

主编 荣先成 副主编 王洪军

# 有限元法

YOUXIANYUANFA



西南交通大学出版社  
[Http://press.swjtu.edu.cn](http://press.swjtu.edu.cn)

# 有限元法

YOUXIANYUANFA



上册

# 有限元法

主 编 荣先成

副主编 王洪军

参 编 宋 强 聂 辉

西南交通大学出版社  
· 成 都 ·

图书在版编目 (C I P) 数据

有限元法 / 荣先成主编. — 成都: 西南交通大学出版社,  
2007.2  
ISBN 978-7-81104-512-3

I. 有… II. 荣… III. 有限元法 IV. 0241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 016100 号

有 限 元 法

主 编 荣 先 成

责任编辑	刘娉婷
封面设计	本格设计
出版发行	西南交通大学出版社 (成都二环路北一段 111 号)
发行部电话	028-87600564 87600533
邮 编	610031
网 址	<a href="http://press.swjtu.edu.cn">http://press.swjtu.edu.cn</a>
电子邮箱	<a href="mailto:cbsxx@swjtu.edu.cn">cbsxx@swjtu.edu.cn</a>
印 刷	西南交通大学印刷厂
成品尺寸	140 mm × 203 mm
印 张	4.937 5
字 数	123 千字
版 次	2007 年 2 月第 1 版
印 次	2007 年 2 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 978-7-81104-512-3
定 价	15.00 元

图书如有印装问题 本社负责退换

版权所有 盗版必究 举报电话: 028-87600562

## 内容简介

本书是为工科大学生编写的教材，它是在已试用几届的基础上修订而成的。内容以有限元法分析和计算科学技术中的工程实际问题的主要步骤为主线，深入讲解了有限元法的基本概念和原理，并结合工程实例介绍了单刚、总刚矩阵的形成以及边界条件如何处理和网格如何划分等技术问题。本书的重点是单元分析的诸要素，同时对有限元法的物理和数学基础也进行了讨论，最后还介绍了有限元法的专题应用。

• 本书的特点是通俗易懂，可作为大学本科和工科研究生有限元法课程的教材，也可供一般工程技术人员参考。

## 前 言

有限元法在科技和工程领域得到了越来越广泛的应用，伴随着计算机科学技术的快速发展，这种数值方法的应用范围和领域必将被进一步拓宽。由于有限元法的通用性和有效性，使其在工程技术界受到高度重视，也让许多高等工科院校把它列为本科生和研究生的学位课或必修课。目前关于有限元法的教材和书籍不少，但真正适用于工科大学生的并不多见，这类书不是起点太高、篇幅太长，就是数学公式太多，深奥难懂，学生不好用，教师不好教。有限元法这门课涉及的物理、数学概念和公式不少，大学生们要学好这门课不是很容易，没有一本好的教材，学生学习起来自然难上加难。

首先，从教材的编写思路上，笔者认为有限元法本身是一种数值计算方法，工科大学生在将来的工作岗位上要能使用这种方法。学习有限元法理论的目的，是为了理解这种方法，以便将来高效率地使用它，所以在教材中不必过分强调数学概念和公式的完备性。不应该因为书中公式太多，有些公式推导又不详细，而使初学者难以理解并产生畏难情绪。

其次，笔者认为，从工科大学生应用角度出发，要讲清应用有限元法计算工程问题的好处和特点及其计算步骤，使学生在过程中，逐步明了这种方法并非高深莫测，实际上简单易行，从而产生自己动手使用它的冲动，在教材中可适时推出工程中常用的简单实例，让学生利用课堂上学到的知识，直接用于实践。不应该让学生从理论到理论，在数学公式中绕圈圈，学了半年还不能动手计算

简单的工程问题。

最后，在教材的编写体例上分别强调有限元法的基础和应用这两个不同的侧面。一方面，有限元法虽然可应用于不同的学科和工程领域，但其基本概念和公式在本质上是相同的，对初学者而言，要深刻理解有限元法的基本原理和概念并能够基本掌握，以便将来应用起来得心应手。另一方面，有限元法具有很强的应用背景，随着时间的推移，它将不断地被运用于新领域，但每一学科有限元法的应用形式都有别于另一学科的应用形式（比如常说的“固体有限元”和“流体有限元”，实际上是讲有限元法在某学科的具体应用），而在一本书中不可能把所有的应用形式都一一讲述清楚，而只能择其重点介绍。其余较为深奥和更广泛的内容则让有能力的本科生和研究生进一步研读。

基于上述三个方面的考虑，笔者在多年教授的讲义的基础上，编写出了这本适合工科大学生使用的有限元法教材。本书以有限元法分析和计算科学技术中的工程实际问题的主要步骤为主线，深入讲解了有限元法的基本概念和原理，并结合工程实例介绍了单元刚度矩阵、总体刚度矩阵的形成以及边界条件如何处理和网格如何划分等技术问题。本书的重点是单元分析的诸要素，同时对有限元法的物理和数学基础也进行了讨论，最后部分还介绍了有限元法的专题应用。

这本书通俗易懂，可作为学习有限元法的入门参考书，也可作为大学本科和工科研究生有限元法课程的教材，还可供一般工程技术人员参考。

本书虽几易其稿，但由于笔者水平有限，书中仍有不少缺憾，希望各位教师 and 同学在使用的时候不吝赐教。

荣光斌

2006年9月

# 目 录

第 1 章 绪 论	1
1.1 关于有限元法的概念	1
1.2 有限元法所具有的特点	1
1.3 学习有限元法课程的意义	2
1.4 用有限元法求解实际工程问题的步骤	3
第 2 章 有限元法剖分逼近概念及离散化步骤	5
2.1 有限元法的剖分逼近概念	5
2.2 离散化步骤	6
第 3 章 单元内插值函数的选取	11
3.1 选取插值函数	11
3.2 三角形单元内位移公式的推导	12
3.3 位移函数特点与形函数性质	16
3.4 三角形面积坐标	17
第 4 章 矩阵知识及其初步运算	20
4.1 矩阵知识	20
4.2 矩阵代数(初步运算)	22
4.3 矩阵微积分	25



第 5 章 分析单元力学特性的物理与数学基础	26
5.1 用直接物理定律建立单元内变量之间的关系	26
5.2 变分原理与有限元法	34
5.3 变分原理的推广——加权余数法	39
5.4 从泛函取极值的必要条件推导欧拉微分方程	41
5.5 直接物理定律与变分法推导结果的比较	46
第 6 章 有限元法的总体合成	50
6.1 单刚合成总刚	50
6.2 总体刚度矩阵的特点	56
6.3 边界条件的处理	57
第 7 章 基于直接刚度法的解题示例	62
7.1 一维柱结构解题示例	62
7.2 二维板结构解题示例	67
第 8 章 等参元	76
8.1 坐标变换	76
8.2 等参元概念的提出	79
8.3 坐标变换矩阵及变换行列式	80
8.4 等参变换的必要条件	82
8.5 等参元下的单元特性方程	84
8.6 几种典型等参单元形函数求法	85
8.7 等参元计算中的数值积分	91
第 9 章 有限元总体方程的解法	95
9.1 直接法	95
9.2 迭代法	100

---

<b>第 10 章 有限元法的程序设计</b> .....	103
10.1 有限元法程序设计简介及流程图 .....	103
10.2 大作业测试题 .....	105
10.3 大作业解答及相应程序 .....	106
<b>第 11 章 有限元法应用专题</b> .....	119
11.1 轴对称问题 .....	119
11.2 梁单元 .....	124
11.3 结构动态的有限元分析 .....	136
11.4 结构热特性有限元分析 .....	145
<b>参考文献</b> .....	148

# 第1章 绪论

## 1.1 关于有限元法的概念

我们先从不同学科角度来谈有限元法的概念。

(1) 从数学角度谈有限元法：求解微分方程，特别是椭圆形边值问题的一种离散化方法，其基础是变分原理和剖分逼近。

(2) 从力学角度谈有限元法：一种将连续体离散化，以求解各种力学问题的数值方法。

(3) 从土木工程的角度谈有限元法：把物体或结构整体所具有的域 ( $V$ ) 划分为有限多个被称为单元的子域 ( $V_n$ )，以求得近似解的一种数值计算方法。

(4) 从机械工程角度谈有限元法：对机械零件或构件等作应力分析的一种离散数值方法。

(5) 从航空、航天工程角度谈有限元法：将结构用网格划分为计算模型的一种结构分析数值方法。

从以上论述可以看出：不同学科和工程类别从各自特有学术角度对有限元法给出相应的不同定义，但有一条是共同的，即都认为有限元法是有效的数值分析方法。

## 1.2 有限元法所具有的特点

简要归纳起来，有限元法主要有下述四个特点：

(1) 以简单逼近复杂，即把原本复杂的求解区域分成一个一个单元，在相对简单的单元内建立公式，然后总体合成，逼近真实解。在一定条件下，随着单元分得越来越细，逼近真实解的程度越来越高。

(2) 采用矩阵形式表达，便于编制计算机程序，可以充分利用电子计算机所提供的方便。

(3) 特别适合求解具有复杂几何形状的问题，因为它不必用正交网格计算。

(4) 适应性很强。虽然它开始是用来研究复杂的飞机结构中的应力的，但现在已应用到绝大多数学科领域的工程计算问题。

比如，有限元法已从弹性力学平面问题扩展到了空间问题、板壳问题；从静力平衡问题扩展到了动态问题；从固体力学扩展到了流体力学、传热学；从弹性材料问题扩展到了弹塑性、塑性、黏弹性和复合材料问题；从航空工程问题扩展到了宇航、土木建筑、机械制造、水利工程及原子能学科等方面的问题。

### 1.3 学习有限元法课程的意义

同学们要问：为什么要学习有限元法？它有什么用处和优点？

首先，工程实践中的许多问题用我们大学里已学的知识解决不了，比如，在高等数学中学过微积分，用定积分与不定积分即可求得原函数  $\int \sin x = -\cos x + c$ ，但在工程中不存在这么简单的问题。

我们已学过材料力学、理论力学和弹性力学等课程，这些力学课程虽然使同学们增加了不少力学知识，但对实际中普遍存在的形状复杂、边界条件及载荷条件也复杂的结构问题，单纯使用这些经典力学的知识而不利用有限元法，计算分析起来会有困难。比如在飞行器的结构分析中，无论从静、动强度分析还是对其疲劳与断裂分析都离不开有限元法。有限元法已成为一种常规的必不可少的分析方法。

其次，在工程技术领域中有许多已知控制方程和边界条件的力学问题或场问题，无法用我们所学知识求得解析的精确解。不过实际上发现许多问题无需非得知道解析的精确解，只需求出近似的数值解就可以了，而我们可以保留问题的复杂性，利用数值计算方法求得问题的近似数值解。随着电子计算机的飞速发展和广泛应用，人们已逐步倾向于采用数值方法求解复杂的工程实际问题，而有限元法就是一种十分有效的数值方法。

所以学好有限元法对工科大学本科生和研究生来说很有必要。

## 1.4 用有限元法求解实际工程问题的步骤

有限元法分析和计算工程问题一般分为六个步骤：

(1) 求解区域离散化。用网格将求解区域（或结构）分为若干小块，即分成有限个单元，这是进行有限元分析的第一步。剖分逼近是有限元法的基本概念。

(2) 选择插值函数（或称位移模式）。对单元中的位移分布作出一定假设，也就是假定位移是坐标的某种简单函数，这种函数称为插值函数或位移模式。通常选择多项式作为场变量的插值函数，因为多项式易于积分或微分。

有限元法采用分片近似，只需对一个单元选择一个近似位移函数，而不必对整个求解区域选择函数。有限元法开始则不必考虑边界条件，只需考虑单元之间位移连续就可以了，这样比在整个区域中选取连续函数要简单得多。特别是对复杂的几何形状或者材料性质、作用载荷有突变的结构，采用分片（段）函数就显得更为合理和适宜了。

(3) 分析单元的（力学）特性。应用物理直接法、变分原理和加权余数法中任一种，来确定单元特性的矩阵方程（单元刚度矩阵）。导出单元刚度矩阵是单元特性分析的核心内容。

(4) 集合所有单元的平衡方程，以建立整个求解问题（系统）的平衡方程组。这个集合过程包括两方面内容：一是将各个单元的刚度矩阵集成整个系统的刚度矩阵；二是将作用于各单元的等效节点力矩阵，集成总体载荷列阵。

在求解这些系统方程组前，必须考虑边界条件，故须对它们加以修正，才能求出未知的物理量（未知节点位移）。

(5) 求解系统的总体方程组（即总体方程）。

(6) 根据需要进行附加计算。比如已求得节点位移，再根据位移与应变、应力关系求出应变与应力等；再如在流体力学中已知压力可求速度、流量等。

## 第 2 章 有限元法剖分逼近概念 及离散化步骤

从本章开始，就用有限元法求解工程实际问题的六个步骤为顺序，依次对运用有限元法所必须知道的基本概念和公式展开讨论。

### 2.1 有限元法的剖分逼近概念

求解区域的离散（结构离散）是进行有限元分析计算的第一步。剖分逼近即离散化概念是有限元法中最基本的概念，下面对这一概念来进行进一步讨论。

求解区域的离散化，即把实际问题的整体求解域剖分为有限个（基本）单元，这可以通过有限个互不重叠的三角形、四边形或多边形来分割求解区域。

所谓离散化，即由无限个质点组成的连续体转化为有限个单元组成的集合体。这些单元越小，越逼近原连续的求解域。若原来的求解域是外形相当复杂的几何区域，按传统力学知识一般无法求解。比如，具有流线型外形的飞机机翼，它一般具有复杂的曲边外形，我们只需用简单单元划分，如单元数目足够大，总可以逼近原连续求解域，这种离散就可达到化无限为有限，化难为易的效果。这是从几何剖分的角度谈的。如从数学意义上说，一个连续域可以分割为有限个子域，每个子域的场函数只包含有限个参数的简单场函数，用这些子域的场函数的集合就能近似地代表整个连续域的场函数。

其最终结果就是把微分方程组转化为代数方程组，起到化难为易的作用。

## 2.2 离散化步骤

用于离散求解区域连续体的单元类型大致有如下几种：

(1) 一维线性单元族，如图 2-1 所示。

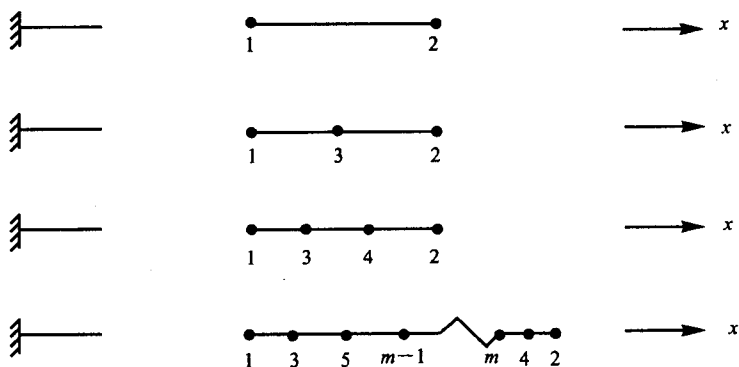


图 2-1

(2) 二维最常用单元为三节点三角形单元，还有六节点和十节点三角形单元，如图 2-2 所示。

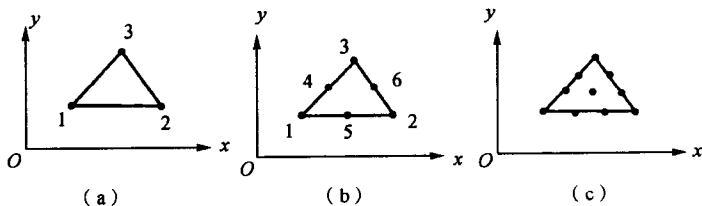


图 2-2

(3) 长方形和一般四边形单元，如图 2-3 所示。



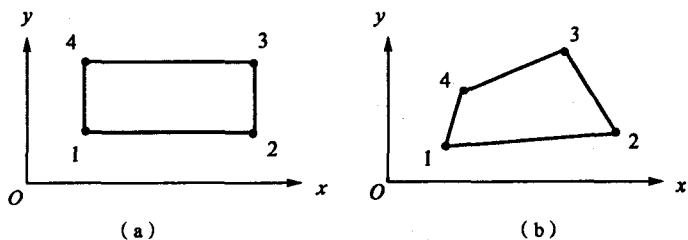


图 2-3

(4) 三维用的有四面体单元和正六面体单元，如图 2-4 所示。

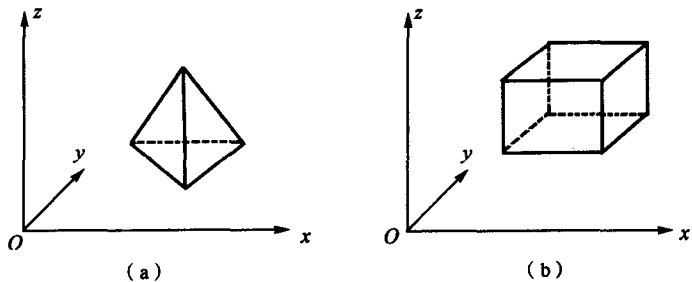


图 2-4

以后章节中求解区域的离散主要用平面三节点三角形单元，对求解区域进行离散有一定原则和技巧。

现以一个受载的悬臂梁为例（如图 2-5 (a) 所示），网格划分如图 2-5 (b) 所示），来说明划分网格的原则和技巧。

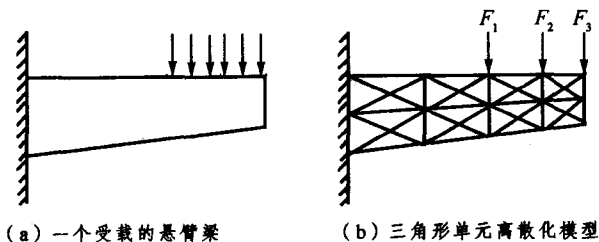


图 2-5