初中自然科学补充讀物

一次方程

刘尼 著

中国青年出版社

內 容 提 要

本書是供初中学生学习一次方程作参考的。首先講明根据算术四則运算的性質解簡單的一元一次方程的方法。接下去再講方程的基本性質和一元一次方程的一般解法。最后講一次方程組的性質和解法。

一 次 方 程
刘 尼 著
*
中国青年出版社出版
（北京东四12条老君堂11号）
北京市書刊出版業營業許可証出字第036号
中国青年出版社印刷厂印刷
新华書店总經售
*
787×1092 1/32 3 1/8印張 58,000字
1958年8月北京第1版 1958年8月北京第1次印刷
印数1—35,000

統一書号：13009·163

定价（8）三角

初中自然科学补充讀物

一次方程

刘尼著

中国青年出版社

1958年·北京

目 次

一 等式和方程……………………………………………… 3

等式的性質(3) 恆等式(4) 方程(6) 解方程(8) 練习一(10)

二 方程的一些性質……………………………………………12

方程的元和次數(12) 同解方程(13) 方程的兩个基本性質(15) 增根和遺根(19) 練习二(22)

三 一元一次方程……………………………………………23

一元一次方程的根(23) 一元一次方程的解法(24) 練习三(29) 字母方程(29) 練习四(32) 分式方程(33) 練习五(36)

四 用方程解应用題……………………………………………38

用方程解应用題的方法(38) 应用方程解一般形式的問題(50) 練习六(51)

五 一次方程組……………………………………………54

二元一次方程(54) 二元一次方程的图象(55) 方程組(60) 二元一次方程組的解法(62) 比較法(62) 練习七(65) 代入法(66) 練习八(70) 加減法(71) 練习九(76) 公式代用法(76) 練习一〇(83) 图象法(83) 二元一次方程組的解的討論(85) 練习一一(88) 多元一次方程組(89) 三元一次方程組的解法(90) 三元一次方程組的解的組數(97) 練习一二(98)

一 等式和方程

等式的性質

用等号"="連結兩个代数式所成的式子叫做**等式**。例如：

$$5+6=11,\ a+b=b+a,\ (a+b)m=am+bm,$$

$$3x=6,\ 5x^2+2=3x+4,\ \frac{5}{x+2}=\frac{3}{x-3}$$

都是等式。

等式中的等号把等式分做兩边：**左边**和**右边**。例如：$5+6$，$3x$，$5x^2+2$ 分别是等式 $5+6=11$，$3x=6$，$5x^2+2=3x+4$ 的左边；11，6，$3x+4$ 分别是它們的右边[1]。

等式的主要性質有下列四个（下面各个式中的字母所表示的都是代数式）：

(1) 如果 $a=b$，那末 $b=a$。

这就是說：**兩个数或式子 a 和 b 如果相等，这个相等关系是相互的，a 等于 b，b 也等于 a**。就等式說，就是它的**左右兩边可以交換位置**。

(2) 如果 $a=b$，$b=c$，那末 $a=c$。

这就是說：**兩个数或式子分别和第三个数或式子相等，这兩个数或式子也就相等**。

(3) 如果 $a=b$，$m=n$，那末 $a+m=b+n$，$a-m=b-n$。

---

[1] 这是依照习慣說的，是把写这个等式和讀这个等式的人作标准；如果用等式自己作标准，左右恰好相反。

这就是說：相等的兩个数或式子分别加上或者減去相等的数或式子，还是相等的。当然，相等的兩个数或式子加上或者減去同一个数或式子还是相等的。就等式說，就是，兩个等式的左右边分别相加或者相減，所得的数或式子仍然相等．

(4)　如果 $a=b$，$m=n$，那末 $am=bn$，$\frac{a}{m}=\frac{b}{n}$（m，n 不等于 0）。

这就是說：相等的兩个数或式子分别乘以或者除以相等的数和式子，还是相等的（除数不能是 0）。当然，相等的兩个数或式子乘以或者除以同一个数或式子（除数不能是 0）还是相等的。就等式說，就是，它的兩边分别乘以或者除以不等于零的相等的数或式子，兩边仍然相等。

根据这个性質，在演算里，我們可以用 -1 去乘或者除一个等式的兩边，把这个等式兩边的符号改变做相反的符号．例如用 -1 去乘或除 $2x=5$，$3x=-4$，$-5x=7$，$-2x=-5$，就分别得到 $-2x=-5$，$-3x=4$，$5x=-7$，$2x=5$。

恒　等　式

$$a+b=b+a,\ (a+b)m=am+bm$$

和
$$x^2+3x-4=(x-1)(x+4)$$

这三个等式都含有字母，并且无論用什么数去代替等式中的字母，这些等式都能成立。例如第一个等式 $a+b=b+a$：

$a=3$，$b=4$，　　那末　$3+4=4+3$；

$a=5$，$b=-4$，　　那末　$5-4=-4+5$；

$a=-2$，$b=-6$，　那末　$-2+(-6)=-6+(-2)$。

又如第二个等式$(a+b)m=am+bm$：

$a=4, b=5, m=2$，　那末　$(4+5)\cdot 2=4\cdot 2+5\cdot 2$；

$a=-1$，$b=6$，$m=-8$，那末

$$(-1+6)\cdot(-8)=(-1)\cdot(-8)+6\cdot(-8)$$；

$a=3, b=-7, m=-4$，那末

$$(3-7)\cdot(-4)=3\cdot(-4)+(-7)\cdot(-4).$$

再如第三个等式$x^2+3x-4=(x-1)(x+4)$：

$x=0$，　那末　$0^2+3\cdot 0-4=(0-1)(0+4)$；

$x=2$，　那末　$2^2+3\cdot 2-4=(2-1)(2+4)$；

$x=4$，　那末　$4^2+3\cdot 4-4=(4-1)(4+4)$；

$x=-1$，那末　$(-1)^2+3\cdot(-1)-4=(-1-1)(-1+4)$.

这种无論用什么数代替等式中的字母都能成立的等式，叫做恆等式。换句話說，如果无論用什么数代替等式中的字母，等式兩边的值都相等，这种等式就是恆等式（当然代替同一个字母的数是要相同的）。

在这里，我們应当注意，等式

$$\frac{1}{x-3}=\frac{1}{x-3},$$

用 3 去代 x 是不行的，因为分母变成 0，是沒有意义的。但用 3 以外的数去代 x，它都能成立，这样的等式也是恆等式。所以，严密地說：如果无論用怎样的容許的数代替等式中的字母，这等式都能成立，那末这种等式就是恆等式。末后的一个等式，3 就不是容許的数。

又如 $5+6=11$ 和$\frac{2}{3}=\frac{6}{9}$这种不含字母的等式，也叫做恆等式——数目恆等式。

方　程

現在我們来看恆等式以外的一种等式，例如，$3x=6$，$5x^2+2=3x+4$，$\frac{5}{x+2}=\frac{3}{x-3}$.

第一个等式 $3x=6$，只有用 2 代替 x，$3\cdot 2=6$，它才成立；用其他的数，例如 4，-1，$\frac{3}{2}$ 代替 x，分别得到 $3\cdot 4=12\neq 6$，$3\cdot(-1)=-3\neq 6$，$3\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{2}\neq 6$，都表明这个等式不能成立.

第二个等式 $5x^2+2=3x+4$，只有用 1 和 $-\frac{2}{5}$ 代替 x，$5+2=3+4$ 和 $\frac{4}{5}+2=-\frac{6}{5}+4$，它才能成立.

第三个等式 $\frac{5}{x+2}=\frac{3}{x-3}$，只有用 $\frac{21}{2}$ 代替 x，$\frac{5}{x+2}=\frac{5}{\frac{21}{2}+2}=\frac{10}{25}=\frac{2}{5}$，$\frac{3}{x-3}=\frac{3}{\frac{21}{2}-3}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$，这个等式才能成立.

再看等式 $ax=b$. 这个等式只有用 $\frac{b}{a}$ 代替 x，它才能成立.

上面的四个等式都只有在 x 等于一定的值的时候才能成立. 也就是它們的成立是有条件的. 这种有条件才能成立的等式，叫做**方程**.

前三个方程中，x 的数值是要經过一定的計算才能决定的. 这种数叫做**未知数**. x 以外的数，它們的值是一定的，也就是已經知道了的，这种数就叫**已知数**.

含有几个字母的方程中，可以把任何一个或几个字母作为未知数，其余的字母作为已知数. 例如第四个方程 $ax=b$ 中，一共有三个字母，a，b，x. 我們可以把 x 作为未知数，a 和

b 作为已知数；或者把 a 或 b 作为未知数，相应地把 b 和 x 或者 a 和 x 作为已知数。当然，一个方程里究竟哪一个字母是未知数，应該結合具体情况来确定。

实际上，等式 $ax=b$ 所表示的是：兩个数 a 和 x 的积等于 b。依照算术里的說法，a 是被乘数，x 是乘数，b 是积。在算术里我們已經知道：被乘数等于积除以乘数，$a=\frac{b}{x}$；乘数等于积除以被乘数，$x=\frac{b}{a}$。这就是說，由方程 $ax=b$（b 作未知数）就可以得到方程 $a=\frac{b}{x}$（a 作未知数）和 $x=\frac{b}{a}$（x 作未知数）。这三个方程所表示的 a,b 和 x 三个数中間的相依关系完全是一样的。

在某种情况下，我們也可以把任何有字母的等式都看作方程，而把它里面的一个或几个字母看作未知数。例如 $x+2x=3x$，也可以把 x 看作未知数，而把这个等式看作方程（参看第 9 面）。

总的說来，**方程是表示几个数量間相依关系的等式**。

我們常常用構成几个数量間的相依关系的方程来解問題，只要列出这样的方程，我們就可以看作是已經把問題解决了。下面我們举几个問題作为例子。

問題 1 青年工人小組第一季度做了 a 个零件，第二季度做了 b 个零件，这兩个季度他們一共做了多少个零件？

假設这个青年工人小組兩个季度一共做了 x 个零件，因为他們兩个季度所做的零件就是第一和第二这兩个季度所做零件的和，所以表示 a,b,x 的相依关系的方程是：

$$x=a+b.$$

問題 2 花布一尺的定价是 a 角，买 b 尺应当付多少錢？

假設应当付的錢是 x 角，因为貨物的总价等于它的單价（每尺 a 角）乘以所买貨物的总量（b 尺），所以表示 a,b,x 的相依关系的方程是：

$$x=ab.$$

問題 3 單独完成某一項工程，甲队要 a 个工作日，乙队要 b 个工作日，兩队合做，多少个工作日可以完成这項工程？

假設兩队合做 x 个工作日可以完成这項工程，那末每个工作日能够完成的工程就是 $\frac{1}{x}$。因为甲队每个工作日能够完成的工程是 $\frac{1}{a}$，乙队每个工作日能够完成的工程是 $\frac{1}{b}$，而兩队合做，每个工作日所能够完成的工程等于兩队單独做时每个工作日所能够完成的工程的总和，所以表示 a,b,x 的相依关系的方程是：

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

解 方 程

在前面問題 1 的方程中，如果 $a=300$, $b=250$，那末就可以求出

$$x=300+250=550.$$

如果 $a=400, x=725$，因为 $725=400+b$，就可以求出

$$b=725-400=325.$$

如果 $b=250, x=700$，因为 $700=a+250$，就可以求出

$$a=700-250=450.$$

能够使方程成立的未知数的值，叫做方程的解。就只含

一个未知数的方程說，方程的解又叫做这方程的根.

有的方程可以有无穷个解，例如，方程

$$x+2x=3x,$$

无論用什么数去代替未知数 x，这个方程都能成立，就是这个方程有无穷个解，实际上这种方程就是一个恆等式.

有的方程可以沒有解，例如方程

$$x+1=x+3,$$

因为无論什么数加上1都不能等于它加上3，所以沒有任何一个数可以代替 x，而使得这方程的左右兩边的值相等；这种方程就沒有解.

求方程的解或者确定方程沒有解的演算过程叫做解方程.

前面問題1和2所得的方程，就 x 說，它們的解就分别是：

$$x=a+b \text{ 和 } x=ab,$$

因为，就这兩个方程說，无論 a 和 b 是什么值，只要分别把它們相加或者相乘，就可以求出相应的 x 的值来，所以这兩个式子又叫做方程的解的公式.

我們再来看方程

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

因为

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab},$$

根据等式的性質(2)，可以得：

$$\frac{1}{x}=\frac{a+b}{ab}.$$

根据等式的性質(3)，用 abx 去乘这等式的兩边，又可以得：

$$ab=(a+b)x.$$

根据等式的性質(1)，还可以得：

$$(a+b)x=ab.$$

末了，又根据等式的性質(3)，用 $a+b$ 去除这等式的兩边，就得：

$$x=\frac{ab}{a+b}.$$

这就是原方程的解的公式。解只含有一个未知数的方程，就是求出用这方程中的已知数表示这未知数的式子。

有了这个公式，对于 a 和 b 的一定的数值，就可以計算出 x 的相应的数值。例如：

$a=5$，$b=8$，那末 $x=\frac{5\cdot 8}{5+8}=\frac{40}{13}$.

$a=7$，$b=4$，那末 $x=\frac{7\cdot 4}{7+4}=\frac{28}{11}$.

練 习 一

1. 某人一月份在銀行里有 a 元存款，二月份又存进 b 元，他的存款一共就是 x 元，写出表示 a,b,x 相依关系的方程，并且填好下面的表：

x	a	b
	15	10
25	19	
30		17

2. 一个長方形的花园，長是 a 公尺，寬是 b 公尺，周長是 p 公尺，面积是 S 平方公尺，分别写出表示 a,b,p 和 a,b,S 相依关系的方程，并且填好下面的表：

S	p	a	b
		15	12
	60	14	
	50		10
72		8	
63			9

3. 一只汽船在静水中的速度是每小时 V 公里，河水流动的速度是每小时 v 公里，顺着河逆水上行 t 小时所行的距离是 S 公里，写出表示 V,v,t,S 相依关系的方程，并且填好下面的表：

S	V	v	t
40	12		4
20		3	2
	15	3	3
98	12.5	2.7	

二 方程的一些性質

方程的元和次数

方程中所含的未知数叫做方程的元。通常我們都用拉丁字母末尾几个如 x,y,z 等表示未知数，起首几个如 a,b,c 等表示已知数。

按照方程中所含的未知数的个数，我們分别把它們叫做：一元方程，例如，$3x-24=6$，$3x+a=x-b$，$x^2+3x=x+3$；二元方程，例如，$x+y=5$，$x^2+xy=2y+1$；三元方程，例如，$x+2y+5z=6$，$xy+z=a$，$xyz=c$。

按照方程中的元的最高次数，我們分别把它們叫做：一次方程，例如，$3x=6$，$2x+5=x-3$；二次方程，例如，$ax^2+b=0$，$ax^2+bx=cx+d$，$x^2+y=3y+5$，$xy+x+y=a$；三次方程，例如，$x^3=a$，$x^2y=b$，$xyz+x+y=z^2$。

这里应当注意，方程中的元不只一个的时候，如果我們只就其中的某一个元說，那末这个方程的次数也就只由这个元的次数来决定。例如，就 x,y 或 z 分别来說，$xy+x+y=a$，$xy+xz+yz=a$ 都是一次方程；而 $x^2+y=3y+5$ 和 $x^2y=b$，就 x 說是二次方程，就 y 說却是一次方程。

其次，还要注意，方程的兩边往往含有分式或括号，在这种情况下，要經过消去分母，解去括号以及合并同类項，才能决定它的次数。例如，$\frac{1}{x+3}=\frac{3}{x-5}$ 这个方程，用 $(x+3)(x-5)$

去乘它的兩边，就得 $x-5=3x+9$，这是一个一次方程。而 $3x(2x+5)=6x+1$，去掉左边的括号，就得 $6x^2+15x=6x+1$，这是一个二次方程。但是，$3x(2x+5)=6x^2+1$ 这个方程，去掉括号是 $6x^2+15x=6x^2+1$，再从兩边減去相同的項 $6x^2$，就得 $15x=1$，这是一个一次方程。

对于一个方程，一般的，我們是把它所含的元的个数以及它的次数結合起来称呼的。例如，$3x=6$，$ax+b=cx-d$ 都叫做一元一次方程，$3x+y=4$，叫做二元一次方程，$ax^2+c=0$，$x^2+px+q=0$ 都叫做一元二次方程；而 $x^2+y+a=0$，$xy=c$ 都叫做二元二次方程。

本書只講到一次方程。

一元一次方程的标准形式是：$ax+b=0$，或 $ax=b$。

二元一次方程的标准形式是：$ax+by+c=0$，或 $ax+by=c$。

三元一次方程的标准形式是：$ax+by+cz+d=0$，或 $ax+by+cz=d$。

在这些方程中，字母 a,b,c,d 所表示的都是已知数。

同 解 方 程

先看下面的兩个方程：

$$3x=6, \tag{1}$$

$$5x+3=13. \tag{2}$$

方程（1）可以看成是表示被乘数 3 和乘数 x 兩个数的积等于 6，要求乘数 x。在算术里，我們已經知道：乘数等于积

除以被乘数，所以 $x=\frac{6}{3}=2$。这就是說，方程(1)有一个解 $x=2$，并且也只有这一个解。

方程(2)可以看成是表示兩个数5和 x 的积加上3等于13，要求 x。先把 $5x$ 作为一个未知数，方程(2)就可看成表示兩个数 $5x$ 和3的和等于13，要求 $5x$。在算术里，我們已經知道：从兩个加数的和里减去一个加数，就等于另一个加数，所以 $5x=13-3=10$，也就是 $5x=10$。依照方程(1)的解法，也得到 $x=2$，这就是方程(2)的一个解，并且方程(2)只有这一个解。

再看下面的兩个方程：

$$(x-2)(x+3)=0, \tag{1}$$

$$5(x-2)(x+3)=0. \tag{2}$$

我們很容易看出来，用2或者 -3 去代替方程(1)和(2)中的 x，都得到恆等式 $0=0$。也就是2和 -3 都能够使等式(1)和(2)成立。但是，除了2和 -3 这兩个数，用別的无論什么数去代替方程(1)和(2)中的 x，都不能使它們的左右兩边相等。所以方程(1)和(2)都有兩个解 $x_1=2$ 和 $x_2=-3$，并且也只有这兩个解。

上面所举的兩个例都表明，方程(1)和(2)的解完全相同。換句話說：方程(1)的解都是方程(2)的解；而反过来，方程(2)的解也都是方程(1)的解。

如果兩个方程中，第一个的解都是第二个的解，而第二个的解也都是第一个的解，那末，这兩个方程就叫做同解方程。簡括地說：**具有完全相同的解的方程就叫做同解方程。**

上面所举的方程 $3x=6$ 和 $(x-2)(x+3)=0$ 并不是同解方程。因为第一个方程的解 $x=2$ 虽然也是第二个方程的解，但是第二个方程还有一个解 $x=-3$，并不是第一个方程的解。

解方程的方法，就是逐步將方程的形式改变成比較簡單的方程，一直到得出最簡單的方程 $x=a$ 为止，而 $x=a$ 就是原方程的一个解；当然这只是对于有解的方程說的。

但是，改变一个方程的形式，所得到的方程并不一定都是原方程的同解方程。新方程的解，有的时候会比原方程的多，有的时候又会比原方程的少。

要根据些什么才能把一个方程改变成为它的同解方程呢？下一节我們就来回答这个問題。

方程的兩个基本性質

性質 1　在方程的兩边分别加上或減去同一个数或同一个代数整式，这样得到的方程是原方程的同解方程。

我們来看方程.

$$x^2+3=3x+1, \tag{1}$$

在它的兩边分别加上同一个数，例如 a，就得方程

$$(x^2+3)+a=(3x+1)+a. \tag{2}$$

为了証明方程(1)和(2)是同解方程，就需要証明：第一，方程(1)的解都是方程(2)的解；以及第二，方程(2)的解都是方程(1)的解。

先証明第一个条件。我們用 1 代替方程(1)中的 x，得到：