新世纪高级应用型人才培养系列教材

A Practical Textbook Series for the New Century

高等数学 经管类

（下册）

主　编　张晓岚　孟广武

副主编　曹伟平　李苏北

同济大学出版社

Tongji University Press

新世纪高级应用型人才培养系列教材
A Practical Textbook Series for the New Century

高等数学 经管类

（下册）

主　编　张晓岚　孟广武
副主编　曹伟平　李苏北

同济大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.经管类.(下)/张晓岚. 一上海:同济大学出版社,2005.9

(新世纪高级应用型人才培养系列教材)

ISBN 7-5608-2813-2

Ⅰ.高… Ⅱ.张… Ⅲ.高等数学一高等学校一教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第135674号

高等数学(经管类)(下册)

主编 张晓岚 孟广武 副主编 曹伟平 李苏北

责任编辑 卞玉清 责任校对 郁 峰 封面设计 潘向蓁

出版发行 同济大学出版社

(上海市四平路1239号 邮编200092 电话021-65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 江苏大丰印刷二厂印刷

开 本 787mm×960mm 1/16

印 张 17.25

字 数 345 000

印 数 5 101—10 200

版 次 2005年9月第1版 2006年1月第2次印刷

书 号 ISBN 7-5608-2813-2/O·259

定 价 23.00元

《新世纪高级应用型人才培养系列教材》编委会

名誉主任　吴启迪
主　　任　李国强
副 主 任　李　进　杨焱林
编　　委　（以下按姓氏笔画排列）
　　　　　王国强　王　文　陈　波
　　　　　郑朝科
总 策 划　郭　超

前　　言

随着人类文明的发展和信息时代的来临，数学已经深入到现代社会生活的各个领域. 计算机的广泛应用与经济全球化的迅猛发展，使社会对数学的依赖日益加深. 为了顺应这一形势，联合国科教文组织把 2000 年定为世界数学年. “数学使人聪明”、“数学令人精确”、“数学让人完美”已经成为教育界人士的共识。近 20 年来诺贝尔经济学奖的获得者绝大多数是数学家，从一个侧面说明了数学原理对于先进的经济理论的奠基性作用. 自 20 世纪 80 年代开始，高等数学不再是理工类大学生的专利，我国的高等学校陆续为经济类和管理类专业开设高等数学课. 时至今日，各种名为经济数学或经管类高等数学的教材不下十余种. 但是这些教材，很多都是数学教师们根据传统的理工科高等数学的知识框架编写的，只是简单地从理工类高等数学中删去一些较难、较深的内容，并不具备经管类的专业特色，在内容编排和讲述方法上缺少针对专业需要和学生数学水平的创新. 由于经济类学生的数学基础普遍不如理工类学生，这些按照传统的理工类数学的思想方法处理的教材，对于他们来讲难度过大，教学效果不好. 同时，由于教材不具备经管专业特色，缺少把数学思想方法应用于经济学科的训练，也影响学生学习数学的积极性. 一些著名大学编写的经济类高等数学教材虽然具有专业特色，但是并不适应一般本科院校经济管理类学生的水平. 因此，编写一本面向一般本科院校、具有经济专业特色、易教好学的高等数学教材，让学生在更少的时间内学得更多更好，更加津津有味，已经成为深化高等教育改革，培养具有创新精神的经济管理类人才的迫切课题. 同济大学出版社组织同济大学、徐州师范大学、聊城大学等多所大学在深入调查研究的基础上编写了这本经管类高等数学教材，并且列入“新世纪高级应用型人才培养系列教材”，是在同济大学应用数学系主编并为我国大多数高等学校理工类专业采用的《高等数学》教材之后，推出的又一力作。

本书的编写具有以下一些特点：

1. 本书是为我国一般本科院校经济管理专业编写的，充分考虑到使用本书的学生的数学水平和专业特点，注重对数学思想方法和应用能力的培养训练，增加数学作为文化修养的内涵，对于演算技巧与逻辑推理能力的要求则相对低一些. 为了兼顾使用本书的学生考研的需要，本教材主要依据研究生入学数学(三)、(四)的考试大纲编写的，并将其中一部分内容列为选学内容，加“ * ”号并用小 5 号字排印，对一般学生不作要求. 各节后面的习题大多分为(A)及(B)两

类，其中，(A)类为基本题，(B)类习题及各章总练习题仅供考研学生选用.各章后面的考研试题选讲，为考研的学生选编了1998—2005年全国硕士研究生入学统一考试数学(三)、(四)试卷中的相关试题.而对于数学(三)、(四)考试大纲之外的内容，如柯西收敛准则、三重积分、曲线积分与曲面积分、一致收敛性、傅立叶级数等，则完全不涉及.

2. 突出平台思想，注重直观性和应用性.对于有些证明较难、较繁的定理，或不加证明直接作为平台应用，或用直观方法归纳得出，或仅指出证明思想.有些内容的讲述适当结合教育数学的理念，使概念讲述平易直观、逻辑推理展开迅速简明、数学方法通用有力，力求让学生学得容易一些、生动一些、实用一些。

3. 增强专业特色与实用性.本书结合各章节的内容，较系统地介绍了常见的经济函数及其边际函数与弹性、极值在优化理论中的应用等内容，并增加了将数学思想方法应用于经济问题的训练.这对于培养高素质的经济管理类人才，是十分有益的.

本书分为上、下两册.上册包括一元函数微积分学，下册包括空间解析几何简介、多元函数微积分学、无穷级数、常微分方程和差分方程.本书适合于普通本科院校经贸、财会、管理、金融、地理、教育等专业作为高等数学课程的教材.参加本书编写、讨论和修改工作的有孟广武、张晓岚、王侃民、曹伟平、刘笑颖、谭成波、董立华和李苏北等同志，并由聊城大学孟广武教授主编上册，徐州师范大学张晓岚教授主编下册.

限于编者水平，加之编写时间比较仓促，书中不妥之处在所难免，敬请读者批评指正.

编　者

2005年9月

目　录

（下册）

第七章 多元函数微分学

本书前面各章所讨论的函数,都是只有一个自变量的函数,称为一元函数.但是在科学技术和社会实践中,大量问题涉及到有多个自变量的函数,例如长方体的体积 $V=xyz$,描述了体积 V 与长 x、宽 y、高 z 这三个自变量之间的函数关系,是一个三元函数.又如某种商品的销售总额 R 与销售数量 q 及售价 p 的关系为 $R=pq$,这是一个二元函数.一般把自变量多于一个的函数统称为多元函数,我们将在本章研究多元函数的概念及其偏导数与全微分.

多元函数是一元函数的推广,它保留着一元函数的许多性质.但是由于自变量从一个增加到多个,发生了质的变化,产生了一些新的内容和方法.对于多元函数,我们将着重研究二元函数.在掌握了二元函数的有关理论与研究方法之后,不难把它们推广到一般多元函数.

我们已经知道一元函数 $y=f(x)$ 的图象通常是平面直角坐标系中一条曲线,它把解析问题几何化,是研究一元函数的有力工具.而二元函数的图象通常是一张空间曲面,因此在学习多元函数之前,先介绍空间解析几何的一些基本知识.这不仅是学习多元函数微积分必需具备的基础,而且对于物理学及工程技术中的许多课程都是十分有用的.

第一节 空间解析几何基础

一、空间直角坐标系

为了确定平面上任意一点 M 的位置,我们建立了平面直角坐标系,把点 M 与一对有序实数,即点的坐标 (x,y) 对应起来.为了确定空间一点的位置,相应地需要建立空间直角坐标系.

在空间中取定一点 O,过点 O 作三条互相垂直的直线 Ox, Oy, Oz,并且按右手系规定 Ox, Oy, Oz 的正方向.再规定一个长度单位,就建立起空间直角坐标系,如图 7-1.

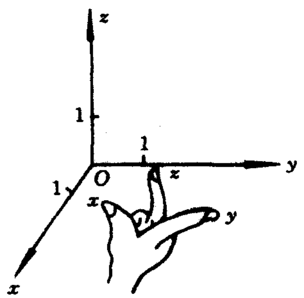

图 7-1

点 O 称为坐标原点,三条直线是坐标轴,分别称为 x 轴、y 轴、z 轴.每两条坐标轴确定一个

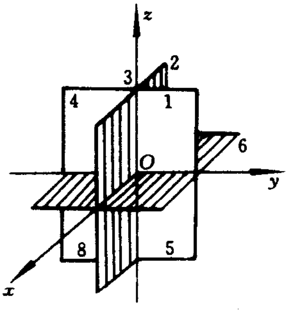

图 7-2

平面，称为坐标平面. 由 x 轴与 y 轴确定的平面称为 xy 平面，由 y 轴与 z 轴确定的平面称为 yz 平面，由 z 轴与 x 轴确定的平面称为 zx 平面. 通常将 xy 平面置于水平面上，z 轴置于铅直位置，向上为正向. 三个坐标平面把空间分成 8 个部分，称为 8 个卦限，8 个卦限的编号如图 7-2 所示. 各卦限内点的坐标的符号如表 7-1 所示.

表 7-1

坐标＼卦限	1	2	3	4	5	6	7	8
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

设 M 是空间任意一点，过 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴、z 轴，且分别交三轴于 P,Q,R 三点，如图 7-3. 设 $OP=a$，$OQ=b$，$OR=c$，则点 M 唯一对应一个三元有序数组 (a,b,c). 反之，对于任何一个三元有序数组 (a,b,c)，在 x 轴、y 轴和 z 轴上分别取点 P,Q,R，使 $OP=a$，$OQ=b$，$OR=c$，再过 P,Q,R 三点分别作平面垂直于它们所在的坐标轴，这三个平面相交于一点 M，从而三元有序数组 (a,b,c) 唯一确定了空间一点 M. 于是空间中的点和三元有序数组之间建立起一一对应的关系. 这个三元有序数组称为点 M 的坐标，记为 $M(a,b,c)$.

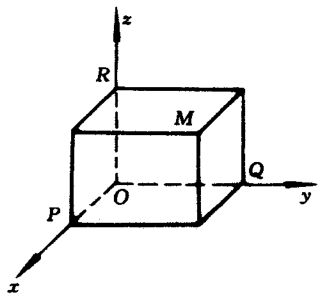

图 7-3

显然，坐标原点的坐标是 $O(0,0,0)$；

x 轴上点的坐标是 $(x,0,0)$，y 轴上点的坐标是 $(0,y,0)$，z 轴上点的坐标是 $(0,0,z)$；

xy 平面上点的坐标是 $(x,y,0)$，yz 平面上点的坐标是 $(0,y,z)$，zx 平面上点的坐标是 $(x,0,z)$.

例 1 指出下列各点所在的卦限和它们关于 xy 平面的对称点：

$$P(2,-1,-4),\quad Q(-2,-1,3),\quad R(5,2,-1)$$

解 点 P 在第 8 卦限，它关于 xy 平面的对称点是 $P'(2,-1,4)$；

点 Q 在第 3 卦限，它关于 xy 平面的对称点是 $Q'(-2,-1,-3)$；

点 R 在第 5 卦限，它关于 xy 平面的对称点是 $R'(5,2,1)$.

二、两点间的距离

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 是空间两点. 过 M_1，M_2 分别作三个坐标平面的平行平面，构成一个以线段 M_1M_2 为一条对角线的长方体，如图 7-4. 易见 $|M_1A|=|x_2-x_1|$，$|AB|=|y_2-y_1|$，$|BM_2|=|z_2-z_1|$. 由勾股定理可知：

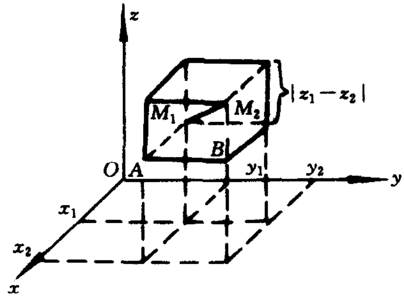

图 7-4

$$|M_1M_2|^2=|M_1B|^2+|BM_2|^2$$
$$=|M_1A|^2+|AB|^2+|BM_2|^2,$$

所以得到空间两点间的距离公式：

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{1}$$

特别，空间一点 $M(x,y,z)$ 到原点的距离

$$|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

当 M_1，M_2 都在 xy 平面上时，$z_1=z_2=0$，式(1)就是平面上两点间的距离公式.

例 2 已知空间三角形的三个顶点 $A(0,2,-1)$，$B(-1,0,2)$，$C(2,-1,0)$，证明$\triangle ABC$ 是等边三角形，并求其周长.

解 因 $|AB|=\sqrt{(-1-0)^2+(0-2)^2+(2-(-1))^2}=\sqrt{14}$，

$$|BC|=\sqrt{(2-(-1))^2+(-1-0)^2+(0-2)^2}=\sqrt{14},$$

$$|CA|=\sqrt{(0-2)^2+(2-(-1))^2+(-1-0)^2}=\sqrt{14}.$$

所以，$\triangle ABC$ 为等边三角形，其周长为 $3\sqrt{14}$.

三、向量的坐标表示

我们已经知道平面或空间的向量就是平面或空间的一条有向线段，并且从几何上讨论了向量的加法、减法和数乘运算. 由于向量具有平移不变性这一极为重要的性质，我们可以把空间向量的始点都平移到坐标原点，这样每个向量就由它的终点所唯一确定，从而空间向量与三元有序数组 (x,y,z) 构成一一对应. 设点 $M(x,y,z)$，于是可以把向量 $\overrightarrow{OM}$ 表示为 $\overrightarrow{OM}=(x,y,z)$，并把 x,y,z 称为向量

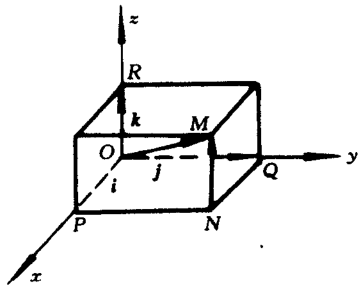

图 7-5

$\overrightarrow{OM}$的坐标.

如图 7-5,由向量加法的平行四边形法则,有

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$$

我们把沿 x,y,z 轴正向所取的单位向量分别记作 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$,则由向量数乘运算的意义,有

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$$

这三个向量分别称为向量$\overrightarrow{OM}$在坐标轴上的投影或分量,于是又有

$$\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=(x,y,z).$$

由两点间的距离公式解得向量$\overrightarrow{OM}$的模$|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

设$\overrightarrow{OM}$与三个坐标轴正向的夹角分别为α,β,γ,称为向量$\overrightarrow{OM}$的三个方向角.若记$|\overrightarrow{OM}|=r$,则$\overrightarrow{OM}$的三个方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{x}{r},\quad \cos\beta=\frac{y}{r},\quad \cos\gamma=\frac{z}{r},$$

且 $\boldsymbol{n}_0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$就是$\overrightarrow{OM}$的单位向量.

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$是空间两点,λ 是任一实数,则由上述分解式不难推得

$$\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2),$$

$$\lambda\cdot\overrightarrow{OM_1}=(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1)$$

从而把过去用几何方法给出的向量加法运算和数乘运算转化为坐标间的代数运算.这样向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标是

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1),$$

而两个非零向量$\overrightarrow{OM_1}$与$\overrightarrow{OM_2}$平行的充要条件$\overrightarrow{OM_2}=\lambda\cdot\overrightarrow{OM_1}$可以表示成

$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1}=\frac{z_2}{z_1}=\lambda.$$

式中,若有某个分母为零,规定相应的分子也是零.

例 3 已知两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$,求线段 M_1M_2 中点的坐标.

解 设线段 M_1M_2 的中点是 $M(x,y,z)$,如图 7-6.则$\overrightarrow{M_1M}=\overrightarrow{MM_2}$,由

$$\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1,y-y_1,z-z_1)$$

$$\overrightarrow{MM_2}=(x_2-x,y_2-y,z_2-z)$$

可解得中点 M 的坐标为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

这是平面上线段中点公式的推广.

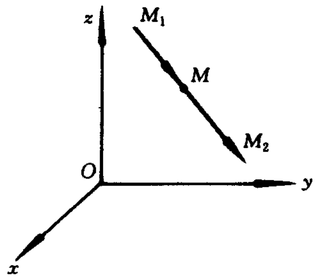

图 7-6

例 4 已知向量$(m,5,-1)$与$(3,1,n)$互相平行,求 m,n.

解 由$\frac{m}{3}=\frac{5}{1}=\frac{-1}{n}$,解得 $m=15,n=-\frac{1}{5}$.

在解析几何中两个平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的数量积(又称内积)定义为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\alpha$$

其中,α 是向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角. 两个空间向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的数量积同样定义为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\alpha$$

于是当 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 时(此时 $\alpha=0$ 或 π),$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$(当 $\alpha=0$)或 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$(当 $\alpha=\pi$),并且

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\quad\left(\text{此时 }\alpha=\frac{\pi}{2},\text{称这两个向量正交}\right)$$

设$\overrightarrow{OM_1}=(x_1,y_1,z_1)$,$\overrightarrow{OM_2}=(x_2,y_2,z_2)$,由向量数量积的运算性质,有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM_1}\cdot\overrightarrow{OM_2}&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\cdot(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})\\&=x_1x_2(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i})+(x_1y_2)(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j})+(x_1z_2)(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k})\\&\quad+y_1x_2(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i})+(y_1y_2)(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j})+(y_1z_2)(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k})\\&\quad+z_1x_2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i})+(z_1y_2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j})+(z_1z_2)(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k})\end{aligned}$$

利用 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是互相垂直的单位向量,得到用坐标计算两个向量数量积的公式:

$$\overrightarrow{OM_1}\cdot\overrightarrow{OM_2}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2\tag{2}$$

从而用坐标判定两个向量垂直的充要条件是

$$\overrightarrow{OM_1}\perp\overrightarrow{OM_2}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0.\tag{3}$$

公式(3)为我们提供了一个用代数方法证明几何问题的十分有效的方法. 本节后面证明空间直线与平面的垂直关系时,将会多次用到这个公式.

四、空间平面与直线

在平面解析几何中，应用平面上的点与二元有序实数组(x,y)之间的一一对应关系，一方面使几何问题"解析化"，即把对平面曲线的研究转化为对代数方程的讨论；另一方面又使代数问题"几何化"，即为代数方程提供了直观的几何图形. 同样，应用空间直角坐标系与向量的坐标表示，可以建立空间曲面与曲线的方程. 我们首先研究空间平面与直线的方程具有怎样的形式.

1. 平面方程

过空间一点可以作无数个平面. 但若限定平面还要垂直于一个已知向量，则这个平面是唯一的. 与一个平面垂直的向量称为这个平面的法向量. 一个平面的法向量有无数个，它们互相平行.

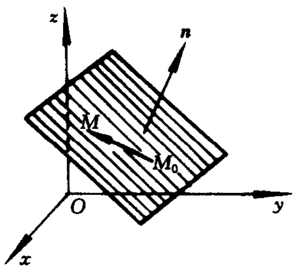

图 7-7

已知平面上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 及平面的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，设 $M(x,y,z)$ 是平面上任意一点，则向量$\overrightarrow{M_0M}\perp\boldsymbol{n}$(图 7-7)，即

$$\overrightarrow{M_0M}\cdot\boldsymbol{n}=0$$

由公式(3)，得到经过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 且以向量 $\boldsymbol{n}(A,B,C)$ 为法向量的平面方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \quad (4)$$

方程(4)称为平面的点法式方程. 如果记 $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$，则平面方程又可表示为

$$Ax+By+Cz+D=0, \quad (5)$$

方程(5)称为平面的一般式方程，其中，一次项系数组成的向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 是平面的一个法向量. 下面应用一般式方程来讨论某些特殊位置的平面方程.

(1) 过原点的平面

因原点坐标 $x=y=z=0$ 适合方程(5)，代入得 $D=0$. 于是过原点的平面方程为

$$Ax+By+Cz=0.$$

(2) 平行于坐标轴的平面

若平面平行于 x 轴，则其法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 与单位向量 $\boldsymbol{i}=(1,0,0)$ 互相垂直，即 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{i}=A=0$，从而 $A=0$，即方程中不含 x 的项. 因此，平行于 x 轴的平面方程为

$$By+Cz+D=0,$$

同理平行于 y 轴和 z 轴的平面的方程分别为

$$Ax+Cz+D=0 \quad (\text{方程中不含 } y \text{ 的项}),$$

$$Ax+By+D=0 \quad (\text{方程中不含 } z \text{ 的项}).$$

综合(1)(2)的讨论,可知通过 x 轴、y 轴、z 轴的平面方程分别为

$$By+Cz=0, \quad Ax+Cz=0, \quad Ax+By=0.$$

(3) 垂直于坐标轴的平面

若平面垂直于 x 轴,则平面同时平行于 y 轴与 z 轴,因而方程中不含 y 与 z 的项,于是平面方程为

$$Ax+D=0 \quad \text{或} \ x=x_0,$$

同理,垂直于 y 轴、z 轴的方程分别为

$$By+D=0 \quad \text{或} \ y=y_0,$$

$$Cz+D=0 \quad \text{或} \ z=z_0.$$

特别,三个坐标平面的方程分别为 $z=0, x=0, y=0$.

读者必须注意,在平面解析几何中,一次方程表示直线;而在空间解析几何中,一次方程表示平面.

例 5 求过三点$(a,0,0)$,$(0,b,0)$,$(0,0,c)$的平面的方程,其中,a,b,c 都不为零(图 7-8).

解 把这三点的坐标分别代入平面的一般式方程

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

解得 $A=-\dfrac{D}{a}, B=-\dfrac{D}{b}, C=-\dfrac{D}{c}$,代入方程并整理得

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \tag{6}$$

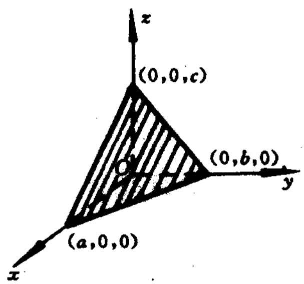

图 7-8

方程(6)称为平面的截距式方程.

2. 直线方程

若把空间直线 L 视为两个相交平面 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 与 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 的交线,则联立方程

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \tag{7}$$

就是直线 L 的方程，称为直线的一般式方程. 由于 L 也可以看成另外两个平面的交线，因此，一条直线的一般式方程不是惟一的，而是有无穷多个.

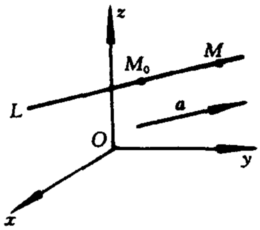

图 7-9

设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 是空间一点，$\boldsymbol{a}=(l, m, n)$ 为非零向量，则过点 M_0 且平行于 $\boldsymbol{a}$ 的直线 L 是唯一确定的. 在 L 上任取一点 $M(x, y, z)$，则向量 $\overrightarrow{M_0M} \parallel \boldsymbol{a}$（图 7-9），从而它们的坐标对应成比例，即

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \tag{8}$$

方程(8)称为直线的点向式方程，也称为直线的对称式方程. 向量 $\boldsymbol{a}=(l, m, n)$ 称为直线 L 的方向向量. 一条直线的方向向量有无穷多个，其中任意两个方向向量的坐标对应成比例. 由于直线的方向向量是非零向量，所以，l, m, n 不同时为零，当其中有一个或两个为零时，例如，$m=0$，方程(8)就成为

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{0}=\frac{z-z_0}{n},$$

此时约定 $\frac{y-y_0}{0}$ 不表示除法，而是相应的分子也是零，即 $y=y_0$. 于是将这个方程理解为

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{z-z_0}{n}, \\ y=y_0. \end{cases}$$

即 L 是平面 $\frac{x-x_0}{l}=\frac{z-z_0}{n}$ 与 $y=y_0$ 的交线.

例 6 求过点 $M_0(-1, 0, 3)$ 且与平面 $\pi: 4x-2y+5z+27=0$ 垂直的直线 L 的方程.

解 因直线 L 与平面 π 垂直，故平面 π 的法向量 $\boldsymbol{n}=(4, -2, 5)$ 就是直线 L 的方向向量，由此解得直线 L 的点向式方程为

$$\frac{x+1}{4}=\frac{y}{-2}=\frac{z-3}{5}.$$

例 7 求过点 $P(x_1, y_1, z_1)$ 与 $Q(x_2, y_2, z_2)$ 的直线方程.

解 因向量 $\overrightarrow{PQ}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$ 就是直线 PQ 的一个方向向量，故此直线有点向式方程

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$