

Multidimensional Game Theory

多维博弈论

谭德庆◎著



西南交通大学出版社
[Http://press.swjtu.edu.cn](http://press.swjtu.edu.cn)

国家自然科学基金资助
西南交通大学出版基金资助

多维博弈论

谭德庆 著

西南交通大学出版社

· 成 都 ·

内 容 简 介

本书按照现代博弈论的基本研究框架,较为系统地介绍和研究了多维博弈,即参与人同时在多个领域或多个方面的博弈。全书逻辑清晰,推理严密,分析过程较为详细,内容通俗易懂。详细阅读本书能够使读者从较为抽象的博弈模型中更多地领悟到怎样构建多维博弈模型,并利用模型分析和解决博弈问题,从中开阔研究博弈论的视野和增强研究兴趣。

本书可作为高等院校经济管理类本科生、研究生及对博弈论有研究兴趣的读者的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

多维博弈论 / 谭德庆著. — 成都: 西南交通大学出版社, 2006.3
ISBN 7-81104-240-1

I. 多... II. 谭... III. 对策论—研究 IV. 0225

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 022089 号

多 维 博 弈 论

谭德庆 著

责任编辑 秦 薇
责任校对 秦振秀
封面设计 王 可

西南交通大学出版社出版发行

(成都二环路北一段 111 号 邮政编码: 610031 发行部电话: 028-87600564)

<http://press.swjtu.edu.cn>

E-mail: cbsxx@swjtu.edu.cn

四川森林印务有限责任公司印刷

成品尺寸: 140 mm × 203 mm 印张: 4.312 5

字数: 108 千字

2006 年 3 月第 1 版 2006 年 3 月第 1 次印刷

ISBN 7-81104-240-1/O · 024

定价: 18.00 元

图书如有印装问题 本社负责退换
版权所有 盗版必究 举报电话: 028-87600562

前 言

博弈论经过了几十年的迅速发展，无论在理论研究还是在应用研究上都取得了巨大成果。但是，在博弈论的应用研究方面所涉及的问题主要都是关于两个（或多个）参与人局限在一个方面或在一个领域内的博弈问题，如两个（或多个）寡头关于一种产品的价格或产量的博弈、两个（或多个）国家在军事领域内对抗等博弈问题，都是针对博弈参与人在一个领域内的博弈问题，也可称为一维博弈问题。

然而，在现实社会中普遍存在着更为广泛的博弈问题，如两个（或多个）国家同时在经济、科技、军事等多个领域内竞争和对抗，并且这些领域之间存在着相互作用或联系；在经济活动中，两个（或多个）企业同时进行多种产品的价格或产量博弈，并且这些产品之间存在着相互影响（如替代性）。在现实社会中这类博弈问题举不胜举，非常多，又如我国加入 WTO 的谈判就是更为典型的例子。本书将博弈参与人“同时”在具有相互影响或联系的多领域内进行博弈的问题称为多维博弈。

全书按照现代博弈论的基本框架体系进行讨论，首先较为系统地介绍了博弈论的国内外发展现状和研究成果，然后按照完全信息静态、完全信息动态、不完全信息静态和不完全信息动态这四种基本类型分别对多维博弈进行系统阐述和研究。

其实除了本书所研究的参与人同时的多领域内的博弈问题外，现实社会中的博弈现象，还有许许多多各种形式的多维博弈

问题，如在多个领域内同时合作的博弈问题，可称为合作多维博弈；在某些领域内合作，在某些领域竞争的合作与竞争同时并存的多维博弈问题，可称为合作竞争多维博弈等。这些多维博弈问题和博弈现象在应用上尚未进行全面和深入地研究。

近几年来，在我国高等院校的经济管理类专业教学中，硕士研究生和博士研究生大多开设了博弈课程，介绍博弈论的教材、译著及专著也出现了很多，各有特色。本书是在笔者攻读博士期间对博弈论进行研究所取得成果的基础上形成的，篇幅虽然不多，但都是笔者最近几年的最新研究成果。由于笔者所研究的这类多维博弈可参考的国内外文献不多，同时多维博弈过程和建模又很复杂。因此，本书只是对其进行了部分研究，需要研究的内容还有很多。

在此，非常感谢我的博士导师胡培教授的指导，同时感谢四川大学工商管理学院刘光中教授和西南交通大学经济管理学院贾建民教授、贾志永教授、黄登仕教授、史本山教授及其他一些老师的支持和鼓励。

最后，感谢国家自然科学基金和西南交通大学出版基金的支持，正是由于这两项基金的支持，才使此书得以尽快与读者见面。

由于笔者水平和个人能力有限，本书还有许多疏漏、不足之处，恳请同行专家和学者赐教，这也是我殷切的希望并将不胜感激！

谭德庆

2005 年 11 月于成都

目 录

第 1 章 绪 论	1
1.1 国内外综述	1
1.2 问题的提出和研究思路	12
第 2 章 完全信息静态多维博弈	14
2.1 多维博弈及其特征	14
2.2 多维博弈的基本概念及策略式描述	16
2.3 多维 Nash 均衡	24
2.4 应用研究	35
2.5 小 结	54
第 3 章 完全信息动态多维博弈	56
3.1 扩展式表述多维博弈	56
3.2 子博弈精炼多维 Nash 均衡	62
3.3 应用研究	63
3.4 小 结	72
第 4 章 不完全信息静态多维博弈	73
4.1 不完全信息静态多维博弈描述	73
4.2 贝叶斯多维 Nash 均衡	76

4.3	应用研究	78
4.4	小 结	91
第 5 章	不完全信息动态多维博弈	92
5.1	精炼贝叶斯多维 Nash 均衡	92
5.2	应用研究	99
5.3	小 结	107
第 6 章	多维博弈的其他探讨	108
6.1	信息量对多维价格博弈均衡策略的影响分析	108
6.2	不确定环境下的多维博弈	114
6.3	小 结	123
第 7 章	结 论	124
7.1	本书的主要研究工作和创新点	124
7.2	对这类多维博弈的几点说明	125
参考文献		127

第1章 绪论

1.1 国内外综述

1.1.1 国外综述

博弈论是研究决策主体的行为发生直接相互作用时的决策以及这种决策的均衡问题的，也就是说，当一个主体，或者说一个人或一个企业的选择受到其他人或其他企业选择的影响，而且反过来影响到其他人或其他企业选择时的决策问题和均衡问题。从这个意义上说，博弈论又称“对策论”。在博弈中，每个参与人的效用函数不仅依赖于他自己选择的策略，而且依赖于其他参与人选择的策略，即每个人的最优选择是其他人选择的函数。因此，博弈论研究的是在存在相互外部经济条件下的个人选择问题。博弈论可以划分为合作博弈（Cooperative Game）和非合作博弈（Non-Cooperative Game），现在经济学家谈到的博弈论一般都指的是非合作博弈，很少指合作博弈。合作博弈与非合作博弈的主要区别在于：人们的行为相互作用时，当事人能否达成一个具有约束力的协议，如果有，就是合作博弈；反之，则是非合作博弈。例如，两个（或几个）企业如果对某一种产品达成了具有约束力的统一市场销售价格，且每个企业在市场上都遵照这一协议价格进行销售，这就是合作博弈。如果有某一个（或几个）企业

不遵守协议，使每个企业在市场上都只选择自己的最优价格，则是非合作博弈。合作博弈强调的是团体理性、效率、公正和公平；非合作博弈强调的是个人理性、个人最优决策，其结果可能是有效率的，也可能是无效率的。然而，现实生活中的大多数博弈都是非合作博弈。而且博弈的参与人越多，越可能是非合作博弈，因为参与人越多，越难达成一致的协议。在社会实践和生活中，人们决策行为之间相互影响的例子很多，几乎所有遇到的事情都是这样。比如，OPEC（石油输出国组织）成员国选择石油产量；寡头市场上，企业选择它们的产品价格或产量；家庭中的夫妻，他们之间的行为也是一种博弈；还有国家之间在军事上或经济上的竞争；两个企业在广告上的竞争；等等。因此，博弈论的应用是非常广泛的。

其实博弈思想由来已久，如我国古代战国时期，齐王与大臣田忌赛马的故事就是一个典型的博弈问题。但是博弈论正式发展成为一门学科则是从 20 世纪初开始的，1944 年，冯·诺依曼和摩根斯顿合著的《博弈论与经济行为》标志着博弈论作为一门学科正式建立起来。在这本书中，冯·诺依曼和摩根斯顿建立了博弈论的基本分析体系，许多基本概念沿用至今（如预期效用理论等），并成为博弈论的标准分析框架。到 20 世纪 50 年代，合作博弈发展到鼎盛期，如 1953 年 Gillies 和 Shapley 提出了合作博弈中“核（Core）”的概念、纳什（Nash）和夏普里（Shapley）的“讨价还价”模型等。在这一时期，对合作博弈研究达到了顶峰，同时非合作博弈论也开始发展起来，其中主要代表人物是纳什（Nash）、泽尔腾（Selten）和海萨尼（Harsanyi）等。纳什在 1950 年和 1951 年发表了两篇关于非合作博弈的重要论文，Tucker 于 1950 年定义的“囚徒困境”博弈，基本上奠定了现代非合作博弈论的基石。纳什在论文中提出的 Nash 均衡概念和对合作博弈与非合作博弈的明确区分，使 Nash 均衡成为非合作博弈理论的核

心概念。到 20 世纪 60 年代, 泽尔腾 (Selten) 针对 Nash 均衡概念的缺陷进行了深入分析, 即 Nash 均衡的多重性问题, 其真正令博弈论专家棘手的问题不是一个博弈是否存在均衡, 而是一个博弈可能有多个均衡存在, 那么哪个是真正的结果呢? 博弈论并没有一个一般理论证明哪一个 Nash 均衡结果一定会出现。为此, 1960 年萨林 (Schelling) 提出了“聚点”均衡概念, 1974 年奥蒙 (Aumann) 又提出了“相关均衡”概念。萨林指出, 在现实生活中, 参与人可能使用某些被博弈模型抽象掉的信息来达到一个“聚点”均衡, 这些信息可能与社会文化、参与人习惯、参与人过去博弈的历史等有关。比如性别战中, 如果今天是男同胞的生日, (足球, 足球) 可能成为一个聚点均衡; 而如果今天是女同胞的生日, (芭蕾, 芭蕾) 可能成为一个聚点均衡。在分割蛋糕博弈中, 如果每个人都有某种公平意识的话, $(0.5, 0.5)$ 可能是一个聚点均衡。奥蒙指出, 假设每个参与人独立行动, 如果参与人可以根据某个共同观测到的信号选择行动, 就可能出现“相关均衡”。相关均衡可能是参与人事前磋商的结果, 可以使参与人受益。如两个寡头将进行某产品的价格博弈, 前一天都听到了政府关于这种产品市场价格的政策 (如低价格的厂商给予某种优惠政策), 第二天, 两个寡头可能同时采取了低价格策略, 显然两个寡头的选择相关。泽尔腾将 Nash 均衡概念引入到动态分析中, 在扩展型 (动态) 博弈分析方面取得了重大成果, 他先后提出两个概念, 一是子博弈精炼均衡, 二是颤抖手精炼均衡。^① 事实上, 一个博弈可能有多个 Nash 均衡, 甚至可能有无数个 Nash 均衡, 究竟哪一个实际会发生? ^② 在 Nash 均衡中, 参与人在选择策略时, 把其他参与人的策略当作给定的, 不考虑自己的选择如何影响对手的策略。这个假设在研究静态博弈时是成立的, 因为静态博弈下, 所有参与人同时行动, 无暇反应。但对动态博弈而言, 这个假设就存在问题了。当一个参与人行动在先, 另一个人行动

在后时，后者会根据前者的选择而调整自己的选择，前者自然也会理性地预期到这一点，所以不可能不考虑自己的选择对其对手的选择的影响。^③与第二个问题相联系，由于不考虑自己选择对别人选择的影响，Nash 均衡允许了不可置信威胁的存在。由此，在 1965 年，泽尔腾通过对动态博弈的分析，定义了“子博弈精炼 Nash 均衡”概念，这个概念的中心含义是将 Nash 均衡中包含的不可置信威胁策略剔除出去，使均衡策略不再包含不可置信的威胁。它要求参与人的决策在任何时点上都是最优的，决策者要“随机应变”，“向前看”，而不是固守旧略。由于剔除了不可置信的威胁策略，在许多情况下，精炼 Nash 均衡也减少了 Nash 均衡个数。关于颤抖手精炼均衡，这是泽尔腾 1975 年提出的。颤抖手精炼均衡的基本思想是，在任何一个博弈中，每一个参与人都有一定的可能性犯错误（类似一个人用手抓东西时，手一颤抖，他就可能抓不住他想抓的东西）；一个策略组合只有当它在允许所有参与人都可能犯错误时，仍是每一个参与人的最优策略的组合时，才是一个均衡。泽尔腾将非均衡事件的发生解释为“颤抖”：当一个参与人突然发现一个不该发生的事件发生时（即博弈偏离均衡路径），他把这个不该发生的事件的发生归结为某一个其他参与人的非蓄意错误。通过引入“颤抖”，博弈树上的每个决策结出现的概率都为正，从而每一个决策结上的最优反应都有定义，原博弈的均衡可以理解为被颤抖扰动后的博弈均衡的极限。子博弈精炼均衡和颤抖手精炼均衡后来成为 Nash 均衡的“精炼”概念，这两个概念虽然不能完全解决 Nash 均衡的缺陷，但对理解和分析理性行为提供了新的思路。

豪尔绍尼还考察了信息问题，构造了不完全信息博弈理论，后人在此基础上建立了信息经济学。海萨尼的重要贡献是在 1967—1968 年期间提出了处理不完全信息博弈的方法，即 Harsanyi 变换，该变换是在不完全信息博弈中引入一个虚拟的参与人——

“自然”；自然先行动决定参与人的特征，参与人知道自己的特征，其他参与人不知道。这样就使不完全信息博弈转化为完全但不完美信息博弈，使复杂的不完全信息博弈得到了简化，促进了不完全信息博弈的进一步发展。在这一时期，泽尔腾和豪尔绍尼等人认为合作应是理论的结果而不是前提，应该以非合作博弈的方式建模描述合作的达成，而且非合作博弈使用于更广阔的社会经济形式，需要丰富和完善非合作博弈理论的分析工具与手段。正是泽尔腾和豪尔绍尼的这些研究成果使得非合作博弈理论更加丰富和完善，从而能够描述广泛存在于社会经济系统的形形色色的博弈局势，这使得博弈论进入了第二个辉煌期。

另外，国内外对博弈论研究的一个比较重要的分支是多准则博弈。多准则博弈也称多指标博弈，主要研究博弈参与人如何根据给定的多个指标来选择策略。最早对多准则博弈进行研究的是 Blackwell 和 Contini，两者处理的都是二人具有向量支付的博弈问题。1959 年，Shapley 定义了一个二人多准则博弈的平衡点的概念，并证明了某些非零和博弈的解就是对应的一个多准则博弈问题在混合策略下的平衡点。60 年代，除了 Contini 外，Charnes 等人也对多准则博弈作了一些研究，但研究成果都是比较初步和零散的。

20 世纪 70 年代后，多准则博弈的研究在国际上迅速得到很多学者的关注和重视。最有贡献的人物当属 Zeleny, Yu 和 Leitmann。Zeleny 主要讨论了二人零和多准则博弈问题的模型、理论和求解方法；Yu 和 Bergstresser 对单指标 n -人博弈问题的解概念进行了分类，并利用支配结构来揭示它们的内在隐含，导出了刻画这些解概念的新的若干结果。从方法论角度看，他们把一个 n -人标量支付博弈问题看成是一个多人多目标决策问题来处理。80 年代后，多准则博弈的应用研究得到了更大发展，各种多准则博弈模型和相应解的概念被提出，但相应的分析基础主要是

在向量值情况下的广义 Minmax 定理和广义鞍点定理等上建立起来的,特别是求解方法蜂拥而出。此外,对多准则博弈问题与 DEA 的关系、多准则博弈问题与一般多目标规划问题的关系等方面的研究也不少。总之,概括起来,多准则博弈的研究主要着眼点是博弈局势中参与人根据多个指标选择最优策略,一般处理方法是将其转化为多目标规划,运用多目标规划的研究方法来求得其均衡解。由于多准则博弈在现实中的应用很广泛,因此很多学者致力于这方面的理论和应用研究。

博弈论中另一个比较重要的分支是微分博弈,又分为定量和定性微分博弈两大类。微分博弈主要在军事领域应用比较广泛,起源于第二次世界大战期间,早期主要研究追逃问题和两车型定性微分博弈,后来又研究固定逗留期二人零和微分博弈、阵位博弈、随机微分博弈、多人合作微分博弈和多人非合作微分博弈等。20 世纪 90 年代后,人们开始探讨多目标微分博弈和模糊微分博弈,但目前尚未取得实质性成果。微分博弈虽然起源于军事上的需要,但今天已经不仅仅局限于军事冲突问题的研究,而是已经被广泛应用于国防现代化建设、生产管理、经济、社会生活等领域,并成为了科学、有效的决策工具。

以上介绍了博弈论方面最有影响力的代表人物(Nash, Selten, Harsanyi)和博弈论发展的主要方面,以下再以时间循序介绍一些国外专家和学者在这方面的研究成果。

1959 年,Shapley 定义了一个两人多准则博弈的均衡点概念,并证明了某些非零和博弈的解就是对应的一个多准则博弈问题在混合策略下的均衡点;1967 年,W. F. Lucas 找到了一个 10 人博弈无解的例子。从此,人们也不再认为博弈论是解决人类一切冲突的灵丹妙药,但都公认它是解决冲突问题的最有效的方法。因此,仍有许多人致力于博弈论与方法的研究,他们不仅积极探索博弈论的理论与方法,同时也在继续扩大博弈论的应用范围。1976

年, R. K. Ragade 研究了模糊策略的 2 人博弈, 给出了确定 λ -均衡点的局势集的方法; 同年, Zeleny 在文章 *Games with Multiple Payoffs* 中不仅讨论了两入零和多准则博弈问题的模型、理论和求解方法, 而且提出了妥协策略 (Compromise Strategy); 1977 年, S.A.Orlovsky 研究了模糊策略和实值支付函数的 2 人博弈, 并给出了确定模糊均衡解和模糊赢得的方法; 同年, Yu 和 Bergstresser 在文章 *Domination Structures and Multicriteria Problems in N-person Games* 中首先对单指标 n -人博弈问题的解概念进行分类, 利用支配结构 (Domination Structures) 来揭示它们的内在隐含, 导出了刻画这些解概念的让人耳目一新的若干结果, 从方法论角度来看, 他们将一个 n -人标量支付博弈问题看成一个多人多目标决策问题处理, 这样多准则决策中的许多理论结果与方法就可以直接应用到博弈论中来了; 1978 年, D.Butnariu 研究了 2 人博弈的最保险策略规划, 给出了参与人应采取的模糊策略的确定方法; 1979 年, W. M. Getz 和 G.Leitmann 讨论了两目标定性微分博弈; 1980 年, D. Dubois 和 H.Prade 研究了具有模糊支付的 2 人零和博弈, 并用两个模糊博弈值的交点高度作为鞍点存在的可能性度量; 1986 年, R. Lucchetti, F. Patrone 和 S. H. Tijs 研究了半无限双矩阵博弈的 c -扩张, 得到了扩张的一类充分条件; 1987 年, Borm. Peter 提出了具有不完全信息的重复零和博弈的一般模型, 研究了单边具有不完全信息的重复零和博弈中的向前递归公式和极限与值次序交换定理, 同时也研究了双边具有不完全信息的重复零和博弈中的 Mertens 和 Zamir 定理; 同年, Shamandy, Ali 和 Varga, Zoltan 证明: 若支付函数连续, 则无限多人动态博弈的合作解存在; A. Ostman 证明了齐次博弈存在唯一的极小表示; Marutyan, Eremya 把确定 Shaply 函数的方法扩充到模糊合作博弈中, 将模糊博弈的解定义为一个向量, 其中某个函数达到极小值, 并找到了这种解满足 Shaply 公理的条件。Chang, Chih

提出了 N 人非合作博弈解的一个新概念——吸收集, 证明了 Neuman-Morgenstern 解是吸收集; 1988 年, Quintas, G. Luis 给出了构造具有指定均衡点的双矩阵博弈的一些理论与方法; 同年, Kikuta, Kensaku 证明了 N 人合作特征函数博弈 (N, v) 是凸的等价于按 W. Sharkey 定义 (N, v) 的所有博弈核是大的; Matloka, Marian 把 N 人非合作博弈解的概念推广到策略集是模糊集的情况, 并给出了相应的 Nash 均衡点的存在性定理; 1989 年, Hart, Sergiu, Andreu 给出了按照特征函数表示的 N 人合作博弈的 shaply 值的一个新公理; 同年, D. C. Kabe 基于线性限制条件和二次型的理论提出了求解 2 人零和博弈最优策略的方法。当确切的解不存在时, 用这种方法亦可找到一种近似解。但可惜此方法仅适应于两个或三个变量的博弈问题。1990 年, A. P. Jurg, M. J. M. Jansen, T. Parthasarathy 和 S. H. Tijs 研究了弱完备混合双矩阵博弈问题, 并指出其具有唯一的完全混合均衡点; 同年, J.W.Mamer 和 K.E.Schilling 通过一个有限信息结构博弈研究了不完全信息零和博弈的逼近问题; 1991 年, G. Fiestras-Janeir 等人用几何方法研究了当每个参与人至少有 3 个纯策略时的双矩阵博弈的均衡问题; 同年, A. H. Vanden Elzen 与 A. J. J. Talman 给出了双矩阵博弈中寻找 Nash 均衡点的新方法, 此方法不同于 Lemke-Howson 方法, 它几乎可以从任何一个策略向量开始, 当开始时所有的行动具有确定的概率时, 则得到一个完全均衡点。再从不同的策略向量开始, 重复此方法, 最后可得到所有的 Nash 均衡点; Cegirski, Andrzej 研究了一类具有非连续支付函数的 2 人零和博弈, 说明了此类博弈解的存在性, 并用可结合的矩阵博弈的策略和 ϵ —最优策略构造了此类博弈的解; J. Zhao 介绍了合作、非合作、混合、半混合均衡解概念, 并证明了它们的存在性; Gicher, Todor 类似于数学规划的半无限问题定义了 N 人半无限博弈, 并用通过有限个不等式定义的策略集的博弈序列逼近 N 人

半无限博弈; 1992 年, A. P. Jurg, M. J. M. Potters 和 S. H. Tijs 又把 D. Gale 等人的对称化矩阵方法用于双矩阵博弈, 证明了双矩阵博弈的均衡点和对称化后的均衡对称点是一一对应的; 同年, M. Ali, Khan, Rustichini 和 Aldo 研究了具有不确定性和不完全信息的博弈 Cournot-Nash 均衡点的分布问题; M. Sakawa 和 I. Nishizaki 将多目标的概念引入到模糊矩阵博弈的研究中, 给出了求其 Max-Min 解的算法; Masatoshi Sakawa 用最大最小值法讨论了具有模糊多目标支付矩阵的 2 人零和博弈; 2000 年, Ichiro Nishizaki, Masatoshi Sakawa 研究了具有一类特殊类型的模糊支付和模糊目标的模糊博弈的均衡解问题; 2001 年, Won Kyu Kim 和 Kyoung Hee Lee 定义了推广的模糊博弈及模糊均衡的概念, 证明了具有不可数个参与人的推广的模糊博弈的均衡解的存在。

1.1.2 国内综述

我国对博弈论的研究起步较晚, 研究者也较少, 研究成果是最近几年才较多, 主要是在 1994 年诺贝尔经济学奖授予了三位博弈论专家纳什 (Nash)、海萨尼 (Harsanyi) 和泽尔滕 (Selten) 后才开始“热”起来。国内较早和较有影响的是张维迎教授于 1996 年出版的专著《博弈论与信息经济学》, 该著作主要特点是将博弈理论运用到信息经济学领域; 汪寿阳教授、俞健教授等人主要在多准则博弈理论和应用方面获得了很多研究成果; 这几年来以后又出版了几本较有影响的著作, 有谢识予的《经济博弈论》(1997)、张守一的《现代经济对策论》(1998)、陈学彬的《宏观金融博弈分析》(1998)、施锡铨的《博弈论》(2000) 等, 这些专著都各有其独到特点。与此同时, 国内很多专家和学者在该领域也获得了很多创新性成果, 如 1989 年, 曲晓飞首先讨论了 Nash 协商对策理论的推广结果——多目标 Nash 协商对策理论。它是基于多属

性效用理论与对策论的有机结合,在模型中引入了多目标描述它的解,除了保持原 Nash 协商对策解的所有性质之外,还具有多目标决策非劣解意义下的合理性;宋学锋和郑权提出了一种非合作及两种半合作解的概念;1992 年,罗中函在 N 人非合作博弈中提出用稳定点作为博弈的解,从而推广了矩阵博弈中的最优解概念;侯恩祥提出了 N 人非合作博弈的两类 Nash 均衡点;1993 年,马绪荣提出了向量优越的概念,给出了零和博弈的两个等价定义,得到了 2 人零和博弈等价的两个充要条件及三个充分条件,并运用该理论给出了 2 人零和博弈混合鞍点的一个新算法;安梅研究了求解矩阵博弈的两个对偶线性规划的更有效方法,给出了当支付矩阵数据绝对值较大或较小时的处理方法;1994 年,徐扬在其博士论文中建立具有两个格序结构的格序模的基本理论,建立了格值型博弈的基本理论;李登峰首次建立了一般形式的多人多目标非合作确定性定量微分博弈模型,提出了 Pareto-Nash 均衡策略这一新概念及其求解原理、方法与步骤;罗晓和肖人彬研究了由特征函数给出的、允许参与人数目变动的、有边支付、非凸合作博弈形式的分配问题,建立了统一模型,得到了核心分配原则的等价条件;1996 年,曹永强、曲晓飞提出不完全信息多人多目标资源分配问题的模糊协商博弈方法,把 Pareto 最优、多目标资源分配协商博弈和最大均衡满意度协商博弈解等概念及协商公理推广到模糊环境下,证明了模糊最大均衡满意度协商博弈解满足模糊协商公理,并给出了求解它的模糊数学规划模型,把协商博弈问题从普通效用集扩展到模糊效用集,从精确效用值扩展到模糊效用值;1997 年,胡应平提出了达标度及达标度矩阵博弈的有关定义,给出了达标度矩阵博弈的协调解概念及解的结构;同年,唐俊、陈铤在 Myerson 的 Proper 均衡概念的基础上定义了新的均衡概念,新的均衡形成了 Proper 均衡的子集;1998 年,俞健等人