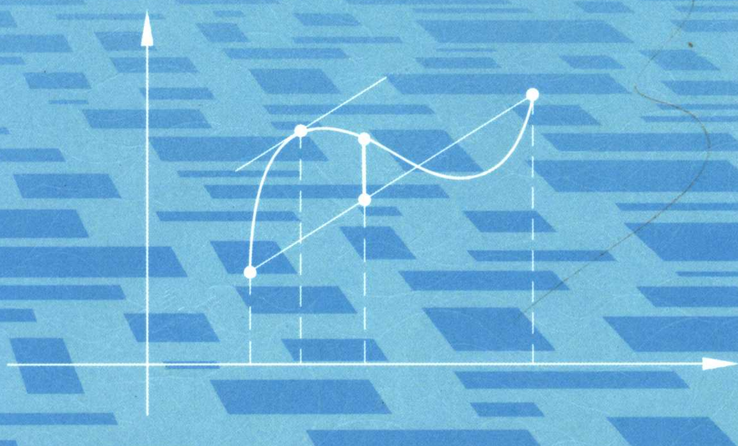
GAODENG SHUXUE

高等数学

上册

许彪 | 主编　　曾光菊 | 副主编



西南交通大学出版社
Http://press.swjtu.edu.cn

高 等 数 学

上册

许　彪　主　编
曾光菊　副主编

西南交通大学出版社
·成都·

内容提要

本书根据“高等数学课程教学基本要求”，并结合多年来的教学实践编写而成．全书分为上、下两册，共十章．上册内容包括一元函数的极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、向量代数与空间解析几何．为方便教学，每章附有复习题．本书也可作为高等学校工科专业高等数学课程的教材或参考书．

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．上册／许彪主编．—成都：西南交通大学出版社，2006.8

ISBN 7-81104-331-9

Ⅰ．高…　Ⅱ．许…　Ⅲ．高等数学－高等学校－教材　Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 058030 号

高 等 数 学

上册

许 彪 主编

*

责任编辑　张宝华
责任校对　李　梅
封面设计　本格设计

西南交通大学出版社出版发行

（成都二环路北一段 111 号　邮政编码：610031　发行部电话：028-87600564）

http: //press.swjtu.edu.cn

四川森林印务有限责任公司印刷

*

成品尺寸：170 mm×230 mm　印张：17

字数：331 千字　印数：1—3 000 册

2006 年 8 月第 1 版　2006 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 7-81104-331-9

定价：24.80 元

图书如有印装问题　本社负责退换

前　言

高等数学是高等工科院校的一门重要基础课，对学生后继课程的学习以及今后的发展有着深远的影响.本书是结合多年来的教学实践，并根据“高等数学课程教学基本要求”编写而成的.全书分为上、下两册，共十章.上册六章，内容包括函数的极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、向量代数与空间解析几何.由于学时的减少，我们对本书的部分内容进行了适当调整，各章都配有适当的例题和习题以及复习题.可作为高等学校工科专业高等数学课程的教材或教学参考书.许彪同志主持本书（上册）编写工作，对本册进行统纂，对有的章节进行了改写.参加本书编写工作的有：曾光菊和许文俊（第一章）、周锋（第二章）、岳健民（第三章）、许彪和李永明（第四章）、余成恩（第五章）、谢巍（第六章）.

李作安、黄蕴魁、曾祥龙、林灿等几位同志对原稿进行了认真审阅并提出了不少改进意见，对此表示衷心感谢！

同时，在本书的编写过程中，得到西南交通大学出版社的大力支持与帮助，在此一并表示衷心感谢！

限于编者水平，加之时间仓促，本书不足之处在所难免，敬请广大读者给予批评指正.

编者

2006 年 8 月

目　录

第一章　函数、极限与连续

在中学已经学过函数的定义，讨论过函数的单调性、奇偶性、周期性和有界性等几何特性，为了《高等数学》学习的方便，本章先复习一下函数的有关知识.

第一节　函数的概念

一、函　数

在同一现象中所碰到的各种变量，通常并不都是独立变化的，它们之间存在着依赖关系，下面先考察几个例子：

例 1　设有半径为 r 的圆，考虑内接于圆的正 n 边形的周长 L_n 和面积 S_n. 由图 1-1 容易看出，

$$L_n=2nr\sin\frac{1}{2}\alpha_n,\quad S_n=\frac{1}{2}nr^2\sin\alpha_n$$

其中 $\alpha_n=\frac{2\pi}{n}$. 这两个公式指出了内接于圆的正 n 边形的周长 L_n 和面积 S_n 与边数 n 之间的依赖关系.

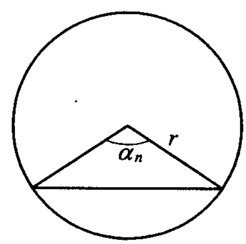


图 1-1

例 2　直线方程为 $y=ax+b$(其中 a,b 都是常数)，它给出了变量 x 与变量 y 的依赖关系.

抽去上面两个例子中所考虑的量的实际意义，可以看出它们都表达了两个变量之间的相互依赖关系. 这种关系给出了一种对应法则，根据这一法则，当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时，另一个变量就有确定的值与之对应. 两个变量间的这种对应关系就是函数概念的实质.

定义 1.1　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集. 如果对应于每一个数 $x\in D$，变量 y 按照一定对应法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$. 数集 D 叫做这个函数的定义域，x 叫做自变量，y 叫做因变量.

当 x 取遍 D 内的所有实数时，相应的函数值 $f(x)$ 的全体所组成集合叫做

函数 $y=f(x)$的值域.

如果自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值总是只有一个，这种函数叫做单值函数，否则叫做多值函数. 例 1 和例 2 的函数都是单值函数.

例 3 函数 $y^2=x$，对于任意正实数 x，都有一对互为相反数的实数 $y=\pm\sqrt{x}$与之对应，是多值函数.

以后凡没有特别的说明，函数都是指单值函数.

下面举几个特殊函数的例子.

例 4 符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

例 5 取整函数. 设 x 为任一实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分，记作$[x]$. 例如，$[0.5]=0$，$[\pi]=3$，$[-1.5]=-2$，$[-\pi]=-4$. 把 x 看作变量，则得一函数

$$y=[x], \quad x\in \mathbf{R}$$

称此函数为取整函数.

例 6 狄立克莱(Dirichlet)函数

$$y=f(x)=\begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时} \end{cases}$$

此函数的图形作不出来，其直观想象是：有无数多个点稠密地分布在 x 轴上，也有无数多个点稠密地分布在直线 $y=1$ 上.

二、具有某些特性的函数

1. 单调函数

如果对于某区间 X 内的任何两点 $x_1<x_2$，总成立 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$（或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$），则称函数 $y=f(x)$在区间 X 内为单调增加（或单调减少）. 如果等号恒不成立，则称为严格单调增加（或严格单调减少）.

2. 奇函数和偶函数

如果 $f(x)$的定义域为$(-a,a)$（这里 $a>0$），并且对定义域内的任意 x 均满足 $f(-x)=-f(x)$，就称 $f(x)$为奇函数，它的图形关于原点对称；如果对定义域内的任意 x 均满足 $f(-x)=f(x)$，就称 $f(x)$为偶函数，它的图形关于 y 轴对称.

3. 周期函数

能使 $f(x+\omega)=f(x)$成立的函数 $f(x)$称为周期函数($\omega\neq0$)，ω 称为周期. 如正弦函数 $y=\sin x$ 就是周期函数，周期为 2π. 按照周期的定义，$\pm4\pi$，$\pm6\pi$ 也是正弦函数的周期，而 2π 是它的最小正周期. 通常，函数的周期指它的最小正周期. 但并不是每一个周期函数都有最小正周期，例如，狄立克莱函数，任何有理数 ω 都是它的周期，但是它没有最小正周期.

4. 有界函数

设函数 $f(x)$在数集 X 内有定义，如果存在 $M>0$，使得对于任意的 $x\in X$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$在 X 上有界；如果这样 M 的不存在，则称 $f(x)$在 X 上无界.

三、复合函数与反函数

1. 复合函数

先考察一个例子. 设有一个质量为 m 的沿直线运动的物体，速度是 v，那么它的动能为

$$E=\frac{1}{2}mv^2$$

如果这个物体是自由落体，则其速度为

$$v=gt$$

其中 g 是重力加速度. 于是它的动能是

$$E=\frac{1}{2}m(gt)^2=\frac{1}{2}mg^2t^2$$

现在抽去其中的具体意义，便得到这样两个函数

$$E=\frac{1}{2}mv^2,\quad v=gt$$

将 $v=gt$ 代入函数 $E=\frac{1}{2}mv^2$，可得 E 通过中间变量 v 而成为 t 的函数. 这种形式的函数称为复合函数.

一般的说，若函数 $y=f(u)$的定义域为 U，而函数 $u=\varphi(x)$的定义域为 X，值域为 U^*，并且 $U^*\subset U$，那么对于 X 内的每一个 x，经过中间变量 u，相应的，得到唯一确定的一个值 y. 于是 y 经过中间变量 u 而成为 x 的函数，记为

$$y=f(\varphi(x))$$

这种函数称为复合函数，而 u 称为中间变量.

利用这一概念，有时可以把函数分解为几个函数，另一方面也可以用它来产生新的函数. 应当指出，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域不能超出函数 $y=f(u)$ 的定义域 U，这是极为重要的，否则不能由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合成一个复合函数.

例 7　已知函数 $f(x)=2x^2+1$，$g(x)=\cos x$，求 $f(g(x))$，$g(f(x))$，$f(f(x))$.

解　设 $f(u)=2u^2+1$，$u=g(x)=\cos x$，则将 $u=g(x)$ 代入函数 $f(u)$，则有

$$f(g(x))=2g^2(x)+1=2\cos^2 x+1$$

同样，

$$g(f(x))=\cos(f(x))=\cos(2x^2+1)$$

$$f(f(x))=2f^2(x)+1=8x^4+8x^2+3$$

2. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W. 对于任意的 $y\in W$，在 D 上至少可以确定一个 x 与 y 对应，且满足 $y=f(x)$. 如果把 y 看作自变量，x 看作因变量，就可以得到一个新的函数 $x=f^{-1}(y)$. 称这个新的函数 $x=f^{-1}(y)$ 为函数 $y=f(x)$ 的反函数，而把函数 $y=f(x)$ 称为直接函数.

此时，$y=f(x)$ 也是 $x=f^{-1}(y)$ 的反函数，或者说，$y=f(x)$ 和 $x=f^{-1}(y)$ 互为反函数. 前者的定义域和后者的值域相同，前者的值域和后者的定义域相同.

例如，直接函数 $y=f(x)=4x+3$ $(x\in\mathbf{R})$ 的反函数为

$$x=f^{-1}(y)=\frac{1}{4}(y-3),\quad y\in\mathbf{R}$$

习惯上用 x 表示自变量，y 表示因变量，于是可约定 $y=f^{-1}(x)$ 是直接函数 $y=f(x)$ 的反函数.

我们还有下面的结论：

若函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上单调，则 $y=f(x)$ 在区间 I 上一定存在反函数.

四、初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数这五类函数叫做基本初等函数.

1. 幂函数 $y=x^a(a\in\mathbf{R})$

它的定义域和值域依 a 的取值不同而不同，但是无论 a 取何值，幂函数在 x

$\in(0,+\infty)$内总有定义. 当 $a\in\mathbf{N}$ 或 $a=\dfrac{1}{2n-1}$且 $n\in\mathbf{N}$ 时,定义域为 $\mathbf{R}$.

2. 指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$

它的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$(0,+\infty)$.

3. 对数函数 $y=\log_a{}^x(a>0,a\neq1)$

定义域为$(0,+\infty)$,值域为$(-\infty,+\infty)$. 对数函数 $y=\log_a x$ 是指数函数 $y=a^x$ 的反函数.

特别地,当 $a=\mathrm{e}=2.718\ 281\ 828\cdots$作为指数函数和对数函数的底时,函数分别记为 $y=\mathrm{e}^x$ 和 $y=\ln x$.

4. 三角函数

三角函数有正弦函数 $y=\sin x$、余弦函数 $y=\cos x$、正切函数 $y=\tan x$、余切函数 $y=\cot x$、正割函数 $y=\sec x$ 和余割函数 $y=\csc x$. 三角函数为周期函数,正弦函数和余弦函数的周期为 2π,正切函数和余切函数的周期为 π. 还要指出,在微积分中,三角函数的自变量 x 一般总是弧度.

5. 反三角函数

反三角函数主要包括反正弦函数 $y=\arcsin x$、反余弦函数 $y=\arccos x$、反正切函数 $y=\arctan x$ 和反余切函数 $y=\mathrm{arccot}\,x$ 等.

通常把由基本初等函数和常数经过有限次的四则运算和有限次的复合所得到的并能用一个解析式表达的函数,称为初等函数. 例如,$y=\ln(\sin x+4)+\mathrm{e}^{2x}$,$y=\sqrt{\cos x+a^x}$就是初等函数.

初等函数的表达形式直接明了,研究起来比较方便. 本书中讨论的函数主要是初等函数.

下面简单地介绍一下邻域的概念.

五、邻　域

设 a 与 δ 是两个实数,并且 $\delta>0$,把满足不等式 $|x-a|<\delta$ 的全体实数 x 称为点 a 的 δ 邻域,记作 $U(a,\delta)$,即

$$U(a,\delta)=\{x\,|\,a-\delta<x<a+\delta\}=\{x\,|\,|x-a|<\delta\}$$

点 a 称为邻域的中心,δ 称为邻域的半径. 如图 1-2 所示.

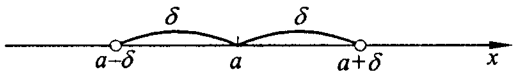


图 1-2

因为$|x-a|$表示点x与点a间的距离，所以，$U(a,\delta)$表示与点a距离小于δ的一切点x的全体.

把满足不等式$0<|x-a|<\delta$的全体实数x称为点a的去心δ邻域，记作$\mathring{U}(a,\ \delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\ \delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}$$

习　题　1-1

1. 求下列函数的定义域和值域.

(1) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$；　　(2) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$；

(3) $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x}+\sqrt{1-x-2x^2}$；　　(4) $y=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

2. 设$\varphi(t)=t^3+1$，求$\varphi(t^2)$，$[\varphi(t)]^2$.

3. 证明：函数$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$是奇函数，并求它的反函数.

4. 下列函数是由哪些函数复合而成的.

(1) $y=\sqrt{3x-1}$；　　(2) $y=\sin^2(1+2x)$；

(3) $y=(1+\ln x)^5$；　　(4) $y=\arctan(e^x)$；

(5) $y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$；　　(6) $y=\ln^2\arccos(x^3)$.

5. 指出下列函数哪些是初等函数.

(1) $y=\begin{cases}x-1, & x<0\\ x+1, & x\geqslant 0\end{cases}$；　　(2) $y=[x]$；

(3) $y=x^x$；　　(4) $y=\operatorname{sgn}x$.

6. 说明函数$y=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$与$y=\sqrt{x^2}$表示同一函数的理由，这函数是初等函数吗？

7. 利用$y=\sin x$的图像作出下列函数的图形.

(1) $y=|\sin x|$；　　(2) $y=\sin|x|$；　　(3) $y=2\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

8. 半径为R的圆形铁片，自中心处剪去中心角为α的一扇形后围成一无底圆锥，试将这圆锥的体积表为α的函数.

9. 证明：定义在对称区间$(-l,l)$上的任意函数$f(x)$均可表示为一个奇函数与一个偶函数的和.

10. 已知函数$f(x)$，$g(x)$在区间I上有定义，求$\max\{f(x),g(x)\}$，$\min\{f(x),g(x)\}$.

第二节 数列的极限

在许多实际问题中，为了掌握变量的变化规律，仅仅通过有限次的算术运算是求不出来的，往往需要从它的变化过程来判断它的变化趋势.

例如，有一个变量，它开始时的值是$\frac{1}{2}$，然后，其值是$\frac{1}{3}$，接着，其值是$\frac{1}{4}$，再接着，其值是$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{6}$，…，$\frac{1}{n+1}$，…，如此无限地变下去，虽然是无穷尽的，但它的变化却有一个趋势，就是在它的变化过程中越来越接近 0. 于是就说这个变量的极限是 0.

又如，求圆的面积和圆周长. 最初，人们只知道求多边形的面积和求直线段的长度，然而，通过极限的思想就可以解决这个问题. 其方法是：在一个圆周内，作它的内接正多边形，这时正多边形的面积和周长都不会等于圆面积和圆周长. 然而，只要正多边形的边数不断增加，这些正多边形的面积和周长必将随着边数的不断增加而不断地接近圆面积和圆周长. 这个"不断接近"的过程就是一个极限过程，正所谓"割之弥细，失之越少，割之又割，以至于不可割，则与圆合体而无所失矣."

在解决实际问题中逐渐形成的这种极限方法，已成为高等数学中的一种基本方法，因此有必要作进一步的阐明.

先说明数列的概念. 一列无穷多个数

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\cdots,\ x_n,\cdots$$

按次序一个接一个的排列下去，就叫做数列. 数列中的每一个数叫做数列的项，第 n 项 x_n 叫做数列的一般项或通项. 我们记这个数列为$\{x_n\}$. 例如，

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots,\frac{1}{n+1},\cdots$$

$$2,\ 1+\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{3},\cdots,\ 1+\frac{1}{n},\cdots$$

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\cdots,\ n^2,\cdots$$

都是数列的例子，它们的一般项依次为

$$\frac{1}{n+1},\ 1+\frac{1}{n},\ n^2$$

按函数的定义，数列$\{x_n\}$也可看作定义在正整数集合上的函数：$x_n=f(n)$，

当自变量 n 依次取 1,2,3,…等自然数时,对应的函数值就排列成数列$\{x_n\}$.

现在讨论这样一种数列$\{x_n\}$,在它的变化过程中,随着 n 的不断增大,x_n 将越来越接近于一个数. 例如,数列$\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$越来越接近 0,数列$\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$越来越接近 1. 但数列$\{n^2\}$却没有这样的特征.

现在,以数列$\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$为例来讨论如何用数学语言表达"越来越接近". 所谓数列$\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$越来越接近 1,指的是随着 n 的不断增大,$1+\frac{1}{n}$与 1 之差的绝对值越来越接近 0,也就是说,当 n 增大时,$1+\frac{1}{n}$与 1 的差的绝对值将相当小.

进一步又可以说,任意给定一个无论多么小的正数 ε,当 n 充分大时,$1+\frac{1}{n}$与 1 之差的绝对值总会小于这个 ε,甚至可以用下面的方法找到这样的 n:为了使得

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$$

成立,需解此不等式,即

$$n>\frac{1}{\varepsilon}$$

即只要 $n>\frac{1}{\varepsilon}$,就能保证 $1+\frac{1}{n}$与 1 之差的绝对值小于这个任意给定的正数 ε.

概括起来就是:对任意给定一个无论多么小的正数 ε,只要 $n>\frac{1}{\varepsilon}$,就能保证 $1+\frac{1}{n}$与 1 之差的绝对值小于 ε,这就意味着$\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$越来越接近 1. 略加抽象,便得到数列极限的定义.

一、数列极限的定义

定义 1.2 设$\{x_n\}$是一个数列,a 是常数. 对于任意给定的正数 ε(不论它多么小),总存在正整数 N,使得对于 $n>N$ 时的一切 x_n,不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

都成立,则称常数 a 是数列 x_n 的极限,或者称数列 x_n 收敛于 a,记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a$$

或

$$x_n \to a \ (n \to \infty)$$

如果数列没有极限，就说数列是发散的.

定义中的极限值 a 及任意给定的正数 ε，可确定 a 的一个邻域 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$，从几何上看，“对于 $n>N$ 时的一切 x_n，不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立”这句话是指：项 x_N 以后的所有项 $x_{N+1}, x_{N+2}, \cdots$ 全落入 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 中，在此邻域以外至多有 N（有限）项，如图 1-3 所示.

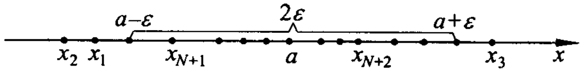


图 1-3

需要指出的是，对于任意给定的正数 ε，一方面由于它的任意性，不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 才能表达出 x_n 与 a 无限接近的意思；另一方面是 ε 的确定性，即一旦给出，它就定了，就可以找出相应的 N，使得 x_N 以后所有项 x_n 都在 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 中，但是 N 不是唯一的，只要保证 N 存在即可.

为了更直观地说明 ε 与 N 的关系，看下面的例题.

例 8　用极限的定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

证明　只需证明对任意 $\varepsilon>0$，总存在正整数 N，当 $n>N$ 时，成立不等式

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$$

即 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$，于是取 $N=\dfrac{1}{\varepsilon}$，则当 $n>N$ 时，必有 $\left|\dfrac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$ 成立，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

例 9　用极限的定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}\right)=1$

证明　只需证明对任意 $\varepsilon>0$（不妨设 $0<\varepsilon<1$），总存在正整数 N，当 $n>N$ 时，成立不等式

$$\left|\left(1+\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}\right)-1\right|=\frac{1}{(n+1)^2}<\varepsilon$$

即 $n>\sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon}}-1$，于是取 $N=\left[\sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon}}-1\right]$，则当 $n>N$ 时，必有

$$\left|\left(1+\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}\right)-1\right|<\varepsilon$$

成立，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}\right)=1$$

由于 N 不是唯一的，只要保证 N 存在即可，所以在求解不等式的时候，可以适当的放缩不等式，使得不等式更容易求解. 对例 9 可写出下面的证明过程：

证明 只需证明对任意 $\varepsilon>0$（不妨设 $0<\varepsilon<1$），总存在正整数 N，当 $n>N$ 时，成立不等式

$$\left|\left(1+\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}\right)-1\right|<\varepsilon$$

因为

$$\left|\left(1+\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}\right)-1\right|=\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$$

所以只需 $n>\frac{1}{\varepsilon}$，于是取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，必有

$$\left|\left(1+\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}\right)-1\right|<\varepsilon$$

成立，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}\right)=1$$

说明：对于同一个 ε，这两个证明过程中得到的 N 是不相同的.

例 10 设 $|q|<1$，证明：等比数列 $1,q,q^2,\cdots,q^{n-1},\cdots$ 的极限是 0.

证明 若 $q=0$，结果是显然的.

若 $q\neq0$，只需证明对任意 $\varepsilon>0$（不妨设 $0<\varepsilon<1$），总存在正整数 N，当 $n>N$ 时，成立不等式

$$|q^{n-1}-0|=|q|^{n-1}<\varepsilon$$

解得

$$(n-1)\ln|q|<\ln\varepsilon$$

即 $n>1+\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$，于是取 $N=\left[1+\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]$，则当 $n>N$ 时，必有 $|q^{n-1}-0|<\varepsilon$，即

$$\lim_{n\to\infty}q^{n-1}=0\quad(|q|<1)$$

二、收敛数列的性质

定理 1.1（极限的唯一性） 数列 $\{x_n\}$ 的极限是唯一的.

证明 用反证法. 设 $\{x_n\}$ 有两个相异的极限 a,b，不妨设 $a<b$，取 $\varepsilon=\frac{b-a}{2}$. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则存在正整数 N_1，使得当 $n>N_1$ 时，有

$$|x_n-a|<\frac{b-a}{2}$$