北京市高中数学补充教材

开放与探究性问题

SHUXUE

北京教育科学研究院基础教育教学研究中心 编

首都师范大学出版社
CAPITAL NORMAL UNIVERSITY PRESS

前　　言

高中数学是普通高中的一门主要课程，应使学生学好从事社会主义现代化建设和进一步学习所必需的基础知识、基本技能、基本思想和方法，培养实践能力和创新精神.

为全面提高我市高中数学学科的教学质量，全面推进素质教育，经北京市教委领导批准，北京教科院基教研中心中学数学教研室组织编写了这套高中数学补充教材，供高中数学教师和学生在教与学时参考使用.

这套补充教材力求体现课程改革的精神和要求，以《全日制普通高级中学数学教学大纲》为依据，针对高中数学的重点或难点章节及专题选编内容，既注重知识的系统性、深刻性，又加强了选择性，并适当充实了一些必要的内容，以体现高考改革的要求. 教师可根据学生的实际情况和教学需要，在必修课、选修课或课外活动中选择使用.

《北京市高中数学补充教材》主编曹福海，副主编郭立昌、刘美伦.《开放与探究性问题》一册的编者有：邴介夫、郝澎、彭林；统稿：郭立昌.

在编写过程中，我们进行了多次研究讨论，吸收了许多教师宝贵的教学经验，力求既有利于教师教，又有利于学生学. 由于我们水平有限，定会有许多不足之处，衷心期望使用本册教材的教师与学生提出宝贵意见.

编　　者

2003 年 2 月

目　　录

引　言

开放与探究性问题是指那些题目条件不完备，结论不明确，或者答案不唯一、给学生留下探索余地的问题. 与那种条件完备、结论明确、答案唯一的封闭性问题相比，开放与探究性问题的人口宽、解法活、形式新.

开放与探究性问题立意于对发散思维能力的培养和考查，是一种考查学生归纳推理能力、直觉思维能力和创新意识的题型，内容可涉及中学数学的各个方面，无法套用一个统一的解题模式. 因此，在求解开放与探究性问题时，正确运用数学思想方法来突破难点就显得格外重要.

开放与探究性问题一般有三类：

条件开放与探究性问题；

结论开放与探究性问题；

方法开放与探究性问题.

条件开放与探究性问题是指问题的结论明确，而条件不明或不足，且需要完备使结论成立的充分条件. 解这类问题，一般是模仿分析法，将题设和结论视为已知条件，倒推分析，执果索因，导出所需的条件.

结论开放与探究性问题是指结论不确定、不唯一，或结论需要通过类比引申推广，或结论需要通过特例归纳. 这类问题主要有存在型问题、归纳型问题和讨论型问题.

存在型问题在数学命题中以适合某种性质的结论"存在"、"不存在"、"是否存在"等形式出现. "存在"就是有适合某种条件或符合某种性质的对象，对于这类问题无论用什么方法只要找出一个即可；"不存在"一般需要推理论证，常用反证法；"是否存在"，结论

有两种可能：若存在，则需要找出来；若不存在，需要说明理由.解答这类问题，一般从承认结论、变结论为条件出发，然后或由特例归纳，或由演绎推理证明合理性.

归纳型问题是指对于只给出问题对象的一些特殊关系，需要解题者探求出一般规律的一类问题，也称之为探求规律型.解决这类问题常常从最简单、最特殊的情况出发，推测结论的各种可能性，或者找到一般规律，然后加以证明；若有参数，可以先用待定系数法确定参数，再加以论证；若命题与自然数有关，可以具体考虑前几个自然数的情况，通过比较、观察、归纳、猜想得出结论，再用数学归纳法证明.

对于结论开放的讨论性问题，则应全面考察问题的各个方面，做到既不遗漏也不重复.

方法开放与探究性问题，通常运用观察、类比、联想、模拟等方法探求解题思路，成功后再给出严格的论证.此类问题是指能否在条件和结论之间创造某种超常规的途径和方法，而不是通常意义上的“一题多解”.

需要注意的是，不论采用何种探索方法，都要注意“挖掘隐含条件”、“活用数形结合”、“等价转换命题”等常用手段来启迪思路.

第一章 代数中的开放与探究性问题

1.1 集合与简易逻辑

对于本节内容的学习，应当注重用集合的观点揭示数学概念之间的关系，深刻认识概念之间的联系与区别，建立概念体系，认识结构的形成. 注重集合之间蕴含的逻辑关系，并用其指导对集合问题的探究.

一般地，集合问题可归纳为以下几类探究性问题：(1)存在性探究问题. 这类问题构思精巧，方法灵活，解题者不但要判断存在与否，而且要对判断的合理性作出严格的数学证明. 解题时可以从特殊情形出发，或利用题设的隐含条件进行探究. (2)条件探究性问题. 这类问题的结论是确定的，而使结论成立的条件却是不确定的，或是不断变化的，因而需要探究. 一般需执果寻因，分析、递推、探求使结论成立的充分条件. (3)结论探究性问题. 这类问题一般结论都不确定、不唯一，常需由特殊出发，归纳、引申、推广到一般情况，由特殊到一般，运用归纳、类比、分类讨论等数学思维方法，多角度地进行探究.

例 1 设集合 $A=\{-3,-1,2,7\}$，$B=\{x \mid f(x)>0\}$，试问是否存在二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，使集合 A 中恰有一个元素不是 B 中的元素？

分析：要判断二次函数是否存在，实际上就是依据题设条件探究它的系数 a、b、c 的存在性.

解：不妨设集合 A 中的元素 -1 不在 B 中，此时 $f(x)>0$ 的解集可以是 $\{x \mid x>1$ 或 $x<-2\}$，也可以是 $\left\{x \mid x>\frac{1}{3}\right.$ 或

$x<-\dfrac{3}{2}\Big\}$等. 由 $f(x)>0$ 的解集是$\{x \mid x>1$ 或 $x<-2\}$得：$f(x)=(x-1)(x+2)=x^2+x-2$. 而由 $f(x)>0$ 的另一解集可以得 $f(x)=\left(x-\dfrac{1}{3}\right)\left(x+\dfrac{3}{2}\right)>0$，此时二次函数 $f(x)=6x^2+7x-3$.

因此符合条件的二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 是存在的.

请同学们继续探究：若将 A 集、B 集改为 $A=\{\cdots, -5, -3, -1, 1, 3, 5\}$，$B=\{x \mid f(x)\geqslant 0\}$或$\{x \mid f(x)<0\}$，那么二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 是否存在?

例 2 已知集合 $A=\{(x, y) \mid x=n, y=an+b, n\in \mathbf{Z}\}$，$B=\{(x, y) \mid x=m, y=3m^2+15, m\in \mathbf{Z}\}$，$C=\{(x, y) \mid x^2+y^2\leqslant 144\}$是坐标平面内的点集，问是否存在实数 a、b 使得①$A\cap B\neq\varnothing$，②$(a, b)\in C$ 同时成立?

分析 1：可以根据交集的概念及不等式方程解的理论进行探究.

解法 1：由 $A\cap B\neq\varnothing$可知，存在正整数 n，使得 $na+b=3n^2+15$，又由②$(a, b)\in C$，则 $a^2+b^2\leqslant 144$，因此原问题等价于

$$\begin{cases} na+b=3n^2+15, \\ a^2+b^2\leqslant 144, \end{cases} \qquad (n\in \mathbf{Z})$$

是否有实数解.

$$\begin{aligned} \because\quad (3n^2+15)^2 &=(na+b)^2=n^2a^2+b^2+2nab \\ &\leqslant n^2a^2+b^2+a^2+n^2b^2 \\ &=(n^2+1)(a^2+b^2), \end{aligned}$$

而 $a^2+b^2\leqslant 144$，得$(3n^2+15)^2\leqslant 144(n^2+1)$，即$(n^2-3)^2\leqslant 0$，于是 $n^2-3=0$，即 $n=\pm\sqrt{3}$. 这与 $n\in \mathbf{Z}$ 矛盾，故不存在实数 a、b 使①、②同时成立.

分析 2：依题意，可以运用数形结合的思想方法探究.

解法 2：假设存在实数 a、b 使①、②同时成立，即存在整数 m、n 使得

$$\begin{cases} n=m, & (\mathrm{I}) \\ na+b=3m^2+15, & (\mathrm{II}) \\ a^2+b^2\leqslant 144. & (\mathrm{III}) \end{cases}$$

由(Ⅰ)(Ⅱ)消去 m，得 $na+b=3n^2+15$.

即　$na+b-(3n^2+15)=0$.　　　　　　　　　　　　　　　　(*)

(*)式表示点(a, b)在直线 l：$nx+y-(3n^2+15)=0$ 上，而(Ⅲ)式的几何意义是点(a, b)到原点的距离不大于 12，而原点到直线 l 的距离为

$$\begin{aligned} d&=\frac{3n^2+15}{\sqrt{1+n^2}}=\frac{12}{\sqrt{1+n^2}}+3\sqrt{1+n^2} \\ &\geqslant 2\sqrt{\frac{12}{\sqrt{1+n^2}}\cdot 3\sqrt{1+n^2}} \\ &=12. \end{aligned}$$

当且仅当 $3\sqrt{1+n^2}=\frac{12}{\sqrt{1+n^2}}$，即 $n=\pm\sqrt{3}$时等号成立，而 $n=\pm\sqrt{3}\notin \mathbf{Z}$ 与题设 $n\in \mathbf{Z}$ 矛盾，故不存在实数 a、b 使①、②同时成立.

说明：本题属肯定型存在性问题，这类问题往往借助数形结合、转换命题、构造法等去证明；对于否定型问题常用反证法证明；对于讨论型问题常用分类讨论方法解决.

练习 1-1

1. 是否存在这样的集合，它的某一个元素同时又是它的子集？若存在，请举例；若不存在，简要说明理由.
2. 设集合 $m=\{1, 3, 4, 6, 8, 9\}$，是否存在两个无共同元素的子集，两个子集元素之和相等？

例 3　已知集合 $A=\left\{(x, y)\left|\frac{y-3}{x-2}=1, x, y\in \mathbf{R}\right.\right\}$，请写出一个集合 B，使"$x\in A$"是"$x\in B$"的充分非必要条件.

分析：一般情况下，可以将命题看成满足某个条件的集合，若$\{x \mid x$ 满足条件 $A\}\subseteq\{x \mid x$ 满足条件 $B\}$，则 A 是 B 的充分条件；B 是 A 的必要条件. 因此，探求一个命题的充分条件可以看做寻找这个命题集合的子集；而寻找命题 A 的必要条件，则是寻找一个命

题集合 M，使得$\{x \mid x$ 满足条件 $A\}\subseteq M$.

解：因集合 A 表示直线 $x-y+1=0$ 除去点(2，3)外的点集，符合要求的集合 B，应满足"$A\subset B$"，则集合 B 可以是$\{(x, y) \mid x-y+1=0, x、y\in\mathbf{R}\}$.

说明：对于交集、并集、子集、全集、补集这些知识点，应注意它们之间蕴含的逻辑关系，这对我们探究集合问题有指导意义.

例 4　已知集合 $B=\{(x, y) \mid x^2+(y-1)^2=4\}$，且集合 A、C 满足：$A\subset B\subset C$，请用列举法写出一个集合 A，用描述法写出一个集合 C.

分析：注意到 B 表示点集，根据集合之间的包含关系进行探究.

解：在直角坐标系下，B 集表示的是圆周，要求 A 是 B 的子集，B 是 C 的子集，所以 A 表示的是圆周的一部分，而 B 表示的圆是 C 的一部分，因此 A、C 可以是：$A=\{(0, 3), (2, 1)\}$等，$C=\{(x, y) \mid (x-1)[x^2+(y-1)^2-4]=0\}$等.

说明：(1)有些学生认为 A 集表示的是比 B 集所表示的圆小的圆，于是会写出错误的答案 $A=\{(x, y) \mid x^2+(y-1)^2=1\}$.

(2)求解集合题时，应先搞清楚集合中的元素是何种类的元素，否则就会错解.

练习 1-2

1. 命题甲：$\sin x\geqslant 0$，$x\in[0, 2\pi]$；命题乙：$\sin x+\cos x\geqslant 1$，$x\in[0, 2\pi]$. 试问命题甲是命题乙的什么条件？(指充分、必要条件)
2. 设 A 是小于 10 的质数所组成的集合，B 为不大于 6 的正奇数所组成的集合.
   (1)若 $C\subset(A\cap B)$，则集合 C 可以是______；
   (2)请你写出一个满足 $C\subseteq A$ 且 $C\subseteq B$ 的集合 C；
   (3)满足$\{2, 3\}\subset C\subseteq A$ 的集合 C 是否唯一？若不唯一，请写出两个不同的集合 C，并回答符合条件的集合 C 共有几个.
3. 设集合 $A=\{1, 2\}$.

(1)请写出一个集合 B，使“$x\in A$”是“$x\in B$”的充分非必要条件；

(2)请写出两个集合 B，使“$x\in A$”是“$x\in B$”的充要条件.

习　题　一

A　组

1. 已知集合 $m=\{-2\leqslant x\leqslant a\}$，$P=\{y \mid y=2x+3,\ x\in m\}$，$T=\{z \mid z=x^2,\ x\in m\}$，试问是否存在实数 a，使得 $T\subseteq P$.
2. 设集合 $A=\{a,\ b,\ 1\}$，$B=\{a,\ a^2,\ ab\}$，是否存在实数 a、b，使 $A=B$?
3. 已知集合 $A=\{x \mid x^2-2x-8<0,\ x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x \mid x^2-3ax+2a^2=0,\ x\in\mathbf{R}\}$，试探求集合 A 与 B 的关系.

B　组

1. 若非空集合 $m\subseteq\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$，且满足当 $a\in m$ 时，也有 $6-a\in m$.

   (1)是否存在只含有一个元素的集合 m?

   (2)请写出集合 m 所有可能的结果.
2. 已知 a 为实数，A 为不等式 $x^2-(2a+1)x+(a+2)(a-1)\geqslant 0$ 的解集，B 是不等式 $x^2-a(a+1)x+a^3<0$ 的解集.

   (1)用区间表示 A 和 B.

   (2)是否存在实数 a，使 $A\cup B=\mathbf{R}$? 并证明此结论.

   (3)若 $A\cap B=\varnothing$，确定 a 的取值范围.
3. (1)平面直角坐标系中有点 $P_1(1,\ 1)$、$P_2(3,\ -1)$、$P_3(-4,\ 2)$、$P_4(-3,\ 5)$、$P_5(-1,\ -1)$，分别计算各点横坐标与纵坐标的和. 这些和有何特点? 各点与原点 O 的距离的最小值为多少?

   (2)如果平面直角坐标系中的点 $P(x,\ y)$满足条件 $|x+y|=2$，试猜测“点 P 和原点 O 的距离的范围”的结论，并加以证明.

(3)用语言表述出由(2)所得到的真命题.

4. 以某些整数为元素的集合 P 具有以下性质：

(1) P 中的元素有正数，也有负数；

(2) P 中的元素有奇数，也有偶数；

(3) $-1\notin P$；

(4)若 x、$y\in P$，则 $x+y\in P$.

请你写出一个正数，使它不在集合 P 中.

5. 请写出三个数学概念 A、B、C，使它们满足条件：(1) $A\cup B\subseteq C$，(2) $A\cap B\neq\varnothing$.

1.2 函数

函数在中学数学中占有举足轻重的地位，它把数学的各个分支有机地连在一起. 学好函数，对高中数学的学习起着奠基与桥梁的作用.

函数概念的主线是集合—映射—函数—函数的图像和性质. 在教与学过程中要真正理解、掌握教材的知识结构：

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{集合}} \arrow[r] & \boxed{\text{映射}} \arrow[r] & \boxed{\text{函数}} \arrow[r] \arrow[dr] & \boxed{\text{基本函数}} \arrow[r] \arrow[d] & \boxed{\text{反函数}} \arrow[dl] \\ & & & \boxed{\text{函数图像和性质及其应用}} & \end{tikzcd}$$

集合、映射、一次函数、二次函数、指数函数、对数函数像一块块基石，支撑着数学这座宏大迷宫. 对函数图像和性质的探究，犹如跨进这座迷宫大门的第一步；而探究函数的所有性质及其应用，又必须建立在定义域的基础上. 因此，函数的实质问题是其定义域、值域和对应法则，即函数三要素.

函数知识几乎涉及中学数学里所有的数学思想方法，其中“函数思想”则是函数的主体思想.

配方法、换元法、待定系数法、数形结合、分类讨论、化归与转化等数学思想方法，在解题中的应用，往往不是孤立的，它们彼此渗透，相互融合，构成了函数应用的广泛性.

对函数性质(特别是单调性、奇偶性、最值性)及其应用的探

究，是培养创新精神，提高分析、解决问题能力的有效途径.

例 1 定义在区间$(-1,1)$上的函数 $f(x)$满足：①对任意的 x，$y\in(-1,1)$都有 $f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$；②当 $x\in(-1,0)$时有 $f(x)>0$，试判定函数 $f(x)$具有什么性质.

分析：联想学过的函数性质，如奇偶性、单调性等，观察题设中条件“$f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$”，可以想到奇函数的定义式“$f(x)+f(-x)=0$”. 于是，可以令 $y=-x$，代入“$f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$”，便会逐步获得相应的结论.

解：(1)令 $x=y=0$，则 $f(0)+f(0)=f\left(\frac{0+0}{1+0}\right)=f(0)$，得 $f(0)=0$. 设 $y=-x\in(-1,1)$，有 $f(x)+f(-x)=f\left(\frac{x-x}{1-x^2}\right)=0$，故 $f(x)$在$(-1,1)$上为奇函数；

(2)设任意的 $x_1<x_2\in(-1,0)$，则

$$f(x_1)-f(x_2)=f(x_1)+f(-x_2)=f\left(\frac{x_1-x_2}{1-x_1x_2}\right),$$

$$\because\quad -1<x_1<x_2<0,\ \therefore\quad -1<\frac{x_1-x_2}{1-x_1x_2}<0.$$

由①、②可得 $f\left(\frac{x_1-x_2}{1-x_1x_2}\right)>0$，从而 $f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x)$在$(-1,0)$上单调递减，又由 $f(x)$在$(-1,1)$上为奇函数，故 $f(x)$在$(-1,1)$上均为单调递减.

说明：(1)此例题属结论探究开放题，解题时可先猜测函数可能具有哪种性质，然后根据函数性质的定义进行推证. (2)在此例题的情境中，是否可比较 $f\left(\frac{1}{2}\right)$与 $f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{1}{11}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{n^2+3n+1}\right)$$(n\in\mathbf{N}^*)$的大小？请有兴趣的同学思考、探究.

例 2 对数函数 $f(x)=\log_a x\,(a>0,\ a\neq1)$具有这样的性质：$f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$，请你举出一个不是对数函数的函数，使它也具有

上述性质.

分析 1： 观察 $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$ 中的自变量 x、$\frac{1}{x}$，可猜想满足题目条件的函数 $g(x)$ 应含有 x 的项和含有 $\frac{1}{x}$ 的项，据此，可构想具有性质"$f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$"的函数 $g(x)=ax+\frac{b}{x}$（a，b 为常数）.

解法 1： 设函数 $g(x)=ax+\frac{b}{x}$（a，b 为常数）.

由 $g\left(\frac{1}{x}\right)=-g(x)$，可有 $\frac{a}{x}+bx=-\left(ax+\frac{b}{x}\right)$，

即
$$(a+b)\left(x+\frac{1}{x}\right)=0.$$

这个等式对定义域 $D=(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$ 中的一切 x 成立，故 $a+b=0$，即 $b=-a$. 特别地，取 $a=1$，$b=-1$，可得 $g(x)=x-\frac{1}{x}$. 若将结果一般化得 $g(x)=a\cdot\left(x^{\alpha}-\frac{1}{x^{\alpha}}\right)$，这里 a 为非零常数，α 为正常数.

分析 2： 除解法 1 中所设函数 $g(x)=a\left(x^{\alpha}-\frac{1}{x^{\alpha}}\right)$ 外，还可想到分段函数.

解法 2： 在 $g\left(\frac{1}{x}\right)=-g(x)$ 中，可令 $x=1$，得 $g(1)=0$，为此可构造如下的分段函数：

$$g(x)=\begin{cases} x & (0<x<1), \\ 0 & (x=1), \\ -\frac{1}{x} & (x>1). \end{cases}$$

说明： 一般地说，探索开放题，由于答案的多样化，思考问题的角度往往也是多样的，所以变换思考角度是解决这类题目的一个重要的策略.

例 3 关于函数性质的提问：

(1) 一个奇函数可以是周期函数吗？

(2)一个单调递增函数可以是周期函数吗？

请你提出类似的问题，并给予回答.

分析：依据函数的单调性、奇偶性、周期性的定义进行探究.

解：(1)根据三角函数的奇偶性和周期性，可知一个奇函数可以是周期函数，例如：$y=\sin x$，它的周期是 $2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

(2)一个单调递增函数不可能是周期函数. 因为，若周期 $T>0$，则由 $x+T>x$，可得 $f(x+T)>f(x)$，不可能有 $f(x+T)=f(x)$.

可提出的类似问题有：一个偶函数可以是周期函数吗？一个单调递减函数可以是周期函数吗？一个奇函数可以是单调函数吗？一个偶函数可以是单调函数吗？周期函数一定不是单调函数吗？

说明：数学地提出问题是"研究性学习"的重要内容，是培养创造能力的有效途径之一.

例 4 根据你在中学阶段学过的研究函数性质的基本方法，指出函数 $f(x)=ax^2+\dfrac{b}{x^2}$(a，b 是正常数)所具有的性质.

分析：可以从函数的定义域、值域、奇偶性、单调性、最值性等方面进行探究.

解：(1)函数定义域为 $(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$；

(2)因 $ax^2+\dfrac{b}{x^2}\geqslant 2\sqrt{ab}$，仅当 $x=\pm\sqrt[4]{\dfrac{b}{a}}$ 时，$f(x)$ 有最小值 $2\sqrt{ab}$ 且无最大值. 其值域为 $[2\sqrt{ab},\ +\infty)$；

(3)显然有 $f(-x)=f(x)(x\neq 0)$，故 $f(x)$ 为偶函数，其图像关于 y 轴对称；

(4)根据函数单调性定义容易证得(同学自己完成)：$f(x)$ 在 $x\in\left(0,\sqrt[4]{\dfrac{b}{a}}\right]$ 时，单调递减；在 $x\in\left[\sqrt[4]{\dfrac{b}{a}},+\infty\right)$ 时，单调递增. 由偶函数性质可得 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(-\infty,-\sqrt[4]{\dfrac{b}{a}}\right]$ 和 $\left(0,\sqrt[4]{\dfrac{b}{a}}\right]$；$f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\sqrt[4]{\dfrac{b}{a}},0\right)$ 和 $\left[\sqrt[4]{\dfrac{b}{a}},+\infty\right)$.

(5)以 y 轴为渐近线，在 $0<|x|<\sqrt[4]{\frac{b}{a}}$ 较"陡"，在 $|x|>\sqrt[4]{\frac{b}{a}}$ 较"缓".

说明：①函数性质，特别是单调性极为重要，是高考重点考查的内容，必须很好掌握. ②函数单调性有许多重要应用，请你说出几个应用的例子.

例 5 函数 $f(x)=\lg(x-1)(x>1)$ 的图像关于 ________ 对称的函数为________. 对于这个不完整的命题，请你把它补充完整，使之成为真命题.

分析： 首先要读懂题意，弄清命题要陈述的是什么，再据函数图像的对称性的概念推理完成陈述.

解： 函数 $f(x)=\lg(x-1)(x>1)$ 的图像是 $f(x)=\lg x$ 的图像向右平移 1 个单位而得到. 图像有点对称(中心对称)和轴对称.

(1)函数 $f(x)=\lg(x-1)(x>1)$ 关于原点对称的函数为 $g(x)=-\lg(-x-1)$. 这是由于关于原点对称的两点坐标具有 (x, y)、$(-x, -y)$ 的形式，即两点连线的中点为原点.

(2)函数 $f(x)=\lg(x-1)(x>1)$ 关于 y 轴对称的函数为 $g(x)=\lg(-x-1)$. 这是偶函数的概念，点 (x, y) 关于 y 轴对称的点为 $(-x, y)$.

(3)函数 $f(x)=\lg(x-1)(x>1)$ 关于直线 $y=x$ 对称的函数是 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)=10^x+1(x\in\mathbf{R})$.

说明： 请同学们继续考察 $f(x)=\lg(x-1)$ 关于下面五种对称的函数是什么. ①关于点(2, 0)对称；②关于直线 $x=1$ 对称；③关于 x 轴对称；④关于直线 $x+y=0$ 对称；⑤关于直线 $y=2x$ 对称.

练习 1-3

1. 函数 $f(x)$ 对任意的 $x, y\in\mathbf{R}$ 满足：$f(x+y)=f(x)+f(y)$，那么此函数 $f(x)$ 可以是具有什么性质的函数？
2. 分别写出一个具有下列性质的函数.

   (1)对于定义域 D 中的任意的 x_1、x_2，$f(x_1+x_2)=f(x_1)+$

$f(x_2)$；

(2)对于定义域 D 中的任意的 x_1、x_2，$f(x_1 \cdot x_2)=f(x_1)+f(x_2)$；

(3)对于定义域 D 中的任意的 x_1、x_2，$f(x_1+x_2)=f(x_1) \cdot f(x_2)$；

(4)对于定义域 D 中的任意的 x_1、x_2，$f(x_1 \cdot x_2)=f(x_1) \cdot f(x_2)$.

你能提出类似的问题吗？

3. 数学老师给出一个函数 $f(x)$，甲、乙、丙、丁四个学生各指出这个函数的一个性质.

甲：对于 $x\in \mathbf{R}$，总有 $f(1+x)=f(1-x)$；乙：在 $(-\infty, 1]$ 上函数递减；丙：在 $(1, +\infty)$ 上函数递增；丁：$f(0)$ 不是函数的最小值.

老师说：你们中恰有三人说的正确，请问这个函数是什么？

例 6 已知二次函数 $f(x)$ 的首项系数为负，对于任意实数 x，都有 $f(2-x)=f(2+x)$. 试问：当 $f(1-2x^2)$ 与 $f(1+2x-x^2)$ 满足什么条件时，才有 $-2<x<0$？

分析： 由于结论是关于 x 的不等式，故猜想 $f(1-2x^2)$ 与 $f(1+2x-x^2)$ 应满足不等关系.

解： 由 $f(x)$ 的二次项系数为负数及 $f(2-x)=f(2+x)$ 知，抛物线的开口向下且关于直线 $x=2$ 对称. 于是 $f(x)$ 在 $(-\infty, 2]$ 上单调递增，在 $[2, +\infty)$ 上单调递减.

又 $1-2x^2\leqslant 1$，$1+2x-x^2=2-(x-1)^2\leqslant 2$，故需讨论 $1-2x^2$ 与 $1+2x-x^2$ 的大小.

$\because$ $(1+2x-x^2)-(1-2x^2)=x(x+2)$，

$\therefore$ 当 $x(x+2)<0$，即 $-2<x<0$ 时 $1-2x^2>1+2x-x^2$.

故当 $f(1-2x^2)>f(1+2x-x^2)$ 时，才有 $-2<x<0$.

说明： (1)解答条件探索性问题的一般思路是：把产生结论的条件一一分析列出，分别加以探究. 也可用分析法寻找充分条件.

(2)由目标“$-2<x<0$”导析出 $f(1-2x^2)$ 与 $f(1+2x-x^2)$ 所