腰三角形三线合一的性质解题.

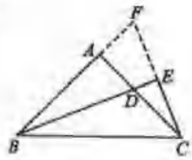

图 1－10

证明：分别延长 BA、CE，交于点 F，

$\because$ $BE\perp CE$，$\angle BAC=90°$，　$\therefore$ $\angle FBE+\angle F=\angle FCA+\angle F=90°$，

$\therefore$ $\angle FBE=\angle FCA$.

又$\because$ $AB=AC$，$\angle BAD=\angle CAF=90°$，　$\therefore$ $\triangle ABD\cong\triangle ACF$ （ASA），

$\therefore$ $BD=CF$.

又$\because$ $\angle ABE=\angle CBE$，$BE=BE$，$\angle BEF=\angle BEC=90°$，　$\therefore$ $\triangle BEF\cong\triangle BEC$ （ASA），

$\therefore$ $EF=EC$，　$\therefore$ $BD=2CE$.

扫除最后的盲点——老师为你答疑解惑

1. 运用"等边对等角"性质定理时，必须注意其前提是在同一个三角形中.

2. 在给定等腰三角形的一个角或一条边时，应考虑到这个角可以是等腰三角形的顶角，也可以是等腰三角形的一个底角；所给的这条边可以是等腰三角形的一条腰，也可以是等腰三角形的底. 但在解题过程中，需注意所得的角、边还要分别满足三角形内角和等于 180°、三角形中任意两边之和都大于第三边的条件.

问题：等腰三角形一腰上的高等于腰长的一半，求这个三角形各内角的度数.

解析：解题时容易只考虑腰上的高在三角形内部时的情况，而漏解高在三角形外部时的情况，所以要注意分情况进行讨论.

已知：△ ABC 中，$AB=AC$，CD 为 AB 上的高，且 $CD=\frac{1}{2}AB$.

求：$\angle A$，$\angle B$，$\angle ACB$ 的度数.

①当高在三角形的内部时，如图 1－11 所示，

$\because$ $AB=AC$，$CD=\frac{1}{2}AB$，　$\therefore$ $CD=\frac{1}{2}AC$.

又$\because$ $CD\perp AB$ 于 D，　$\therefore$ $\angle A=30°$，

$\therefore$ $\angle B=\angle ACB=75°$.

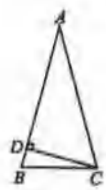

图 1－11

②当高在三角形的外部时，如图 1－12 所示，

同①可得　$\angle CAD=30°$，　$\therefore$ $\angle CAB=150°$，$\angle B=\angle ACB=15°$，

$\therefore$ 三角形各内角分别为 30°，75°，75°或 150°，15°，15°.

图 1－12

板书总结

三角形全等
- 判定
  - 三边对应相等的两个三角形全等（SSS）
  - 两边及其夹角对应相等的两个三角形全等（SAS）
  - 两个角及其夹边对应相等的两个三角形全等（ASA）→ 两角及其中一角的对边对应相等的两个三角形全等（AAS）
- 性质 → 全等三角形的对应边相等、对应角相等

等腰三角形的性质
- 等腰三角形的两个底角相等
- 等腰三角形顶角的平分线、底边上的中线、底边上的高线互相重合

教材习题答案与提示

习题 1.1

1. 证明：连接 BD，在$\triangle BAD$ 和$\triangle DCB$ 中，

$\because$ $AB=CD$(已知)，$AD=CB$(已知)，$BD=DB$(公共边)，

$\therefore$ $\triangle BAD\cong\triangle DCB$ (SSS)， $\therefore$ $\angle A=\angle C$(全等三角形对应角相等)．

2. 证明：$\because$ $BE=CF$， $\therefore$ $BE+EC=CF+EC$，即 $BC=EF$．

在$\triangle ABC$ 和$\triangle DEF$ 中，

$\because$ $AB=DE$，$BC=EF$，$AC=DF$，

$\therefore$ $\triangle ABC\cong\triangle DEF$(SSS)， $\therefore$ $\angle A=\angle D$(全等三角形的对应角相等)．

第二课时

课前准备

教师准备：等腰三角形纸片，制作多媒体课件，动画展示等腰三角形两底角平分线相等，如果$\angle ABD=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle ACE=\frac{1}{2}\angle ACB$，那么 $BD=CE$，如果$\angle ABD=\frac{1}{3}\angle ABC$，$\angle ACE=\frac{1}{3}\angle ACB$，那么 $BD=CE$；……；如果$\angle ABD=\frac{1}{n}\angle ABC$，$\angle ACE=\frac{1}{n}\angle ACB$，那么 $BD=CE$，等腰三角形的判定定理及证明过程，反证法的步骤、巩固练习，课后习题、思考题等．

学生准备：复习上节课的内容．

1. 进一步掌握等腰三角形的性质定理和判定定理.

2. 通过实例体会反证法的含义,注意到在解决某些问题时,利用反证法常常能起到“柳暗花明”的效果.

方法 1:问题情境引入

如图 1－13,某地质学家为估测一条东西流向的河流的宽度,他选择了河流北岸一点 A,南岸一点 B,并在 B 点的南偏东 60°方向选了一点 C,使得$\angle BCA$ 恰好为 30°. 于是,他只需测量 BC 的长度就可确定河流 AB 的宽度,你知道这是为什么吗?

方法 2: 上一节课我们证明了等腰三角形中的两个底角相等,那么等腰三角形中还有哪些相等的线段呢?

如图 1－14,将等腰三角形纸片折出痕迹(两底角平分线、两腰上的中线、高),向学生展示,并引导学生先猜想、再证明,你能发现其中一些相等的线段吗? 能证明你的结论吗?

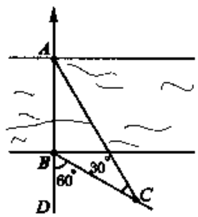

图 1－13

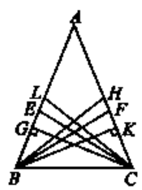

图 1－14

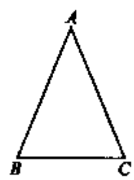

图 1－15

方法 3: 前面已经证明了等腰三角形的两个底角相等,反过来,有两个角相等的三角形是等腰三角形吗? 如图 1－15,在$\triangle ABC$ 中,$\angle B=\angle C$,要想证明 $AB=AC$,你会考虑用什么方法? 如果能构造两个全等的三角形,使 AB 与 AC 成为对应边,你将怎样构造?

[入门求思路]

利用等腰三角形"等边对等角"的性质可以得出:等腰三角形两底角的平分线相等;两底角的 n 等分线长对应相等;等腰三角形两腰上的中线和两腰上的高线分别相等.

反证法的证明方法:在证明时,先假设命题的结论不成立,然后推导出与定义、公理、已知定理或已知条件相矛盾的结果,从而证明命题的结论一定成立.

例 1:证明:等腰三角形两底角的平分线相等.

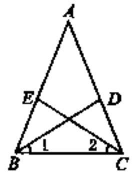

图 1-16

已知:如图 1-16,在$\triangle ABC$中,$AB=AC$,$\angle ABD=\frac{1}{2}\angle ABC$,$\angle ACE=\frac{1}{2}\angle ACB$.

(1)求证:$BD=CE$.

(2)如果$\angle ABD=\frac{1}{3}\angle ABC$,$\angle ACE=\frac{1}{3}\angle ACB$,那么 $BD=CE$ 吗?

(3)如果$\angle ABD=\frac{1}{4}\angle ABC$,$\angle ACE=\frac{1}{4}\angle ACB$ 呢? 你能得出什么结论?

(4)如果$\angle ABD=\frac{1}{n}\angle ABC$,$\angle ACE=\frac{1}{n}\angle ACB$ 呢? 你能得出什么结论?

分析:此题需根据等腰三角形"等边对等角"的性质进行证明并探索规律.

(1)**证明**: $\because$ $AB=AC$, $\therefore$ $\angle ABC=\angle ACB$(等边对等角).

$\because$ $\angle ABD=\frac{1}{2}\angle ABC$,$\angle ACE=\frac{1}{2}\angle ACB$, $\therefore$ $\angle 1=\angle 2$.

在$\triangle BDC$和$\triangle CEB$中,

$\because$ $\angle ACB=\angle ABC$,$BC=CB$,$\angle 1=\angle 2$, $\therefore$ $\triangle BDC\cong\triangle CEB$ (ASA),

$\therefore$ $BD=CE$(全等三角形的对应边相等).

(2)**解**:如果$\angle ABD=\frac{1}{3}\angle ABC$,$\angle ACE=\frac{1}{3}\angle ACB$,同理可得 $BD=CE$.

(3)**解**:如果$\angle ABD=\frac{1}{4}\angle ABC$,$\angle ACE=\frac{1}{4}\angle ACB$,同理可得 $BD=CE$.

(4)**解**:如果$\angle ABD=\frac{1}{n}\angle ABC$,$\angle ACE=\frac{1}{n}\angle ACB$,同理可得 $BD=CE$.

例 2:证明:有两个角相等的三角形是等腰三角形.

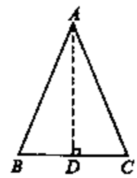

图 1-17

已知:如图 1-17,在$\triangle ABC$中,$\angle B=\angle C$.

求证:$AB=AC$.

分析:通过折叠有两个角相等的三角形纸片,从而观察得出这两个角所对的边相等的方法,联想到可将等腰三角形分割成两个全等三角形,从而进行证明.

证明:方法 1:如图 1-17,过 A 作 $AD\perp BC$,垂足为 D.

在 Rt$\triangle ABD$ 和 Rt$\triangle ACD$ 中,

$\because$ $\angle B=\angle C$,$AD=AD$,$\angle ADB=\angle ADC=90°$. $\therefore$ $\triangle ABD\cong\triangle ACD$ (AAS).

$\therefore$ $AB=AC$(全等三角形的对应边相等).

方法 2:作$\angle BAC$的平分线AD交BC于D,

易证$\triangle ABD \cong \triangle ACD$(AAS),从而得$AB=AC$.

方法 3:反证法(过程略).

[实践求效益]

定理"等角对等边"是证明线段相等的常用方法,有时甚至需要添加辅助线构造得出等腰三角形.

例 3:课题导入方法 1 中的问题.

分析:如图 1-13,根据题意知,$\angle DBC=60°$,$\angle BCA=30°$,由外角的性质易知$\angle BAC=30°$,从而由定理"等角对等边"可得$BA=BC$.

证明:由题意,得$\angle DBC=60°$,

$\because \angle BCA=30°$, $\therefore \angle BAC=30°$.

$\therefore \angle BAC=\angle BCA$. $\therefore BA=BC$(等角对等边).

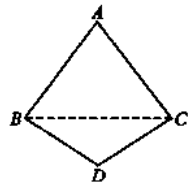

图 1-18

例 4:如图 1-18,$AB=AC$,$\angle ABD=\angle ACD$.求证:$BD=CD$.

分析:此题容易考虑到连接AD,构造全等三角形,但证明全等的条件明显不够,故放弃.如果考虑连接BC,则可以构造等腰三角形,进而可利用定理"等角对等边"得到线段相等.

证明:连接BC,$\because AB=AC$, $\therefore \angle ABC=\angle ACB$(等边对等角).

又$\because \angle ABD=\angle ACD$, $\therefore \angle DBC=\angle DCB$. $\therefore BD=DC$(等角对等边).

[探究求发展]

定理"等角对等边"是将角相等的条件转化为边相等.因此,还可以进一步利用该定理得出等边三角形的判定方法.在解证明问题时,应注意灵活运用这一定理.

例 5:下面关于等边三角形的说法中,正确的个数为(　　)

①有两个角相等的等腰三角形是等边三角形;

②三个角都相等的三角形是等边三角形;

③有两个角是60°的三角形是等边三角形;

④有一个角等于60°的等腰三角形是等边三角形.

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

分析:利用等边三角形的定义及定理"等角对等边",容易判断上面四种说法中②、③、④均正确.

解:选 C.

例 6:如图 1-19,将矩形纸片$ABCD$沿对角线BD折叠,你认为重合部分是什么图形?请说明理由.

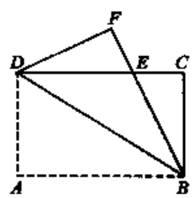

图 1-19

分析:此题中隐含着"角分线+平行线=等腰三角形"这一基本图形.因为由翻折对称可知$\angle ABD=\angle FBD$,又由矩形对边平行可得$\angle ABD=\angle CDB$,故$\angle EDB=\angle EBD$,所以$ED=EB$,即重合部分为等腰三角形.

解:$\because ABCD$为矩形, $\therefore AB /\!/ CD$, $\therefore \angle ABD=\angle CDB$.

又由翻折对称,知$\triangle ABD \cong \triangle FBD$, $\therefore \angle ABD=\angle FBD$,