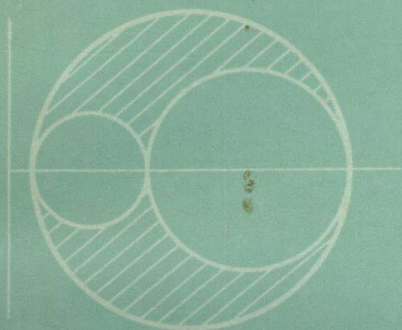


高等学校教材



刘鸿文 主编

材料力学

第二版 下册

高等教育出版社

TB301
28/2

高等学校教材

材料力学

(第二版)

下册

刘鸿文 主编

高等教育出版社

本教材第一版是浙江大学等九院校合编的《材料力学》，现在出版的第二版是由刘鸿文(主编)、林建兴、曹曼玲按一九八〇年审订的120学时材料力学教学大纲(草案)修订成的。第二版仍分上、下两册出版。

第二版中从第一章到第十四章和附录I，为教学大纲中的基本部分，第十五章到第十八章是专题。专题和带有*号的内容，主要是教学大纲中列入的专题和大纲中标注*号的部分，供教师和读者根据需要取舍。

第二版上册包括第一章到第九章和附录，计有：绪论、拉伸与压缩、剪切、扭转、弯曲内力、弯曲强度、弯曲变形、应力状态及应变状态分析、强度理论、组合变形、平面图形的几何性质。下册包括第十章到第十八章，计有：能量法、静不定系统、动载荷、交变应力、压杆稳定、平面曲杆、厚壁圆筒和旋转圆盘、矩阵位移法、杆件的塑性变形。

本教材适用于高等工业学校机械类各专业，也可供其他专业和有关工程技术人员参考。

高等学校教材
材料力学
(第二版)
下 册
刘鸿文 主编

*

高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京印刷二厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张11 字数260,000
1979年4月第1版 1983年2月第2版 1983年7月第6次印刷

印数 408,301—458,200

书号 15010·0472 定价1.30元

下 册 目 录

✧	第十章 能量法	1
	§ 10-1 概述	1
	§ 10-2 杆件变形能的计算	2
	§ 10-3 变形能的普遍表达式	10
	§ 10-4 莫尔定理	12
	§ 10-5 计算莫尔积分的图乘法	20
	§ 10-6 卡氏定理	24
	*§ 10-7 剪力对弯曲变形的影响	32
	§ 10-8 功的互等定理和位移互等定理	34
	*§ 10-9 虚功原理	36
	习题	42
✧	第十一章 静不定系统	52
	§ 11-1 静不定系统的概念	52
	§ 11-2 弯曲静不定问题	55
	§ 11-3 用力法解静不定系统	62
	*§ 11-4 连续梁及三弯矩方程	74
	习题	84
✓	第十二章 动载荷	92
	§ 12-1 概述	92
	§ 12-2 构件作匀加速直线运动或匀速转动时的应力计算	92
	*§ 12-3 构件在强迫振动时的应力计算	98
	§ 12-4 冲击时应力和变形的计算	104
	§ 12-5 提高构件抗冲击能力的措施	111
	§ 12-6 冲击韧度	114
	习题	116
✓	第十三章 交变应力	124
	§ 13-1 交变应力及疲劳破坏	124

§ 13-2	交变应力的循环特性、应力幅度和平均应力	127
§ 13-3	材料的持久极限及其测定	129
§ 13-4	影响构件持久极限的因素	131
§ 13-5	对称循环下构件的疲劳强度计算	139
§ 13-6	持久极限曲线及其简化折线	141
§ 13-7	不对称循环下构件的疲劳强度计算	145
§ 13-8	弯曲和扭转组合交变应力下构件的疲劳强度计算	150
§ 13-9	提高构件疲劳强度的措施	154
	习题	156
第十四章	压杆稳定	162
§ 14-1	压杆稳定的概念	162
§ 14-2	两端铰支细长压杆的临界压力	165
§ 14-3	其他支座条件下细长压杆的临界压力	169
§ 14-4	欧拉公式的适用范围 经验公式	174
§ 14-5	压杆的稳定校核	180
*§ 14-6	压杆稳定计算的折减系数法	182
§ 14-7	提高压杆稳定性的措施	185
*§ 14-8	纵横弯曲的概念	189
	习题	192
第十五章	平面曲杆	201
§ 15-1	概述	201
§ 15-2	平面曲杆纯弯曲时横截面上的正应力	202
§ 15-3	中性层曲率半径 r 的确定	208
§ 15-4	曲杆的强度计算	218
§ 15-5	曲杆的变形计算	220
	习题	224
第十六章	厚壁圆筒和旋转圆盘	228
§ 16-1	概述	228
§ 16-2	厚壁圆筒	229
§ 16-3	组合厚壁圆筒	234
§ 16-4	长圆筒的温度应力	238
§ 16-5	等厚旋转圆盘	242

习题	245
第十七章 矩阵位移法	248
§ 17-1 概述	248
§ 17-2 轴向拉伸(压缩)杆件的刚度方程	250
§ 17-3 受扭杆件的刚度方程	258
§ 17-4 受弯杆件的刚度方程	261
§ 17-5 梁单元的中间载荷	271
§ 17-6 组合变形杆件的刚度方程	275
§ 17-7 局部坐标和整体坐标 坐标变换矩阵	282
§ 17-8 平面桁架	287
§ 17-9 平面刚架	294
习题	298
第十八章 杆件的塑性变形	304
§ 18-1 概述	304
§ 18-2 金属材料的塑性性质	304
§ 18-3 拉伸和压缩杆系的塑性分析	307
§ 18-4 圆轴的塑性扭转	311
§ 18-5 塑性弯曲和塑性铰	314
§ 18-6 梁的塑性分析	319
§ 18-7 残余应力的概念	323
§ 18-8 厚壁圆筒的塑性变形	325
习题	331
下册习题答案	335

第十章 能 量 法

§ 10-1 概 述

变形固体力学中,与能量概念有关的一些定理和原理,统称为能量原理。对刚架、桁架、曲杆等的变形计算,静不定结构的求解,应用能量原理都非常简便。由于能量原理还是计算力学的基础之一,所以近年来更受重视。

在 § 2-9 中曾经指出,在杆件的拉伸过程中,外力所作的功等于储存于杆内的变形能。在更普遍的情况下,任意变形固体将因外力作用而变形,从而引起外力作用点沿力作用线方向的位移。于是外力作了功,而变形固体内储存了变形能。若外力从零开始缓慢平稳地增加到最终值,在变形过程中,除变形能外,动能及其他能量的变化甚小可以不计,于是可以认为,外力所作的功 W 全部转变为储存于变形固体内的变形能 U 。即

$$U = W \quad (10-1)$$

在弹性范围内,变形能是可逆的。即当外力逐渐解除时,变形能又可全部转变为功。超过弹性范围后,固体的塑性变形将耗散一部分能量,变形能中只有一部分可以再转变为功。

某些能量原理,如虚功原理等,并不局限于线弹性问题,也可适用于非线性弹性和塑性问题。但本章讨论的内容,仍以线弹性问题为主。

§ 10-2 杆件变形能的计算

现在讨论杆件在各种基本变形下变形能的计算。

(一) 轴向拉伸或压缩 在线弹性范围内, 当拉力 P 从零开始逐渐增加到最终值时, 杆件伸长 Δl 与拉力 P 之间的关系为一斜直线(图 10-1)。在 § 2-9 中已经证明, 这时三角形 OAB 的面积在数值上等于外力所作的功, 即

$$W = \frac{1}{2} P \Delta l$$

于是由(10-1)式知杆件的变形能为

$$U = W = \frac{1}{2} P \Delta l \quad (a)$$

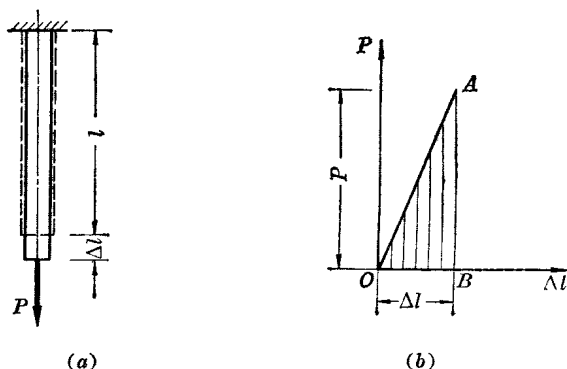


图 10-1

若只在杆件的两端作用拉力或压力, 沿轴线的轴力 N 为常量, 且 $N = P$, $\Delta l = \frac{Nl}{EA}$ 。上式可以写成

$$U = \frac{1}{2} P \Delta l = \frac{N^2 l}{2EA} \quad (10-2)$$

若外力比较复杂, 沿杆件轴线的轴力 N 为变量时, 可先计算长

为 dx 的微段内的变形能

$$dU = \frac{N^2(x)dx}{2EA}$$

然后按积分的方法计算整个杆件的变形能

$$U = \int_l \frac{N^2(x)dx}{2EA} \quad (b)$$

拉伸或压缩时, 单位体积的变形能(比能)是

$$u = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon \quad (10-3)$$

(二) 扭转和剪切 圆轴扭转时(图 10-2, a), 在线弹性范围内, 若扭转力偶矩从零开始逐渐增加到最终值 M , 则扭转角 φ 与 M 之间的关系, 也是一条斜直线, 如图 10-2, b 所示。与拉伸相似, 可以证明, 在变形过程中, 扭转力偶矩所作的功在数值上等于 M - φ 图中斜直线下的面积, 即

$$W = \frac{1}{2}M\varphi \quad (c)$$

在图 10-2, a 的情况下, 圆轴任意横截面上的扭矩皆等于外力偶

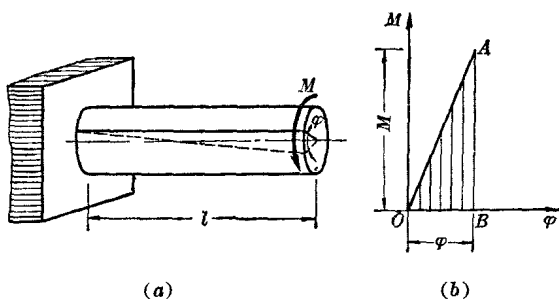


图 10-2

矩, 即 $M_n = M$, 且 $\varphi = \frac{M_n l}{GI_p}$ 。这样, 由公式(10-1)得扭转变形能为

$$U = W = \frac{1}{2} M \varphi = \frac{M_n^2 l}{2GI_p} \quad (10-4)$$

与轴向拉伸相似, 当扭矩沿轴线为变量时, 变形能按下列积分计算,

$$U = \int_l \frac{M_n^2(x) dx}{2GI_p} \quad (d)$$

在 § 3-4 中, 通过薄壁圆筒的扭转(图 10-3, a), 曾经求得在纯剪切的情况下(图 10-3, b), 单位体积的变形能(比能)为

$$u = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{1}{2} \tau \gamma \quad (10-5)$$

上式在形式上与公式(10-3)是相似的。

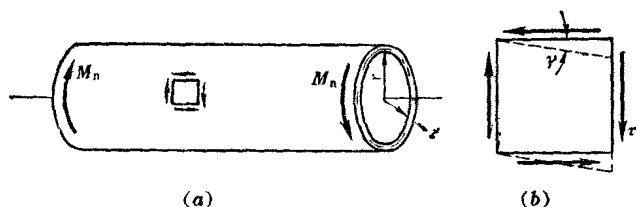


图 10-3

(三) 弯曲 图 10-4, a 为一等截面简支梁, 在两端作用外力

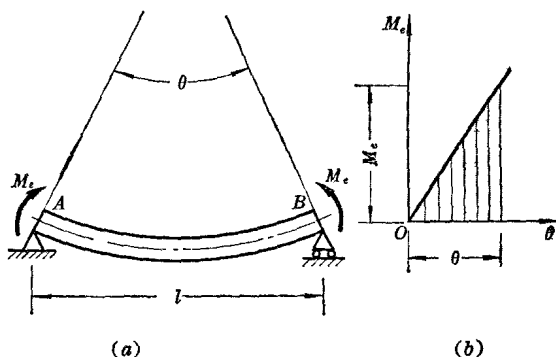


图 10-4

偶矩 M_e , 使梁的变形为纯弯曲。如以 θ 表示端截面 A 和 B 间的相

对转角,应用第七章中求弯曲变形的的方法,可以求出

$$\theta = \frac{M_e l}{EI}$$

所以,在线弹性的范围内,若弯曲力偶矩从零开始逐渐增到最终值 M_e , 则 M_e 与 θ 的关系也是一条斜直线(图 10-4, b)。弯曲力偶矩在变形中所作的功,在数值上等于 M_e - θ 图中斜直线下的面积,即

$$W = \frac{1}{2} M_e \theta \quad (e)$$

在纯弯曲的情况下,梁横截面上的弯矩等于外加力偶矩 M_e , 即 $M = M_e$ 。于是由(10-1)式知纯弯曲时的弯曲变形能是

$$U = W = \frac{1}{2} M_e \theta = \frac{M^2 l}{2EI} \quad (10-6)$$

在横力弯曲的情况下(图 10-5, a), 梁截面上除弯矩外, 还有剪力。一般说弯矩和剪力随截面的位置而变化, 都是 x 的函数。这时应该分别计算与弯曲和剪切相对应的变形能。但在细长梁的情况下, 与剪切相应的变形能通常很小, 可以省略不计, 所以只需要计算弯曲变形能。在计算弯曲变形能时, 可从梁内取出长为 dx 的微段(图 10-5, b), 其左右两端横截面上的弯矩应分别是 $M(x)$ 和 $M(x) + dM(x)$ 。省略弯矩增量 $dM(x)$ 后, 可以把微段看作是纯弯曲的情况。于是可以应用公式(10-6)算出它的变形能

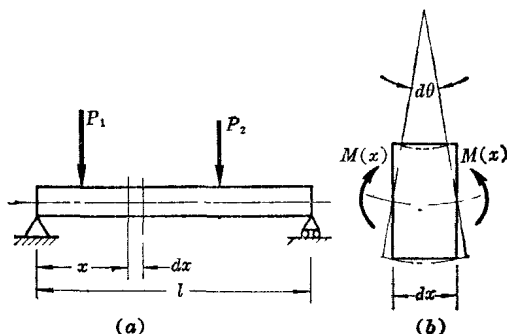


图 10-5

$$dU = \frac{M^2(x)dx}{2EI}$$

全梁的变形能可按积分的方式求出为

$$U = \int_l \frac{M^2(x)dx}{2EI} \quad (10-7)$$

如果在梁的各段内, 弯矩 $M(x)$ 由不同的函数表示, 上列积分应分段进行, 然后求其总和。

总结以上讨论, 杆件变形能在数值上等于变形过程中外力所作的功。在线弹性范围内, 若外力由零开始逐渐增加到最终值, 外力所作的功又可由(a)、(c)、(e)诸式来表示。综合这些表达式, 可把变形能统一写成

$$U = W = \frac{1}{2} P \delta \quad (10-8)$$

式中 P 在拉伸时代表拉力, 在扭转或弯曲时代表力偶矩, 所以称为广义力。 δ 是与 P 对应的位移, 称为广义位移。例如, 在拉伸时它是与拉力对应的线位移 Δl ; 在扭转时它是与扭转力偶矩对应的角位移 φ 。在线弹性体的情况下, 广义力与广义位移之间是线性关系。

例 10-1 试求图 10-6 所示简支梁的变形能, 并求集中力 P 作用点 C 的位移。

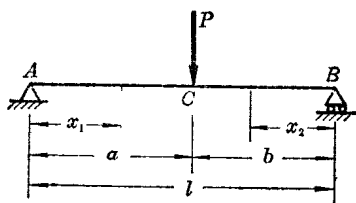


图 10-6

解: 按照所取坐标系, 简支梁在 AC 段内的弯矩是

$$M_1 = R_A x_1 = -\frac{Pb}{l} x_1 \quad (0 \leq x_1 \leq a)$$

在 CB 段内的弯矩是

$$M_2 = R_B x_2 = \frac{Pa}{l} x_2 \quad (0 \leq x_2 \leq b)$$

由于在 AC 和 CB 两段内弯矩由不同的函数表示, 所以用公式(10-7)计算弯曲变形能时, 应分段积分。即

$$\begin{aligned} U &= \int_1 \frac{M^2(x) dx}{2EI} = \int_0^a \frac{M_1^2 dx_1}{2EI} + \int_0^b \frac{M_2^2 dx_2}{2EI} \\ &= \frac{1}{2EI} \int_0^a \left(\frac{Pb}{l} x_1 \right)^2 dx_1 + \frac{1}{2EI} \int_0^b \left(\frac{Pa}{l} x_2 \right)^2 dx_2 \\ &= \frac{P^2 a^2 b^2}{6EI l} \end{aligned}$$

设 C 点的位移为 f_c , 在变形过程中, 集中力 P 作的功应为

$$W = \frac{1}{2} P f_c$$

由于 $U = W$, 故有

$$\frac{1}{2} P f_c = \frac{P^2 a^2 b^2}{6EI l}$$

由此求出

$$f_c = \frac{Pa^2 b^2}{3EI l}$$

例 10-2 轴线为半圆形的平面曲杆如图 10-7, a 所示。作用于 A 端的集中力 P 垂直于轴线所在的平面, 试求 P 力作用点的垂直位移。

解: 设任意横截面 mn 的位置由圆心角 φ 来确定。由曲杆的俯视图(图 10-7, b)可以看出, 截面 mn 上的弯矩和扭矩分别为

$$M = PR \sin \varphi$$

$$M_n = PR(1 - \cos \varphi)$$

微段 $Rd\varphi$ 内的变形能是

$$\begin{aligned} dU &= \frac{M^2 R d\varphi}{2EI} + \frac{M_n^2 R d\varphi}{2GI_p} \\ &= \frac{P^2 R^3 \sin^2 \varphi d\varphi}{2EI} + \frac{P^2 R^3 (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi}{2GI_p} \end{aligned}$$

积分求得整个曲杆的变形能为

$$U = \int_0^\pi \frac{P^2 R^3 \sin^2 \varphi d\varphi}{2EI} + \int_0^\pi \frac{P^2 R^3 (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi}{2GI_p}$$

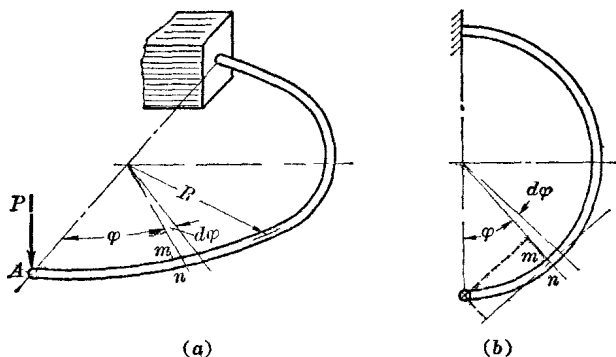


图 10-7

$$= \frac{P^2 R^3 \pi}{4EI} + \frac{3P^2 R^3 \pi}{4GI_p}$$

若 P 力作用点沿 P 的方向的位移为 f_A , 在变形过程中, 集中力 P 所作的功应为

$$W = \frac{1}{2} P f_A$$

由 $U=W$, 得

$$\frac{1}{2} P f_A = \frac{P^2 R^3 \pi}{4EI} + \frac{3P^2 R^3 \pi}{4GI_p}$$

所以

$$f_A = \frac{PR^3 \pi}{2EI} + \frac{3PR^3 \pi}{2GI_p}$$

例 10-3 用变形比能的概念证明三个弹性常数 E 、 G 、 μ 间的关系。

解: 在纯剪切的情况下(图 10-3, b), 已由公式(10-5)求出比能为

$$u = \frac{\tau^2}{2G}$$

另一方面, 根据例 8-3 的分析, 纯剪切应力状态下的主应力是

$$\sigma_1 = \tau, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\tau$$

这样, 我们又可将主应力代入公式(8-22)算出比能

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] = \frac{\tau^2(1+\mu)}{E}$$

按以上两种方式算出的结果同是纯剪切应力状态的比能, 它们应该相

等,即

$$\frac{\tau^2}{2G} = \frac{\tau^2(1+\mu)}{E}$$

由此求得三个弹性常数间的关系是

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

例 10 4 试由拉伸(压缩)的变形比能公式(10-3), 导出弯曲变形能公式(10-7)。

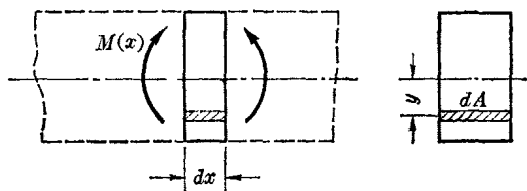


图 10-8

解: 在梁的横截面上, 离中性轴为 y 处的弯曲正应力为

$$\sigma = \frac{M(x) \cdot y}{I}$$

由公式(10-3), 单位体积内的变形能为

$$u = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{M^2(x) y^2}{2EI^2}$$

在图 10-8 中, 标有阴影线的微分体积为 $dV = dx dA$, dV 内的变形能为

$$dU = u dV = \frac{M^2(x) y^2}{2EI^2} dx dA$$

积分上式求出梁的弯曲变形能为

$$U = \int_V u dV = \int_l \left[\frac{M^2(x) dx}{2EI^2} \right] \int_A y^2 dA = \int_l \frac{M^2(x) dx}{2EI}$$

此即公式(10-7)。在纯弯曲的情况下(图 10-4), 弯矩为常量, 由上式又可得公式(10-6), 即

$$U = \frac{M^2 l}{2EI}$$

§ 10-3 变形能的普遍表达式

以上讨论了杆件在几种基本变形下变形能的计算。现在推广到一般情况。设作用于物体上的外力为 $P_1, P_2, P_3, \dots$ ，且设物体的约束条件使它除因变形而引起位移外，不可能有刚性位移(图 10-9)。用 $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$ 分别表示外力作用点沿外力方向的位移。这里的外力和位移是指广义力和广义位移。在 § 8-9 中曾经指出，

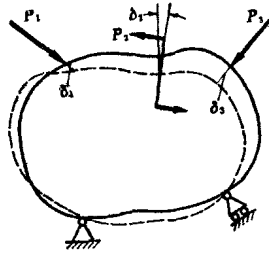


图 10-9

弹性体在变形过程中储存的变形能，只决定于外力和位移的最终值，与加力的次序无关。这样，在计算变形能时，就可假设 $P_1, P_2, P_3, \dots$ 按相同的比例，从零开始逐渐增加到最终值。若变形很小，材料是线弹性的，且弹性位移与外力之间的关系也是线性的。则位移 $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$ 也将与外力按相同的比例增加。为了表明外力按相同的比例增加，引进一个在零到 1 之间变化的参数 β 。加力过程中，各外力的中间值可表示为 $\beta P_1, \beta P_2, \beta P_3, \dots$ 。由于外力和位移之间是线性关系，所以相应的位移是 $\beta \delta_1, \beta \delta_2, \beta \delta_3, \dots$ 。外力从零开始缓慢地增加到最终值， β 从零变到 1。如给 β 一个增量 $d\beta$ ，位移 $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$ 的相应增量分别为

$$\delta_1 d\beta, \delta_2 d\beta, \delta_3 d\beta, \dots$$

外力 $\beta P_1, \beta P_2, \beta P_3, \dots$ 在以上位移增量上作的功为*

* 在位移 $\delta_1 d\beta$ 中，省略外力相应的增量 $P_1 d\beta$ ，认为 βP_1 不变，故 βP_1 作的功为 $\beta P_1 \cdot \delta_1 d\beta$ 。这相当于在计算外力作功时，省略了含有二阶微量 $(d\beta)^2$ 的项。

$$\begin{aligned}
 dW &= \beta P_1 \cdot \delta_1 d\beta + \beta P_2 \cdot \delta_2 d\beta + \beta P_3 \cdot \delta_3 d\beta + \cdots \\
 &= (P_1 \delta_1 + P_2 \delta_2 + P_3 \delta_3 + \cdots) \beta d\beta
 \end{aligned} \quad (a)$$

积分上式, 得

$$\begin{aligned}
 W &= (P_1 \delta_1 + P_2 \delta_2 + P_3 \delta_3 + \cdots) \int_0^1 \beta d\beta \\
 &= \frac{1}{2} P_1 \delta_1 + \frac{1}{2} P_2 \delta_2 + \frac{1}{2} P_3 \delta_3 + \cdots
 \end{aligned}$$

物体的变形能应为

$$U = W = \frac{1}{2} P_1 \delta_1 + \frac{1}{2} P_2 \delta_2 + \frac{1}{2} P_3 \delta_3 + \cdots \quad (10-9)$$

这表示, 线弹性体的变形能等于每一外力与其相应位移乘积的二分之一之和。这一结论也称为克拉贝依隆原理。

因为位移 $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \cdots$ 与外力 $P_1, P_2, P_3, \cdots$ 之间是线性关系, 如把公式(10-9)中的位移用外力来代替, 变形能就成为外力的二次齐次函数。同理, 如把外力用位移来代替, 变形能就成为位移的二次齐次函数。

现将上述原理应用于杆件的组合变形。设于杆件中取出长为 dx 的微段(图 10-10), 其两端横截面上有弯矩 $M(x)$ 、扭矩 $M_n(x)$ 和轴力 $N(x)$ 。对所分析的微段来说, 这些都是外力。设两个端截面的相对轴向位移为 $d(\Delta l)$, 相对扭转角为 $d\varphi$, 相对转角为 $d\theta$, 由公式(10-9), 微段内的变形能为

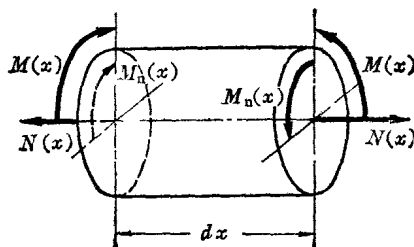


图 10-10