GAOZHONGSHENG BI BEI ZHITONGCHE

高中生必备直通车

主编 甘曜玮

GAOZHONGSHENG BI BEI ZHITONGCHE

接力出版社
Publishing House

编者 甘曜玮 黄锡强
施梁显 党时球
梁 孟 甘第通
顾倍铭 颜 科
包媛媛 钟 成

“高中生直通车”丛书
高中生必备直通车
主编 甘曜玮
☆
出版人 黄 俭
接力出版社出版发行
（地址：广西南宁市园湖南路9号 邮编：530022）
玉林正泰彩印包装有限责任公司印刷
开本：787毫米×1092毫米 1/32
印张：2 字数：70千
2007年1月第1版 2007年1月第2次印刷
ISBN 978-7-80732-604-5/G·417 定价：4.80元

一、高中数学重要公式

(一)集合与简易逻辑

1. 集合

(1)交换律	$A\cap B=B\cap A, A\cup B=B\cup A$
(2)结合律	$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C, A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$
(3)德·摩根定律	$\complement_U(A\cap B)=\complement_U A\cup\complement_U B$, $\complement_U(A\cup B)=\complement_U A\cap\complement_U B$
(4)其他	$A\cap A=A\cup A=A, A\cap\varnothing=\varnothing, A\cup\varnothing=A$, $\complement_U(\complement_U A)=A, A\cap\complement_U A=\varnothing, A\cup\complement_U A=U$

2. 不等式解法

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">(1)含绝对值的不等式</td><td colspan="2">①$|x|<a\quad(a>0)$的解集为:$\{x|-a<x<a\}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">②$|x|>a\quad(a>0)$的解集为:$\{x|x<-a$,或$x>a\}$</td></tr>
<tr><td rowspan="9">(2)一元二次不等式</td><td rowspan="3">①$ax^2+bx+c=0$
$(a>0)$</td><td>$\Delta=b^2-4ac>0$</td><td>$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\quad(x_1<x_2)$</td></tr>
<tr><td>$\Delta=0$</td><td>$x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$</td></tr>
<tr><td>$\Delta<0$</td><td>没有实根</td></tr>
<tr><td rowspan="3">②$ax^2+bx+c>0$
$(a>0)$</td><td>$\Delta>0$</td><td>$\{x|x<x_1$,或$x>x_2\}$</td></tr>
<tr><td>$\Delta=0$</td><td>$\{x|x\neq-\dfrac{b}{2a}\}$</td></tr>
<tr><td>$\Delta<0$</td><td>$\mathbf{R}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">③$ax^2+bx+c<0$
$(a>0)$</td><td>$\Delta>0$</td><td>$\{x|x_1<x<x_2\}$</td></tr>
<tr><td>$\Delta=0$</td><td>$\varnothing$</td></tr>
<tr><td>$\Delta<0$</td><td>$\varnothing$</td></tr>
</table>

(二)函数

1. 指数和对数

指数	分数指数	①$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ $(a>0,m,n\in\mathbf{N}^*$,且 $n>1)$ ②$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$ $(a>0,m,n\in\mathbf{N}^*$,且 $n>1)$
	运算性质	①$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$　②$(a^m)^n=a^{mn}$　③$(ab)^n=a^nb^n$ $(a>0,b>0,m,n\in\mathbf{R})$
对数	性质	①零和负数没有对数 ②$\log_a a=1$　③$\log_a 1=0$ $(a>0,a\neq1)$
	运算性质	①$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$ ②$\log_a\left(\frac{M}{N}\right)=\log_a M-\log_a N$　③$\log_a M^n=n\log_a M$ $(M>0,N>0,a>0,a\neq1,n\in\mathbf{R})$
	公式	①常用对数:$\log_{10}N=\lg N$　②自然对数:$\log_e N=\ln N$ ③对数恒等式:$a^{\log_a N}=N$　④换底公式:$\log_b N=\frac{\log_a N}{\log_a b}$ 推论:$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$,$\log_{a^n}b^m=\frac{m}{n}\log_a b$ $(N>0,a>0,b>0,a\neq1,b\neq1,m\neq0,n\neq0)$

2. 指数函数和对数函数

名称	指数函数 $y=a^x$ $(a>0,a\neq1)$	对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0,a\neq1)$
定义域	$\mathbf{R}$	$(0,+\infty)$
值域	$(0,+\infty)$	$\mathbf{R}$
特征点	$(0,1)$即 $x=0$ 时,$y=1$	$(1,0)$即 $x=1$ 时,$y=0$
奇偶性	非奇非偶	非奇非偶
单调性	当 $a>1$ 时,在 $\mathbf{R}$ 上是增函数	当 $a>1$ 时,在$(0,+\infty)$上是增函数
	当 $0<a<1$ 时,在 $\mathbf{R}$ 上是减函数	当 $0<a<1$ 时,在$(0,+\infty)$上是减函数

(三)数列

	等差数列	等比数列
通项公式	$a_n=a_1+(n-1)d$	$a_n=a_1q^{n-1}$
前 n 项和公式	$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$ $=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$	(1)$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ $=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}$ $(q\neq1)$ (2)$S_n=na_1$ $(q=1)$
中项公式	$A=\dfrac{a+b}{2}$	$G=\pm\sqrt{ab}$
a_n 与 S_n	$a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\geqslant2)$, $a_1=S_1$ $(n=1)$	

(四)三角函数

1. 基本关系

弧长公式	$l=\|\alpha\|r$ (l 为弧长,α 为圆弧所对圆心角的弧度数,r 为圆的半径)
扇形面积公式	$S=\dfrac{1}{2}lR$ (l 为扇形弧长,R 为圆的半径)
角度制与弧度制的换算	$1^\circ=\dfrac{\pi}{180}\text{rad}\approx0.01745\text{rad}$ $1\text{rad}=\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ\approx57.30^\circ=57^\circ18'$
同角三角函数的基本关系	倒数关系:$\sin\alpha\csc\alpha=1,\cos\alpha\sec\alpha=1,\tan\alpha\cot\alpha=1$
	商数关系:$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
	平方关系:$\sin\alpha^2+\cos^2\alpha=1,1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$, $1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$
两点间的距离公式	$\|P_1P_2\|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
周期:$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ 频率:$f=\dfrac{1}{T}=\dfrac{\omega}{2\pi}$	

2. 诱导公式

名称 角	sin	cos	tan	cot
$k\cdot 360^\circ+\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
$180^\circ-\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\tan\alpha$	$\cot\alpha$
$180^\circ+\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
$360^\circ-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$
$90^\circ-\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\cot\alpha$	$\tan\alpha$
$90^\circ+\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$
$270^\circ-\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cot\alpha$	$\tan\alpha$
$270^\circ+\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$

3. 两角和与差的三角函数

和(差)角公式	$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$ $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$ $\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$
倍角公式	$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$ $\tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ $\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$ $\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$
万能公式	$\sin\alpha=\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$ $\cos\alpha=\dfrac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$ $\tan\alpha=\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$
半角公式	$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$ $\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$ $\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$
积化和差公式	$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$ $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$ $\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$ $\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$
和差化积公式	$\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$ $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

4. 三角函数的性质

函数	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$	$y=\cot x$
定义域	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\{x \mid x\in\mathbf{R}$, 且 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\}$	$\{x \mid x\in\mathbf{R}$, 且 $x\neq k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$
值域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数	奇函数
周期性	2π	2π	π	π
单调性	$[2k\pi-\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{\pi}{2}]$递增, $[2k\pi+\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{3\pi}{2}]$递减 ($k\in\mathbf{Z}$)	$[2k\pi-\pi, 2k\pi]$递增, $[2k\pi, 2k\pi+\pi]$递减 ($k\in\mathbf{Z}$)	$(k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2})$递增 ($k\in\mathbf{Z}$)	$(k\pi, k\pi+\pi)$递减 ($k\in\mathbf{Z}$)
最值	$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$, $y_{max}=1$; $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$, $y_{min}=-1$	$x=2k\pi$, $y_{max}=1$; $x=2k\pi+\pi$, $y_{min}=-1$	无	无

(五)平面向量

1. 向量运算

	法则或定义	运算律	坐标运算
加法运算	加法法则: (1) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ (2) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$	(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ (2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ (3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$	设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$, $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$ 则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2, y_1+y_2)$
减法运算	减法法则: $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$		(1) 设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$, $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$ 则 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(x_1-x_2, y_1-y_2)$ (2) $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$

（续表）

	法则或定义	运算律	坐标运算
实数与向量的积	(1) $\lambda>0$，则 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向 $\|\lambda\boldsymbol{a}\|=\|\lambda\|\|\boldsymbol{a}\|$ (2) $\lambda<0$ 则 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向 $\|\lambda\boldsymbol{a}\|=\|\lambda\|\|\boldsymbol{a}\|$	(1) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ (2) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ (3) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$	设 $\boldsymbol{a}=(x,y)$， 则 $\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(x,y)=(\lambda x,\lambda y)$
平面向量的数量积	(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta$ $(\boldsymbol{a}\neq 0,\boldsymbol{b}\neq 0,0^\circ\leqslant\theta\leqslant 180^\circ)$ (2) $0\cdot\boldsymbol{a}=0$	(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$ (2) $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$ (3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$	设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$， $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$， 则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2$

2. 平面向量的重要定理、公式

(1)平面向量基本定理：$\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$
(2)两个向量平行的充要条件： $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$ $[\boldsymbol{a}=(x_1,y_1),\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)]$
(3)两个非零向量垂直的充要条件：$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$
(4)定比分点坐标公式：$\begin{cases}x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\end{cases}$ 中点坐标公式：$\begin{cases}x=\dfrac{x_1+x_2}{2},\\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2}\end{cases}$
(5)平移公式：$\begin{cases}x'=x+h,\\ y'=y+k\end{cases}$
(6)正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$
(7)余弦定理：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$b^2=c^2+a^2-2ac\cos B$， $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

（六）不等式

性质	证明依据
(1)$a>b\Leftrightarrow b<a$ (2)$a>b,b>c\Rightarrow a>c$ (3)$a>b\Rightarrow a+c>b+c$ (4)$a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$ $a>b,c<0\Rightarrow ac<bc$ $a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd$ (5)$a>b>0\Rightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$（$n\in\mathbf{N}$，且 $n>1$） (6)$\lvert a\rvert-\lvert b\rvert\leqslant\lvert a+b\rvert\leqslant\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$	①$a-b>0\Leftrightarrow a>b$ $a-b<0\Leftrightarrow a<b$ ②$a^2\geqslant0$ （$a\in\mathbf{R}$） ③$a^2+b^2\geqslant2ab$ （$a,b\in\mathbf{R}$） ④$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ （$a,b\in\mathbf{R}$ 且 $a>0$，$b>0$）

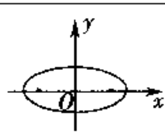
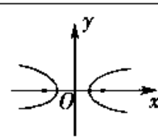
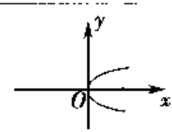
（七）直线和圆的方程

<table>
<tr><td rowspan="5">(1)</td><td rowspan="5">直线方程</td><td>点斜式：$y-y_1=k(x-x_1)$</td><td>不垂直于 x 轴的直线</td></tr>
<tr><td>斜截式：$y=kx+b$</td><td>不垂直于 x 轴的直线</td></tr>
<tr><td>两点式：$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$</td><td>直线与坐标轴垂直时不能用</td></tr>
<tr><td>截距式：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$</td><td>直线与坐标轴垂直或过原点时不能用</td></tr>
<tr><td>一般式：$Ax+By+C=0$</td><td>A、B 不全为零</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td colspan="3">相交：$l_1,l_2\Leftrightarrow k_1\neq k_2$，或 $A_1B_2-A_2B_1\neq0$
两条直线平行：$l_1\parallel l_2\Leftrightarrow k_1=k_2$，且 $b_1\neq b_2$ 或$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$
重合：$k_1=k_2$，且 $b_1=b_2$ 或$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$
垂直：$l_1\perp l_2\Leftrightarrow k_1k_2=-1$ 或 $A_1A_2+B_1B_2=0$</td></tr>
<tr><td>(3)</td><td colspan="3">点(x_0,y_0)到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离 $d=\frac{\lvert Ax_0+By_0+C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$
两平行线 $l_1:Ax+By+C_1=0$ 和 $l_2:Ax+By+C_2=0$ 间的距离公式是：
$d=\frac{\lvert C_1-C_2\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$</td></tr>
<tr><td>(4)</td><td colspan="3">圆的标准方程：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，圆心为(a,b)，半径为 r
圆的一般方程：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，其中 $D^2+E^2-4F>0$，
圆心为$\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$，半径为 $r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$</td></tr>
</table>

（续表）

(5)	斜率公式：$k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
(6)	到角公式：$\tan\theta=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}$　夹角公式：$\tan\alpha=\left\lvert\dfrac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}\right\rvert\left[\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})\right]$
(7)	二元一次不等式：$Ax+By+C>0$

（八）圆锥曲线方程

	椭圆	双曲线	抛物线
几何条件	与两个定点的距离的和等于常数	与两个定点的距离的差的绝对值等于常数	与一个定点和一条定直线的距离相等
标准方程	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$	$y^2=2px$　$(p>0)$
图形			
顶点坐标	$(\pm a,0),(0,\pm b)$	$(\pm a,0)$	$(0,0)$
对称轴	x 轴：长轴长 $2a$ y 轴：短轴长 $2b$	x 轴：实轴长 $2a$ y 轴：虚轴长 $2b$	x 轴
焦点坐标	$(\pm c,0)$ $c=\sqrt{a^2-b^2}$	$(\pm c,0)$ $c=\sqrt{a^2+b^2}$	$\left(\dfrac{p}{2},0\right)$
离心率$(e=\dfrac{c}{a})$	$0<e<1$	$e>1$	$e=1$
准线方程	$x=\pm\dfrac{a^2}{c}$	$x=\pm\dfrac{a^2}{c}$	$x=-\dfrac{p}{2}$
渐近线方程		$y=\pm\dfrac{b}{a}x$	

（九）直线、平面、简单几何体

	侧面积公式	体积公式
多面体	$S_{直棱柱侧}=Ch$　$S_{正棱锥侧}=\frac{1}{2}Ch'$ $S_{正棱台侧}=\frac{1}{2}(C+C')h'$	$V_{棱柱}=Sh$　$V_{棱锥}=\frac{1}{3}Sh$ $V_{棱台}=\frac{1}{3}h(S+\sqrt{SS'}+S')$
旋转体	$S_{圆柱侧}=Cl=2\pi rl$ $S_{圆锥侧}=\frac{1}{2}Cl=\pi rl$ $S_{圆台侧}=\frac{1}{2}(C+C')l=\pi(r+r')l$ $S_{球}=4\pi R^2$ $S_{球冠}=2\pi Rh=\pi(r^2+h^2)$	$V_{圆柱}=\pi r^2h$　$V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi r^2h$ $V_{圆台}=\frac{1}{3}\pi h(r^2+rr'+r'^2)$ $V_{球}=\frac{4}{3}\pi R$ $V_{球缺}=\frac{1}{3}\pi h^2(3R-h)$ $=\frac{1}{6}\pi h(3r^2+h^2)$

（十）排列、组合和二项式定理

(1)分类计数原理：$N=m_1+m_2+\cdots+m_n$ 分步计数原理：$N=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$	
(2)排列数公式	$A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}$ $(n,m\in\mathbf{N},且\ m\leqslant n)$
(3)组合数公式	$C_n^m=\frac{A_n^m}{A_m^m}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$ $(m\leqslant n)$
(4)组合数性质	$C_n^m=C_n^{n-m}\quad(m\leqslant n),C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}\quad(m\leqslant n)$
(5)二项式定理	$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+C_n^nb^n$ $(n\in\mathbf{N})$
(6)通项公式	$T_{r+1}=C_n^ra^{n-r}b^r$
(7)特例	$0!=1\quad C_n^0=1$

(十一)概率与统计

1. 概率

(1)概率的范围	$0\leqslant P(A)\leqslant 1$
(2)等可能事件的概率	$P(A)=\frac{m}{n}$
(3)互斥事件	$P(A+B)=P(A)+P(B)$
(4)相互独立事件	$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$
(5)对立事件	$P(A)+P(\overline{A})=P(A+\overline{A})=1$,即 $P(\overline{A})=1-P(A)$
(6)贝努利概率型	$P_n(k)=C_n^kP^k(1-P)^{n-k}$

2. 随机变量与统计

(1)随机变量的概率分布	性质	①$p_i\geqslant 0$,$i=1,2,\cdots$　②$p_1+p_2+\cdots=1$
	二项分布	$P(\xi=k)=C_n^kp^kq^{n-k}$ $(k=0,1,\cdots n,q=1-p)$
(2)数学期望	公式	$E\xi=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n+\cdots$
	性质	$E(a\xi+b)=aE\xi+b$
(3)方差	公式	$D\xi=(x_1-E\xi)^2\cdot p_1+(x_2-E\xi)^2\cdot p_2+\cdots+(x_n-E\xi)^2\cdot p_n+\cdots$
	性质	①$D(a\xi+b)=a^2D\xi$　②$D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2$
(4)标准差	公式	$\sigma\xi=\sqrt{D\xi}$

(十二)极限

(1)常见数列极限

①$\lim\limits_{n\to\infty} C=C$ (C为常数) ②$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ ③$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ $(a>1)$

④$\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0$ $(|q|<1)$ ⑤$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$ ⑥$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

(2)数列极限的四则运算 如果$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，那么

①$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=a\pm b$ ②$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=a\cdot b$ ③$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}$ $(b\neq 0)$

④$\lim\limits_{n\to\infty}(C\cdot a_n)=C\cdot a$

(3)无穷递缩等比数列的各项和 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{a_1}{1-q}$

(4)函数极限存在的充要条件 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=a$

(5)函数极限的运算法则 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=b$，那么

①$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=a\pm b$ ②$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=a\cdot b$

③$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a}{b}$ $(b\neq 0)$

(6)常用结论 ①$\lim\limits_{x\to x_0}[Cf(x)]=C\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ (C为常数)

②$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n=[\lim\limits_{x\to x_0}f(x)]^n$ $(n\in\mathbf{N})$

(十三)导数

(1)导数	$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$
(2)常用公式	①$C'=0$ (C为常数) ②$(x^m)'=mx^{m-1}$ ($m\in\mathbf{Q}$) ③$(\sin x)'=\cos x$ ④$(\cos x)'=-\sin x$ ⑤$(e^x)'=e^x$ ⑥$(a^x)'=a^x\ln a$ ⑦$(\ln x)'=\frac{1}{x}$ ⑧$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e$
(3)两个函数的四则运算	①$(u+v)'=u'+v'$ ②$(uv)'=u'v+uv'$ ③$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$ ($v\neq 0$)
(4)复合函数	$y'_x=y'_u\cdot u'_x$

(十四)数系的扩充——复数

(1)相加(减)	$(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i$
(2)相乘	$(a+bi)(c+di)=ac+bci+adi+bdi^2$ $=(ac-bd)+(bc+ad)i$
(3)相除	$(a+bi)\div(c+di)=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$ ($c+di\neq 0$)
(4)i的性质	①$i^{4n+1}=i$ ②$i^{4n+2}=-1$ ③$i^{4n+3}=-i$ ④$i^{4n}=1$ ($n\in\mathbf{N}$)

二、高中作文黄金材料

黄金材料	说明	黄金材料	说明
夸父逐日	追求、奋斗、理想、信念、献身精神等	神农尝百草	开拓创业、勇于实践、不断探索等
精卫填海	矢志不渝、持之以恒、敢于奋斗等	尧、舜禅让天下	出以公心、选贤举能、欣然让位等
大禹治水	奉献精神、公而忘私、勇于实践等	伯夷、叔齐不食周粟	眷恋故国、忠贞气节等
周文王礼遇姜子牙	礼贤下士、起用人才等	周公吐哺握发	为政者心怀天下、延揽贤士等
周成王桐叶封弟	当权者应言而有信、谨言慎行等	曹刿论战	知己知彼、审时度势、一鼓作气取胜等
管仲、鲍叔牙之交	人的诚挚友谊、信任、彼此关怀等	董狐的直笔	耿直仗义、不畏权势、实事求是、忠于职守等
晏子使楚	不卑不亢、聪明机智、维护人格、国格等	赵简子与中山狼	不辨敌友、忘恩负义、以怨报德等
勾践卧薪尝胆	忍辱负重、愤发图强等	鲁班发明锯子	类比思维、触发灵感、造福后世等
孙武操练女兵	严于律令、整军经武等	西门豹治邺	破除迷信、革故鼎新、兴利除弊等
商鞅变法	改革求新、富国强兵、动机与效果背离等	邹忌讽齐王纳谏	进谏纳谏、广开言路、勇于接受批评等

黄金材料	说明	黄金材料	说明
孙膑、庞涓斗智	气量之宽窄、智谋之高下等	孟尝君养士	重视人才、招贤纳士、一技之长皆有用等
赵武灵王胡服骑射	突破传统，努力学习、引进等	孟母择邻	正确引导子女、重视环境对人的影响
冯谖为孟尝君造三窟	居安思危、深谋远虑、留有后路等	庖丁解牛	得其要领、掌握规律、迎刃解难等
李冰修都江堰	功在当代，泽及后人；科学技术的重大作用等	扁鹊见蔡桓公	病须早治、讳疾忌医则后患无穷等
苏秦悬梁刺股	立志自强、勤奋刻苦、持之以恒等	田单以火牛阵攻燕	不屈不挠、智勇抗敌、创新开拓等
廉颇与蔺相如	大智大勇、改过从善、团结保国等	赵括纸上谈兵	脱离实际、空谈误国、用人要看真本事等
毛遂自荐	敢于挺身而出、肯定自我、为国排忧等	甘罗十二为上卿	年轻有为、建功立业、革除论资排辈等
荆轲刺秦王	杀身成仁、舍身取义、冒险犯难报知己等	叶公好龙	言行脱节、自取其咎等
焚书坑儒	扼杀文化、荼毒人才之不可取等	赵高指鹿为马	颠倒是非的可恶与仰人鼻息、投人所好的可鄙等
鸿门宴	滥施宽容、坐失良机、酿成后祸和暗藏杀机等	刘邦约法三章	纪律严明、立信安民方可成大业等

黄金材料	说明	黄金材料	说明
韩信受胯下之辱	胸怀远志、大勇若怯、不计一时得失等	萧何追韩信	珍视人才、敢于重用无名之辈等
张良与圯上老人	尊重老者、经受考验、终获厚待等	董仲舒三年不窥园	专心致志、发愤读书等
司马迁撰《史记》	为了事业牺牲一切、孜孜不倦、奋斗不已等	苏武牧羊	忠于国家、保持气节、威武不能屈等
马援马革裹尸	立志报国、义无反顾、血染沙场等	班超出使西域	当仁不让、为国扬威、交流开拓等
强项令董宣抗圣命	不媚上、不枉法、坚持原则、冒死抗争等	孔融让梨	谦逊礼让、克己待人、尊敬年长者等
曹孟德老骥伏枥	年高者壮心未已、理想永存、奋斗不息等	曹植七步成诗	不可同室相残以及奇才急智等
曹冲称象	少年英才、聪明过人以及独辟蹊径破难关等	刘备三顾茅庐	礼贤下士、诚心实意招揽人才等
诸葛亮七擒孟获	服人以德、攻心为上等	刘禅乐不思蜀	丧失气节、得过且过、寄人篱下等
周处除“三害”	为民除害、改恶从善、战胜自我等	祖逖闻鸡起舞和击楫中流	修身健体、严格要求和不忘收复故土等
王羲之临池学书	刻苦练功、勤学不倦、久志求成等	陶渊明不为五斗米折腰	甘于清贫、不媚权贵、保持高尚节操等
范缜著《神灭论》	坚持真理、不畏困难、勇敢创立新说等	李春修赵州桥	卑微者的才智、古代科技的昌盛等